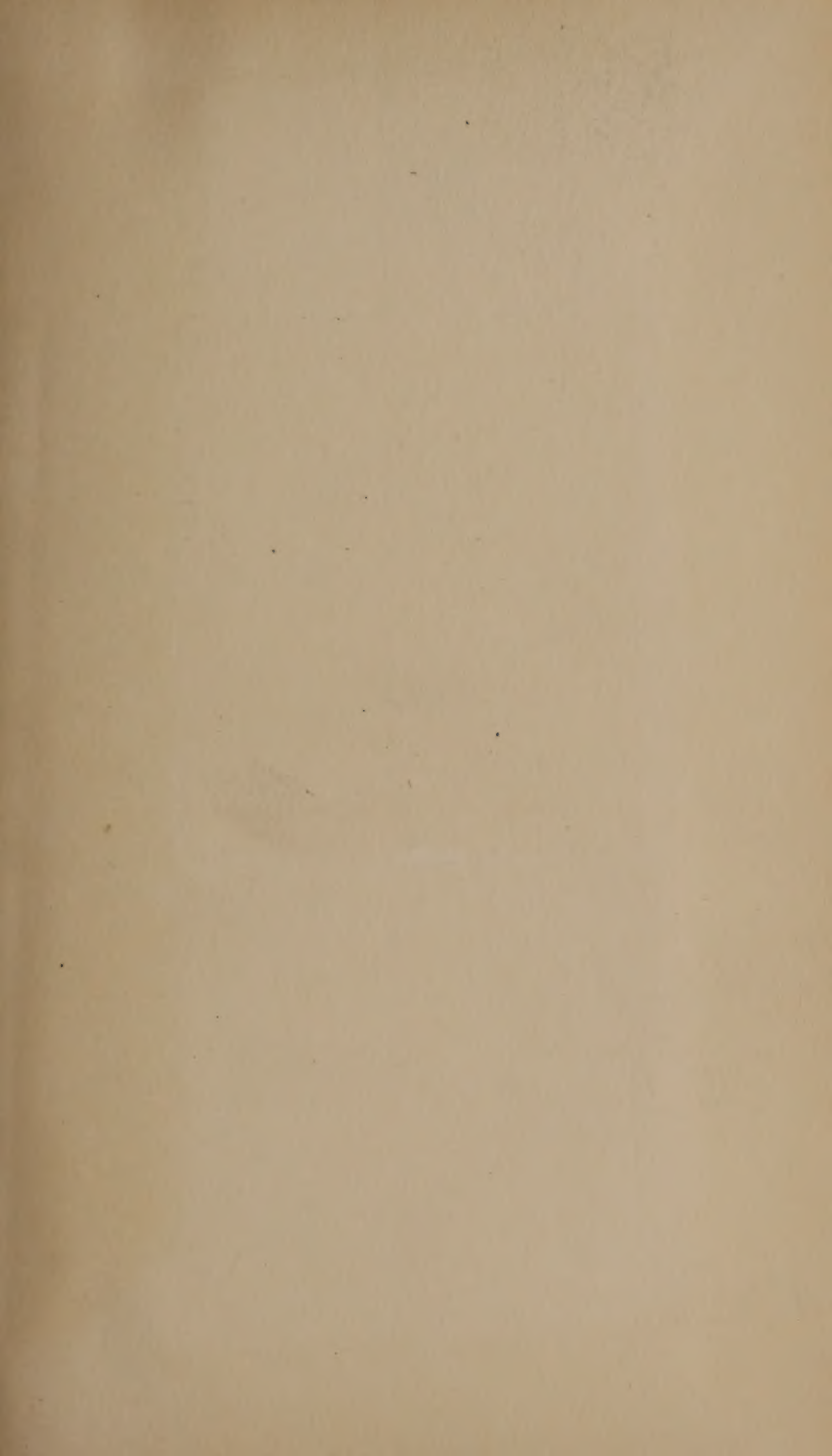
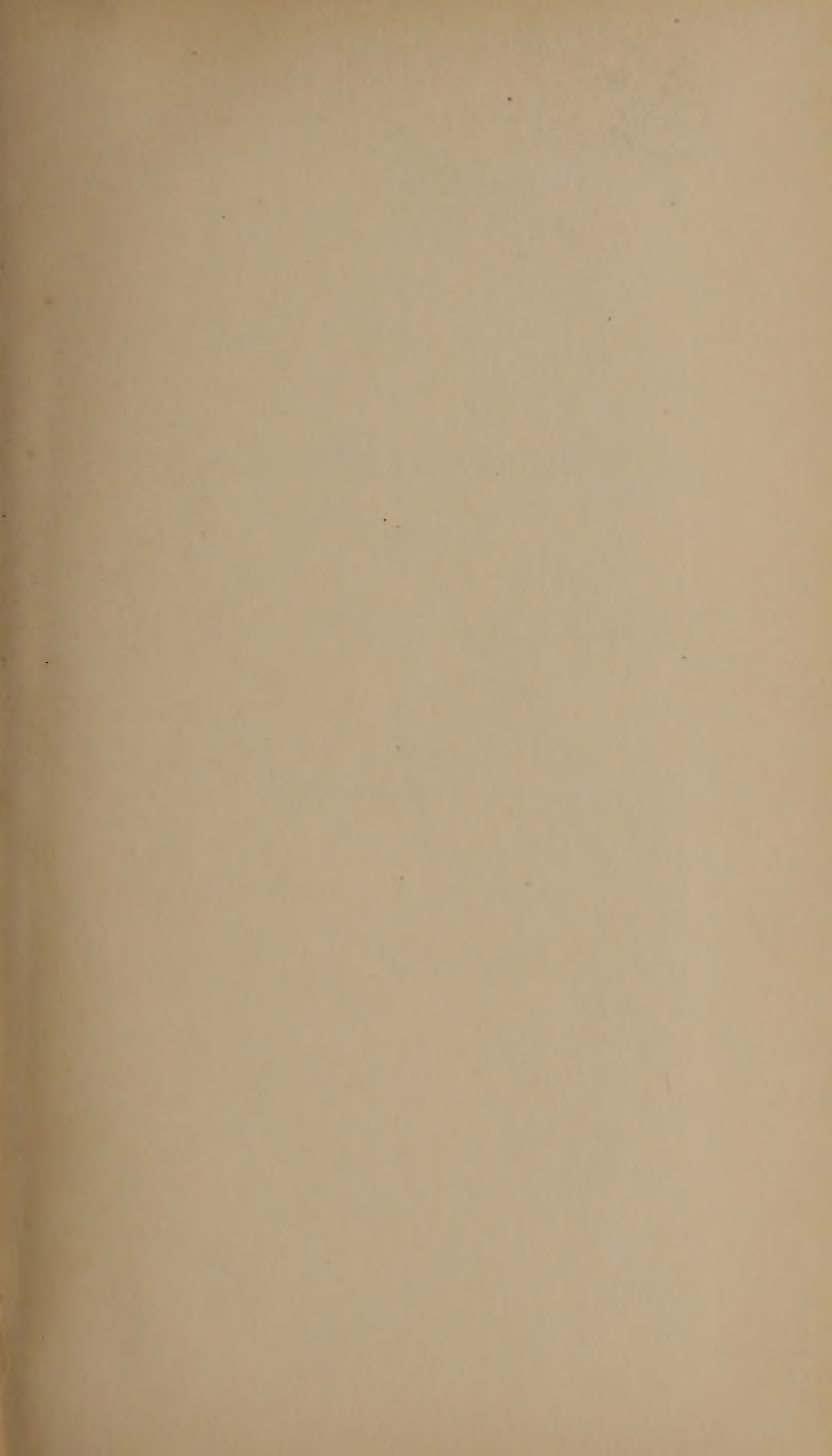










VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE.**

TWEEDE REEKS.

ZEVENTIENDE DEEL.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1882.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER-KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ZEVENTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

OVER DE DENSITEIT

EN DEN

UITZETTINGS-COËFFICIËNT VAN DIAETHYLAMINE.

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.

Het onderzoek, waarvan de uitkomsten hier zullen worden medegedeeld, heeft zijn ontstaan te danken aan eene verhandeling van den Hoogleeraar J. D. VAN DER WAALS: »Over de coëfficiënten van uitzetting en van samentrekking in overeenstemmende toestanden van verschillende vloeistoffen," opgenomen in de natuurkundige verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Deel XX (1880).

De schrijver geeft daarin als vrucht van zekere theoretische beschouwingen een regel, volgens welken uit de kritische temperatuur en den uitzettings-coëfficiënt van éène stof, de uitzettings-coëfficiënt van eene andere stof kan worden berekend, waarvan mede de kritische temperatuur bekend is en komt aan het eind van zijne verhandeling tot een anderen regel, volgens welken de densiteit van eene stof, wier kritische temperatuur en kritische druk, wier uitzettings-coëfficiënt en moleculairgewicht bekend is, met benadering kan worden berekend uit die van eene andere stof, waarvan insgelijks de laatstgenoemde gegevens en bovendien nog de densiteit bekend zijn.

Zoo wordt bepaaldelijk ten aanzien van diaethylamine aangegeven, dat de densiteit daarvan bij eene temperatuur, die met 0^0 bij aether overeenstemt, ongeveer gelijk zal zijn aan die van aether. Want overeenstemmende temperaturen wor-

den die genoemd, welke gelijke gedeelten zijn van de absolute kritische temperatuur.

Daar nu omtrent de densiteit en den uitzettings-coëfficiënt van diaethylamine niets met zekerheid bekend is, heb ik het van belang geacht, daaromtrent een onderzoek in het werk te stellen, ten einde gelegenheid te geven, den door VAN DER WAALS à priori gegeven regel aan de ervaring te toetsen.

De stof, die tot het onderzoek heeft gediend, was afkomstig uit de bekende fabriek van C. A. F. KAHLBAUM te Berlijn en was bereid uit nitroso-diaethyline, zoodat daardoor een voldoende waarborg was geleverd tegen eene verontreiniging met aethylamine en triaethylamine.

Ongeveer 70 C.C. van dit praeparaat werden aan gefractioneerde destillatie blootgesteld. De vloeistof begon onder een barometerstand van 762^{mm} bij 55^0.3 (gecorr.) te koken. Gedurende geruimen tijd steeg de thermometer nauwlijks merkbaar. Toen ongeveer 40 C.C. waren overgegaan, stond hij in den damp der vloeistof op 57^0 C.; daarop steeg de temperatuur sneller tot 61^0 C. en daarboven. Ten laatste bleef er in de retort bij 70^0 C. eene kleine hoeveelheid (nauwelijks 1 C.C.) van eene vloeistof over, die door water troebel werd, en hoogst waarschijnlijk uit een mengsel van nitrosodiaethyline, diaethylamine en water bestond. Zij verried duidelijk den reuk der beide eerstgenoemde stoffen en een stuk kali vervloeide daarin na eenigen tijd.

Door herhaalde gefractioneerde destillatie van het tusschen 55^0.3 en 61^0 C. overgekomen vocht, verkreeg ik een product, dat tusschen 55^0.3 en 57^0 C. kookte en, naar de uitkomsten van een onderzoek naar de samenstelling en het verzadigingsvermogen, inderdaad met de formule $C_4 H_{11} N$ overeenkwam. In de meening, dat dit werkelijk nagenoeg zuivere diaethylamine was, (te meer omdat voor het kookpunt daarvan door HOFMANN 57^0 C. opgegeven wordt), deed ik twee reeksen van bepalingen van densiteiten, de eerste van 0^0—40^0 C. met behulp van een uitstekenden pyknometer van GEISSLER met uitzettingsreservoir en met een in vijfde graden verdeelden thermometer als stop en

de tweede van 0°—54° C. met behulp van een zoogenaamd Gay-Lussac'sch fleschje van ongeveer 10 C.C. inhoud. Bij het gebruik van dit laatste werktuigje kon ik tot 41° C. een in vijfde graden verdeelden thermometer van Geissler bezigen, maar moest, daar deze geene hoogere temperaturen aangaf, voor temperaturen van 41°—54° aanvankelijk mijn toevlucht nemen tot een anderen thermometer, waarvan mij wel is waar de gang nauwkeurig bekend was, doch waarvan elke graadverdeeling slechts 1½ millimeter besloeg en de onderdeelen moesten geschat worden. De boven 40° C. bij deze tweede reeks gedane bepalingen, die ook om andere redenen minder betrouwbaar zijn, meen ik gerustelijk te kunnen verwerpen.

De inhoud van beide werktuigen was door waterweging, onder inachtneming van de noodige voorzorgen, bepaald.

Voor den inhoud, in C.C. uitgedrukt, van den pyknometer van Geissler vond ik tusschen 0°—40° C. het volgende:

$$V^t = 22.8488 + (0.0005)\,t$$

en wel uit een 25tal wegingen, waarvan er 5 bij 0°, 5 bij ± 20, 5 bij ± 40° C. en de overige bij tusschenliggende temperaturen waren uitgevoerd. (Het grootste verschil tusschen de waargenomene en berekende volumina bedroeg ± 0.0023 C.C., het gemiddelde verschil ± 0.0015 C.C.)

De inhoud in C.C. van het Gay-Lussac'sche fleschje, afgeleid uit een twintigtal waarnemingen tusschen 0° en 55° C. kon worden voorgesteld door de formule:

$$V^t = 9.9470 + 0.000233\,t.$$

(Het grootste verschil tusschen de waargenomene en berekende volumina bedroeg hierbij ± 0.0021 C.C., het gemiddelde verschil ± 0.0012 C.C.).

De uitkomsten van de twee eerste reeksen van densiteitsbepalingen van diaethylamine, die later uitvoeriger zullen worden vermeld, stemden van 0° tot 40° zeer goed overeen. Voor verder onderzoek ben ik evenwel van het gebruik van een pyknometer afgestapt, vooreerst omdat ik daarbij geene hoogere temperatuur dan 40° C. kon bereiken, en ten tweede

omdat het mij voorkwam, dat een pyknometer met ingeslepen stop voor het onderzoek van zulke vluchtige vloeistoffen als diaethylamine, aether, enz., wegens het capillair optrekken van het vocht tusschen hals en stop en het verdampen tengevolge daarvan, minder doelmatig was. Ik bepaalde mij daarom bij mijne volgende bepalingen tot het gebruik van het boven beschrevene GAY-LUSSAC'sche fleschje.

Nadat de eerste twee reeksen van onderzoekingen waren afgeloopen, wilde ik mij van de homogeneïteit der gebezigde vloeistof overtuigen, door deze nogmaals aan gefractioneerde destillatie bloot te stellen en op die wijze in twee ongeveer gelijke deelen te scheiden en van elk gedeelte op nieuw de densiteit te bepalen. Ik vond toen verschillen, verscheidene eenheden in de 4e decimaal bedragende, die mij, vooral in verband met de steeds toenemende densiteit van de boven 57° C. *) overgekomen gedeelten van het oorspronkelijke praeparaat tot het vermoeden leidden, dat de onderzochte diaethylamine niet geheel zuiver was geweest en geringe hoeveelheden van een of meer bestanddeelen bevatten moest.

Ten einde omtrent den aard van deze in geringe hoeveelheid aanwezige verontreinigingen tot eenige zekerheid te geraken, en in elk geval in het bezit te komen van een zuiverder praeparaat, bereidde ik uit de vereenigde hoeveelheid van de tusschen 55° en 60° C. overgekomen vloeistoffen een neutraal oxalaat, scheidde de kristallen, die zich na het uitdampen en bekoelen van de geconcentreerde waterige oplossing afscheidden, en die ongeveer $^3/_4$ van de basis bevatten, door middel van de BUNSEN'sche filtreerpomp van de moederloog. Uit de gedroogde kristallen en uit de verder uitgedampte moederloog, ieder afzonderlijk, werd nu door kali de basis weder afgescheiden en deze na lang staan op kali en kalk, gedestilleerd. Het bleek nu, dat de beide aldus verkregene vloeistoffen in densiteit op 1 tot 2 eenheden in de 4e decimaal na overeenkwamen en daaruit trek ik het besluit,

---

*) N°. 1 : 0.7291.
N°. 2 : 0.7304.
N°. 3 : 0.7319.

dat de verontreiniging, die bij de aanvankelijk gedane bepalingen de densiteit van mijne diaethylamine had verhoogd. niets anders kon geweest zijn, dan een weinig water.

De door lang staan op kali gedroogde vloeistof werd nu weder aan gefractioneerde distillatie blootgesteld; het grootste deel van het vocht ging nu bij een barometerstand van 789mm over tusschen 55°.3 en 55°.6. Dit vocht diende tot het uitvoeren van de later te vermelden 3e reeks van densiteitsbepalingen.

Eerst later, toen ik meer en meer de ervaring had opgedaan, dat diaethylamine zeer hygroscopisch is, heb ik dit product nog eens langzaam en in een waterbad van 55° C. gerectificeerd over eene groote hoeveelheid versch gesmolten natron, dat voor een deel buiten de vloeistof uitstak. Met het $^7/_8$ eerst overgekomen deel van dit praeparaat zijn de bepalingen der 4e reeks verricht.

De 5e en 6e reeks, die meer bepaald als controle van de 4e reeks werden ondernomen, zijn met hetzelfde vocht uitgevoerd.

Ten aanzien van het kookpunt van zuivere diaethylamine meen ik de opmerking te moeten maken, dat HOFMANN dit zonder twijfel iets te hoog heeft aangegeven (57°.7 C.). Zijn praparaat is waarschijnlijk waterhoudend geweest.

Ik bepaalde het kookpunt verscheidene malen bij versch gedroogde diaethylamine met behulp van een thermometer van ALVERGNIAT met even beneden 50° C. liggend kwikreservoir, zoodat de geheele kwikkolom in de damp der vloeistof was gedompeld. Na correctie voor de fouten van den thermometer vond ik zoodoende voor het kookpunt bij 759mm. barometerstand 55°.5 C.

Zooals boven reeds is vermeld, heb ik ter bepaling van de densiteit bij verschillende temperaturen gebruik gemaakt van een zoogenaamd GAY-LUSSAC'sch fleschje. Dit kleine toestelletje bestond uit een nagenoeg cilindervormig, van onder eenigzins rond toeloopend vat, van ongeveer 10 C.C. inhoud, van boven eindigende in eene nauwe buis van ongeveer 2

cent. lengte, die zich van boven tot een trechtervormig reservoir verwijdde, dienende om de bij verhooging van temperatuur zich uitzettende vloeistof op te nemen. Op het midden der nauwe buis was als merk voor het volumen een fijn kringetje in het glas geëtst; het toestelletje kon door een goed ingeslepen stop worden gesloten.

Bij gebruik van dit werktuig heeft men, in vergelijking met een Geissler'schen pyknometer het nadeel, dat men zich niet onmiddellijk van de gelijkheid van temperatuur in en buiten het vat overtuigen kan, maar aan den anderen kant heeft men geene vrees te koesteren voor merkbare verdamping van vloeistof gedurende den tijd, benoodigd om den toestel te verwarmen of af te koelen tot de temperatuur van het lokaal, waarin de wegingen zullen worden uitgevoerd.

Volgens mijne ervaring is het eerstgenoemde bezwaar niet zoo groot als men zou vermoeden en is het bij eenige zorg zeer goed mogelijk, zich door den stand van de vloeistof in den hals van het fleschje te overtuigen, of zij de standvastige temperatuur van het waterbad, waarin het zich bevindt, reeds heeft aangenomen.

Dat ik deze wijze van doen heb verkozen boven het gebruik van dilatometers, zooals die door Pierre en Kopp bij hunne onderzoekingen over de uitzetting van vloeistoffen zijn gebezigd, ligt daaraan, dat ik sedert lang de stellige overtuiging heb verkregen, dat men bij de noodige zorg voor het nauwkeurig calibreeren der toestellen met water, vooral wanneer dit niet behoeft te geschieden voor temperaturen, ver boven 50° C. gelegen, zeer nauwkeurige waarnemingen kan verrichten en ontheven is van het blootstellen der toestellen aan eene zeer hooge temperatuur (zooals bij het uitkoken der dilatometers met kwik), dat mij uit de ervaringen omtrent de allengs tot stand komende volumen-veranderingen van glazen toestellen steeds bedenkelijk voorkomt.

Ik ben het alzoo in dit opzicht niet eens met Isidore Pierre, waar hij zegt (*Ann. de Ch. et de Phys.* IV, T. XV, p. 330):

»Cette methode offrirait cependant de grandes difficultés »pour les observations courantes, parce qu'il serait très-dif-

»ficile de maintenir la température ambiante suffisamment »longtemps constante, pour que la température du liquide, »contenu dans l'appareil fût parfaitement uniforme. Cette »méthode présente néanmoins de grands avantages pour les »températures, que l'on peut maintenir constantes aussi long- »temps que l'on veut, comme la température de la glace »fondante, celle de l'eau bouillante, etc."

Naar mijne ervaring zijn bij den langwerpigen vorm der fleschjes van GAY-LUSSAC de bezwaren van PIERRE overdreven, vooral bij het onderzoek van vloeistoffen, die de warmte gemakkelijk geleiden; en daartoe behooren, in vergelijking met water, de meeste organische verbindingen. Binnen den tijd van weinige minuten heeft het fleschje met vloeistof de temperatuur van het omringende waterbad aangenomen.

Omtrent de wijze, waarop, zoowel bij het calibreeren van het GAY-LUSSAC'sche fleschje, als bij het bepalen van de densiteit van diaethylamine werd te werk gegaan, veroorloof ik mij, het volgende op te merken:

Ter bereiking van eene temperatuur van 0^0 C. werd het fleschje tot over het merk met vloeistof gevuld, in eene diepe porceleinen met fijngestooten ijs gevulde zeef geplaatst en wel zoo dat het ijs, nagenoeg tot aan het merk reikte; het door smelting verkregen water kon door de openingen der zeef in een onderstaand vat afloopen. Wanneer het fleschje een kwartier in deze omgeving had verkeerd, werd de overmaat van vloeistof die boven het merk stond, eerst door eene pipet met fijne spits en voorts door haarbuisjes weggezogen, tot dat het vocht op het merk kwam; daarna werd nu nog een kwartier gewacht en nagegaan of de stand van de vloeistof intusschen niet was veranderd. Dit was in den regel het geval niet; bij uitzondering moest door toevoegen van een weinig vloeistof uit een gevuld haarbuisje het niveau op de juiste hoogte worden gebracht.

Voor densiteits-bepalingen bij temperaturen, gelegen tusschen 0^0 en 20^0 C. werd gebruik gemaakt van een waterbad, dat gedurende geruimen tijd in een lokaal had gestaan, waarvan de temperatuur gedurende den wintertijd door harder of zachter stoken nagenoeg op de verlangde hoogte werd ge-

houden; kleine wisselingen van temperatuur in het waterbad konden worden ontgaan door toevoegen van kouder of warmer water onder gestadig roeren. Overigens werd, ook bij de densiteits-bepalingen op hoogere temperatuur gehandeld, zooals hierboven ten aanzien van de waarnemingen bij 0^0 C. is beschreven.

Moeilijker was het, eene standvastige temperatuur te verkrijgen, gelegen tusschen 20^0 en 55^0 C. Het best slaagde ik daarin op de volgende wijze.

Op een waterbad met standvastig niveau, bedekt met een stel van porceleinen ringen werd een laag cilindrisch vat geplaatst van ongeveer 500 C.C. inhoud. Hierin werd een hooger bekerglas gezet van veel geringeren diameter, hebbende een inhoud van ongeveer 400 C.C. doch slechts tot $^3/_4$ met water gevuld. Hierin stond het fleschje, juist tot aan het merk ondergedompeld. In het buitenste vat, dat onmiddellijk op het waterbad stond, werd nu zooveel water gegoten, dat dit ongeveer tot de helft aan de hoogte der waterkolom in het bekerglas reikte. Door het aanbrengen van eene kleinere of grootere gasvlam onder het waterbad kon nu na eenig tasten en zoeken eene temperatuur van het water in het binnenste vat verkregen worden, die bij gestadig roeren vrij lang (15 minuten en langer) standvastig bleef.

In enkele gevallen, waarin nog kleine wisselingen van temperatuur konden worden waargenomen, werd door toevoeging van koud of warm water daaraan tegemoet gekomen. Het was niet moeielijk op die wijze de temperatuur binnen het verloop van $^1/_{20}{}^0$ C. standvastig te houden.

Ter bepaling van de temperatuur werd bij de 3e en volgende reeksen van proeven gebruik gemaakt van een gecalibreerden thermometer van H. W. GEISSLER te Berlijn, in vijfde graden verdeeld, en waarin de kwikzuil voor eene rijzing van 1^0 temperatuur een afstand doorliep van $3^1/_2$ mil-

limeter, zoodat het gemakkelijk was, de temperatuur der waterbaden tot op $^1{}_{20}{}^0$ C. (de grens van nauwkeurigheid, die ik bij mijne proeven heb trachten te bereiken) te bepalen. Deze thermometer was vergeleken met een uitstekenden thermometer van Baudin (N^0. 4582) te Parijs, waarvan het beloop door mijn geachten ambtgenoot Snijders zorgvuldig was nagegaan, en binnen de grenzen van hoogstens ± 0.02^0 volkomen juist was bevonden. Het spreekt van zelf, dat de hierna volgende opgaven omtrent temperatuur voor de fouten van den thermometer (na bepaling van de punten 0^0 en 100^0) zijn verbeterd.

Ten aanzien van het calibreeren van het door mij gebezigde fleschje mag worden vermeld, dat als densiteiten van water tusschen 0^0 en 100^0 C. zijn gebezigd de cijfers, waarvan vroeger door mijn vriend Hoek en mij is gebruik gemaakt bij onze onderzoekingen omtrent den brekings-aanwijzer van vloeistoffen bij verschillende temperaturen (*Recherches zur la quantité d'éther, contenu dans les liquides*, la Haye. Nijhoff 1864) en die uit de gezamenlijke waarnemingen der meest betrouwbare waarnemers zijn afgeleid.

Eindelijk acht ik mij verplicht, ten aanzien van de door mij gevolgde wijze van werken nog het volgende op te merken.

Het is duidelijk, dat men den pyknometer met vloeistof, nadat hij de temperatuur van de omgeving heeft aangenomen en door het wegnemen van de overmaat van vloeistof juist tot het merk is gevuld, in de meeste gevallen niet dadelijk kan wegen; immers heeft hij eene temperatuur lager dan die van de om de balans aanwezige lucht, zoo verdicht zich allicht waterdamp tegen zijn buitenoppervlak; en is hij daarentegen warmer, dan kunnen de wegingen onjuist worden door de verlenging van den eenen arm der balans ten gevolge van uitstraling van het glas en het opstijgen van warme lucht.

Om aan deze bezwaren te gemoet te komen en zooveel mogelijk verdamping te vermijden, heb ik getracht, het onmiddellijk na de waarneming met den stop gesloten fleschje door het plaatsen in een grooten voorraad water van de tem-

peratuur der kamer, zoo snel mogelijk deze laatste te laten aannemen. Verlies door verdamping heeft men hierbij bij vloeistoffen zooals diaethylamine, die minder vluchtig zijn dan aether niet te vreezen, maar men heeft somtijds te kampen met een ander bezwaar, vooral wanneer de toestel eensklaps van eene vrij hooge temperatuur op eene betrekkelijk lage wordt gebracht; namelijk, dat het volumen van het fleschje en zijn dilatatie-coëfficiënt kunnen veranderen; zoodat het noodzakelijk is, zich na elke reeks van bepalingen te overtuigen, of dit inderdaad heeft plaats gehad of niet, door den pyknometer op nieuw door weging met water bij verschillende temperaturen te calibreeren.

Bij het GAY-LUSSAC'sche fleschje, dat ik heb gebezigd, deed zich dit verschijnsel aanvankelijk voor, maar later, nadat het bij eene reeks van bepalingen was gebezigd en daarbij allerlei, soms plotselinge afwisselingen van temperaturen had doorstaan, bleef het volumen standvastig voor dezelfde temperatuur. Dezelfde ervaring heb ik vroeger bij gelegenheid van densiteitsbepalingen van aether bij andere pyknometers opgedaan.

Merkwaardig is het daarbij, dat de uitzetting van vele door mij in dit opzicht onderzochte toestellen, evenredig is aan de temperatuursverhooging, van andere daarentegen niet, zoodat men om het volumen van deze laatste voor te stellen zijne toevlucht moet nemen tot eene formule van den vorm: $V^t = V^0 + a\,t + b\,t^2$; voorts dat sommige pyknometers blijken, dadelijk onveranderlijk te wezen, andere daarentegen zeer gevoelig te zijn voor tijdelijke temperatuursveranderingen. Trouwens hetgeen ik hier vermeld, strookt geheel met de ervaring, die men omtrent de uiteenloopende en somtijds grillige gedragingen van thermometers heeft opgedaan *).

---

*) Waarschijnlijk zal deze tijdelijke verandering van volumen bij dilatometers eveneens moeten voorkomen en des te meer, naarmate ze aan hooger temperaturen (zooals bij het uitkoken met kwik) zijn blootgesteld geweest. Het komt mij voor, dat deze bron van fouten bij densiteitsbepalingen niet altijd genoeg is in het oog gehouden.

Ik ga thans over tot de vermelding van de uitkomsten bij het door mij verrichte onderzoek verkregen.

Het gemakkelijkst zijn deze te overzien uit eene tabel, waarvan de 1e kolom de gecorrigeerde temperaturen, de 2e de onmiddellijk uit de waarneming afgeleide densiteiten, de 3e de uit de formule voor het volumen afgeleide densiteiten en de 4e de verschillen tusschen de waargenomen waarden in eenheden van de 5e decimaal bevatten.

De formule voor het volumen werd bij de 3e en 4e reeks, waaraan ik zelf, wegens de meerdere daaraan bestede zorg, de meeste waarde toeken, opgemaakt uit eenige densiteitsbepalingen bij 0^0, $\pm 18^0$ C., $\pm 36^0$ en $\pm 54^0$ (in de navolgende tabellen door een texthaakje aangeduid). De gemiddelden uit de vier verkregen reeksen van cijfers werden op 0^0, 18^0, 36^0 en 54^0 gereduceerd en uit deze vier waarden de coëfficiënten a, b en c uit de formule $V^t = V^0 (1 + at + bt^2 + ct^3)$ berekend.

Bij de berekening van de uitkomsten der 1e en 2e reeks heb ik ondersteld, dat de densiteit binnen de grenzen van temperatuur, waarbij ik waarnam, gelijkmatig afnam. Uit het later te geven overzicht zal blijken, dat men in deze onderstelling geene zeer groote afwijkingen vindt met de densiteiten, die uit de 3e en 4e reeks voortgevloeide formule zijn berekend.

EERSTE REEKS.

FORMULE VOOR HET VOLUMEN

$$V^t = 0^0 (1 + 0.001511\, t)$$

berekend uit de waarnemingen bij 0⁰ en bij 34⁰.2, 36⁰ en 39⁰.7

T.	D waargenomen.	D berekend.	W—B.
0⁰ C.	0.72774	0.72776	— 2
0⁰ »	0.72778	0.72776	+ 2
9⁰.6 »	0.71769	0.71774	+ 5
11⁰.0 »	0.71592	0.71630	— 38
12⁰.0 »	0.71561	0.71525	+ 36
16⁰.0 »	0.71123	0.71108	+ 15
16⁰.8 »	0.71050	0.71025	+ 25
17⁰.2 »	0.71006	0.70983	+ 23
18⁰.0 »	0.70934	0.70900	+ 34
23⁰.4 »	0.70338	0.70337	+ 1
27⁰.2 »	0.69951	0.69941	+ 10
29⁰.4 »	0.69714	0.69712	+ 2
34⁰.2 »	0,69222	0.69212	+ 10
34⁰.2 »	0.69204	0.69212	— 8
34⁰.3 »	0.69199	0.69201	— 2
36⁰.0 »	0.69034	0.69024	+ 10
36⁰.0 »	0.69026	0.69024	+ 2
39⁰.7 »	0.68629	0.68638	— 9

Uit de berekende formule worden de volgende waarden voor de volumina en densiteiten bij temperaturen tusschen 0⁰ en 40⁰ C. afgeleid:

T.	V.	△
0⁰ C.	1.00000	756
5⁰ »	1.00756	755
10⁰ »	1.01511	756
15⁰ »	1.02267	755
20⁰ »	1.03022	756
25⁰ »	1.03778	755
30⁰ »	1.04533	756
35⁰ »	1.05289	755
40⁰ »	1.06044	

T.	D.	△
0⁰ C.	0.72776	521
5⁰ »	0.72255	521
10⁰ »	0.71734	521
15⁰ »	0.71213	521
20⁰ »	0.70692	521
25⁰ »	0.70171	521
30⁰ »	0.69640	521
35⁰ »	0.69129	522
40⁰ »	0.68607	

TWEEDE REEKS.

FORMULE VOOR HET VOLUMEN

$$V^t = V^0 (1 + 0.0015195\, t)$$

berekend uit de waarnemingen bij 0° C. en 36°.4 en 36°.5

T.	D waargenomen.	D berekend.	W—B.
0° C.	0.72804	0.72809	— 5
0° »	0.72804	0.72809	— 5
0° »	0.72814	0.72809	+ 5
0° »	0.72814	0.72809	+ 5
5°.7 »	0.72202	0.72212	— 10
6°.0 »	0.72197	0.72180	+ 17
10°.0 »	0.71790	0.71761	+ 29
12°.3 »	0.71523	0.71520	+ 3
13°.8 »	0.71391	0.71362	+ 29
14°.9 »	0.71232	0.71247	— 15
19°.8 »	0.70754	0.70733	+ 21
36°.4 »	0.68982	0.68988	— 6
36°.5 »	0.68993	0.68987	+ 6

Uit de berekende formule worden de volgende waarden voor de volumina en de densiteiten bij temperaturen tusschen 0° en 40 C. afgeleid:

T.	V.	△
0° C.	1.00000	
		760
5° »	1.00760	
		760
10° »	1.01520	
		759
15° »	1.02279	
		760
20° »	1.03039	
		760
25° »	1.03799	
		760
30° »	1.04559	
		759
35° »	1.05318	
		760
40° »	1.06078	

T.	D.	△
0° C.	0.72809	
		524
5° »	0.72285	
		524
10° »	0.71761	
		524
15° »	0.71237	
		524
20° »	0.70712	
		524
25° »	0.70188	
		524
30° »	0.69664	
		524
35° »	0.69140	
		524
40° »	0 68616	

DERDE REEKS *).

FORMULE VOOR HET VOLUMEN:

$$V^t = V^0(1 + 0.0014013\,t + 0.00000341\,t^2 - 0.0000000311\,t^3)$$

berekend uit de waarnemingen bij ± 0°, ± 18°, ± 36 en ± 54.

T.	D waargenomen.	D berekend	W—B.
0° C.	0.72741	0.72740	+ 1
0° »	0.72744	0.72740	+ 4
0° »	0.72754	0.72740	+ 14
0° »	0.72741	0.72740	+ 1
0° »	0.72733	0.72740	— 7
0° »	0.72724	0.72740	— 16
6°.9 »	0.72021	0.72031	— 10
7°.3 »	0.71985	0.71990	— 5
13°.6 »	0.71335	0.71332	+ 3
14°.2 »	0.71295	0.71271	+ 24
18°.0 »	0.70863	0.70874	— 9
18°.0 »	0.70879	0.70874	+ 5
18°.4 »	0.70841	0.70832	+ 9
18°.5 »	0.70805	0.70822	— 17
19°.0 »	0.70772	0.70770	+ 2
23°.0 »	0.70342	0.70353	— 11
27°.5 »	0.69823	0.69869	— 46
29°.3 »	0.69617	0.69618	— 1
30°.4 »	0.69562	0.69559	+ 3
35°.3 »	0.69023	0.69039	— 16
35°.75 »	0.68972	0.68992	— 20
35°.8 »	0.69003	0.68985	+ 18
36°.3 »	0.68942	0.68933	+ 9
36°.4 »	0.68918	0.68923	— 5
37°.0 »	0.68880	0.68857	+ 23
42°.4 »	0.68294	0.68279	+ 15
43°.6 »	0.68138	0.68151	— 13
45°.3 »	0.67966	0.67968	— 2
46°.7 »	0.67845	0.67821	+ 24
53°.2 »	0.67127	0.67118	+ 9
54°.0 »	0.67034	0.67032	+ 2
54°.0 »	0.67022	0.67032	— 10
54°.8 »	0.66944	0.66946	— 2

*) Bij het begin van deze reeks van bepalingen werden het volumen en

Uit de berekende formule worden de volgende waarden voor de volumina en densiteiten bij temperaturen tusschen 0° en 55° C. afgeleid.

T.	V.	Δ
0° C.	1.00000	
		709
5° »	1.00709	
		726
10° »	1.01435	
		743
15° »	1.02178	
		759
20° »	1.02937	
		775
25° »	1.03712	
		791
30° »	1.04503	
		806
35° »	1.05309	
		822
40° »	1.06131	
		837
45° »	1.06968	
		851
50° »	1.07820	
		867
55° »	1.08687	

T.	V.	Δ
0° C.	0.72740	
		512
5° »	0.72228	
		517
10° »	0.71711	
		522
15° »	0 71189	
		524
20° »	0.70665	
		528
25° »	0.70137	
		531
30° »	0.69606	
		533
35° »	0.69073	
		535
40° »	0.68538	
		536
45° »	0.68002	
		538
50° »	0.67464	
		538
55° »	0.66926	

---

de uitzettings-coëfficiënt van het fleschje op nieuw bepaald en toen gevonden, dat deze veranderd waren. Ik vond nu voor het volumen van het fleschje $V^t = 9.9446 + 0.000158\,t$ als resultaat van 17 bepalingen, waarbij de grootste afwijking tusschen berekende en gevondene waarden 0.0024 C.C. en de gemiddelde afwijking 0.0005 C.C. bedroeg.

Om allen twijfel omtrent deze verandering van volumen weg te nemen, merk ik op, dat het volumen 9.9525, zooals het bij het begin van de 3e reeks voor eene temperatuur van 50° C. werd gevonden, aanvankelijk overeenkwam met een temp. van 25° C. —, voorts dat bij herhaald onderzoek na het voltooien van de 3e, 4e, 5e en 6e reeks mijner bepalingen dit verschijnsel zich *niet meer* heeft voorgedaan; aan fouten van de proef valt hier derhalve in geen geval te denken.

VIERDE REEKS.

BEREKENDE FORMULE VOOR HET VOLUMEN:

$$V^t = V^0(1 + 0.001398t + 0.000002702\,t^2 + 0.0000001226\,t^3)$$

T.	D waargenomen.	D berekend.	W—B.
0° C.	0.72624	0.72628	— 4
0° »	0.72631	0.72628	+ 3
0° »	0.72627	0.72628	— 1
0° »	0.72628	0.72628	0
14°.4 »	0.71141	0.71153	— 12
16°.8 »	0.70910	0.70904	+ 6
17°.75 »	0.70802	0.70805	— 3
17°.85 »	0.70796	0.70794	+ 2
17°.9 »	0.70789	0.70790	— 1
18°.0 »	0.70772	0.70780	— 8
18°.8 »	0.70702	0.70697	+ 5
24°.0 »	0.70135	0.70153	— 18
29°.3 »	0.69600	0.69594	+ 6
33°.8 »	0.69124	0.69115	+ 9
35°.55 »	0.68921	0.68930	— 9
35°.85 »	0.68885	0.68897	— 12
36°.2 »	0.68875	0.68859	+ 16
37°.9 »	0.68675	0.68677	— 2
42°.0 »	0.68239	0.68235	+ 4
47°.4 »	0.67649	0.67637	+ 12
48°.8 »	0.67503	0.67493	+ 10
53°.0 »	0.67058	0.67030	+ 28
53°.6 »	0.66950	0.66964	— 14
53°.8 »	0.66914	0.66941	— 27
54°.4 »	0.66880	0.66875	+ 5
54°.4 »	0.66881	0.66875	+ 6

Uit de formule voor het volumen worden de volgende waarden voor de volumina en de densiteiten tusschen 0⁰ en 55⁰ afgeleid:

T.	V.	Δ
0⁰ C.	1.00000	706
5⁰ »	1.00706	720
10⁰ »	1.01426	736
15⁰ »	1.02162	752
20⁰ »	1.02914	769
25⁰ »	1.03683	788
30⁰ »	1.04471	806
35⁰ »	1.05277	826
40⁰ »	1.06103	847
45⁰ »	1.06950	869
50⁰ »	1.07819	892
55⁰ »	1.08711	

T.	D.	Δ
0⁰ C.	0.72628	510
5⁰ »	0.72118	511
10⁰ »	0.71607	516
15⁰ »	0 71091	519
20⁰ »	0.70572	524
25⁰ »	0.70048	528
30⁰ »	0.69520	532
35⁰ »	0.68988	537
40⁰ »	0.68451	542
45⁰ »	0.67909	548
50⁰ »	0.67361	552
55⁰ »	0.66809	

VIJFDE EN ZESDE REEKS.

De ervaring door mij opgedaan ten aanzien van de hygroscopiciteit van diaethylamine, boezemde mij eenige vrees in, dat bij de voorgaande bepalingen niettegenstaande de genomen voorzorgen, toch nog fouten waren begaan, doordien de diaethylamine gedurende den loop van het onderzoek door het telkens openen en sluiten van het GAY-LUSSAC'sche fleschje, waterdamp uit de lucht had opgenomen.

Ten einde te beslissen, in hoeverre deze vrees gegrond was, deed ik nog twee reeksen van slechts 4 bepalingen, bij temperaturen liggende nabij 0⁰, 18⁰, 36⁰ en 54⁰ en wel de eene bij stijgende de andere bij dalende temperaturen. Deze beide reeksen konden ieder op één dag worden uitgevoerd en voor

opname van waterdamp was weinig te vreezen, omdat slechts enkelen malen de stop van het fleschje behoefde te worden afgelicht.

De uitkomsten waren de volgende:

5e Reeks. Bij opgaande temperaturen.		6e Reeks. Bij dalende temperaturen.	
T.	D.	T.	D.
0° C.	0.72648	0° C.	0.72659
19°.2 »	0.70675	18°.0 »	0.70813
34°.2 »	0.69097	36° »	0.68916
53°.8 »	0.66962	54°.4 »	0.66908

Reduceert men de laatste drie waarnemingen op 18°, 36° en 54° met behulp van de vroeger gevondene verschillen voor 1° C. zoo verkrijgt men:

5e Reeks.		6e Reeks.	
0° C.	0.72648	0° C.	0 72659
18° »	0.70800	18° »	0.70813
36° »	0.68906	36° »	0.60916
54° »	0.66940	54° »	0.66952

Vergelijkt men deze uitkomsten met die, welke bij de vierde reeks waren verkregen, zoo ontwaart men, dat de ververschillen tusschen de densiteiten bij de vier aangegeven temperaturen nagenoeg gelijk zijn. Er is tusschen de cijfers van de 5e en 4e reeks een verschil van ongeveer 2 eenheden

en tusschen die van de 6e en 4e reeks van 3 eenheden in de vierde decimaal, hetgeen zonder twijfel moet toegeschreven worden aan opname van waterdamp gedurende den tijd (ongeveer 17 uur) dat het ter onderzoeking dienende vocht in het GAY-LUSSAC'sche fleschje aan zichzelf was overgelaten.

Ten slotte meen ik dus de bij de 4e reeks verkregen cijfers als de meest betrouwbare te mogen aannemen.

Eenige densiteits-bepalingen, later bij 0° C door mij met over versch gesmolten natrium-hydroxyd gedestilleerd diaethylamine verricht, gaven de volgende uitkomsten:

	0.72619
	0.72624
	0.72625
Midden	0.72623

een cijfer dat met het vroeger door mij gevondene zeer na overeenstemt. Nemen wij, slechts 4 decimalen bij de opgave der densiteiten bezigende, het cijfer 0.7262 voor de densiteit bij 0° C. aan, reduceeren wij de vroeger gevondene cijfers voor de densiteit bij 0° C. tot dit getal, zoo verkrijgen wij het volgende overzicht van de bij de onderscheidene reeksen verkregen uitkomsten;

T.	1e Reeks.	2e Reeks.	3e Reeks.	4e Reeks.	5e Reeks.	6e Reeks.
0° C.	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262	0.7262
5° 〃	0.7210	0.7210	0.7210	0.7211		
10° 〃	0.7158	0.7158	0.7159	0.7160		
15° 〃	0.7106	0.7106	0.7107	0.7108		
18° 〃	0.7074	0.7074	0.7076	0.7077	0.7077	0.7077
20° 〃	0.7054	0.7053	0.7055	0.7056		
25° 〃	0.7002	0.7001	0.7002	0.7004		
30 〃	0.6949	0.6948	0.6948	0.6951		
35° 〃	0.6896	0.6895	0.6895	0.6898		
36° 〃	0.6887	0.6884	0.6884	0.6887	0.6888	0.6888
40° 〃	0.6845	0.6843	0.6842	0.6844		
45° 〃			0.6788	0.6790		
50° 〃			0.6734	0.6735		
54° 〃			0.6690	0.6691	0.6691	0.6692
			0.6681	0.6680		

waaruit als waarschijnlijkste waarde voor de densiteit van diaethylamine bij temperaturen van 0°—55° C. het volgende mag worden afgeleid:

T.	D.	Δ
0° C.	0.7262	51
5° »	0.7211	52
10° »	0.7159	52
15° »	0.7107	52
20° »	0.7055	53
25° »	0.7002	53
30° »	0.6949	52
35° »	0.6897	53
40° »	0.6844	54
45° »	0.6790	55
50° »	0.6735	55
55° »	0.6680	

IETS OVER HET VERBAND

TUSSCHEN

PHANEROGAMEN EN CRYPTOGAMEN.

DOOR

M. TREUB.

Toen HOFMEISTER in 1851 zijne beroemde *Vergleichende Untersuchungen* in het licht gaf, bleek het dat door hem overgangen waren gevonden tusschen de beide hoofdgroepen van het plantenrijk: de Cryptogamen en de Phanerogamen. Dat onder de laatsten de Gymnospermen het eenvoudigst en laagst georganiseerd zijn, wist men; doch dat de kiemzak der Gymnospermen niets anders is dan eene macrospore, welke een prothallium en archegoniën voortbrengt, had niemand vermoed.

Met weinige woorden zij het gewicht van HOFMEISTER's ontdekking in herinnering gebracht.

De hoogere- of Vaatcryptogamen vertoonen allen eene duidelijke generatie-wisseling. De eene wissel-generatie, de grootste, draagt geene geslachtswerktuigen, doch brengt, op ongeslachtlijken weg, voortplantings-organen, »sporen", voort. De andere wissel-generatie, het »prothallium", uit de kieming eener spore ontstaan, draagt de geslachts-organen. Bij een groot deel der Vaatcryptogamen komen zoowel de mannelijke geslachtsorganen, de »antheridiën", als de vrouwelijke, de »archegoniën", aan een zelfde prothallium voor. Bij anderen worden zij voortgebracht aan verschillende prothalliën, gesproten uit, voor het oog, gelijke sporen. Bij eene derde groep van Vaatcryptogamen eindelijk, is de arbeids-

verdeeling nog een stap verder gegaan, en openbaart zij zich aan de sporen zelven. In »microsporangiën" ontstaan dan, in grooten getale, »microsporen", die de mannelijke prothalliën leveren. In »macrosporangiën" komen slechts weinige, soms ééne, der vele aangelegde »macrosporen" tot ontwikkeling; »macrosporen", welke vrouwelijke prothalliën voortbrengen, die veelal zoo weinig ontwikkeld zijn, dat zij, aan de afgevallen macrospore, ter nauwernood uit eene spleet te voorschijn komen, niet meer dan juist noodig is om hunne archegoniën aan den invloed van spermatozoïden bloot te stellen.

Bij de Gymnospermen nu, de laagsten der Phanerogamen, scheiden de beide wissel-generatiën zich niet meer van elkander; de macrospore, dáár »kiemzak" genoemd, valt niet af; zij blijft met de geslachtlooze generatie verbonden, ontwikkelt dáár haar prothallium en doet hare archegoniën rijpen, nadat zij bevrucht zijn geworden. Dit feit te hebben aangetoond en er de beteekenis van te hebben begrepen, is de groote verdienste van Hofmeister.

Nadat eene zoo belangrijke overeenkomst tusschen Cryptogamen en Phanerogamen ontdekt was, trachtte men andere punten van overeenkomst, welke daaruit schenen te moeten volgen, op te sporen, ten einde zich eene voorstelling te vormen van de wijze, waarop de Phanerogamen uit Cryptogamen ontstaan zouden kunnen zijn. Deze pogingen zijn, tot nog toe, vruchteloos gebleven. Wel heeft men vrij aannemelijke hypothesen opgesteld ter verklaring van dien belangrijksten aller ontwikkelingstrappen uit het Plantenrijk; nieuwe positieve gegevens echter zijn niet met zekerheid gevonden.

Terwijl de sporangiën der Vaatcryptogamen aan bladeren worden voortgebracht, óf als vrije gesteelde zakken, óf wel als celgroepen in het inwendige eener bladslip, ontstaat de macrospore (kiemzak) der Phanerogamen in een orgaan, waaraan men vroeger den weinig gelukkigen naam van »ovulum" heeft gegeven. Zulke »ovula", welke aan afzonderlijke bladeren, »vruchtbladen", worden voortgebracht, bestaan hoofdzakelijk uit een centraal gedeelte, »nucellus"

genoemd, en uit één of twee, zelden drie, mantels: de »integumenten", welke den nucellus omgeven en met hem in het onderste gedeelte van het ovulum samensmelten. De kiemzak biedt in zijne ontwikkeling, in de tot nog toe goed bekende gevallen, zoo weinig overeenstemming aan met de ontwikkelingswijze van de macrosporen der Cryptogamen, dat men er tot heden zelfs niet eenstemmig over denkt, wat bij de Phanerogamen als homologon van een sporangium behoort te gelden. Sommigen beschouwen als zoodanig het geheele ovulum, anderen weder alleen zijn nucellus. Of organen, met de integumenten homoloog, bij de Vaatcryptogamen voorkomen, wordt evenzeer verschillend beoordeeld.

Kortom, dat de Phanerogamen, en meer in het bijzonder hare lagere klasse: de Gymnospermen, *moeten* zijn afgestamd uit planten, welke in de belangrijkste punten veel op tegenwoordig levende Vaatcryptogamen geleken, blijkt duidelijk uit de overeenkomst van macrospore en kiemzak; *hoe* echter die afstamming geschiedt kan zijn, en *welke* de mogelijke tusschen-stadiën waren, weet men zich niet voor te stellen.

Slechts één nieuw feit, hetwelk eenig licht over die vragen scheen te zullen verspreiden, is vier jaar geleden bekend geworden. De Deensche botanist Warming merkte namelijk in jonge ovula van Cycadeeën op, dat de kortelings gevormde kiemzak er omgeven is door een aantal cellen, welke hem deden denken aan de moedercellen van sporen in een sporangium. Warming neemt dan ook aan, dat bij de Cycadeeën, behalve de éene zich ontwikkelende macrospore, nog andere, zich *niet* deelende, macrosporen-moedercellen aanwezig zijn. Hoe die groep van moedercellen zou ontstaan en op welke wijze de eenige macrospore zich begint te ontwikkelen, werd door hem niet aangegeven.

Warming's beschouwing had niet dien invloed, welke men er van zoude hebben mogen verwachten. De oorzaak daarvan lag hierin, dat de waarnemingen, waarop zij zich grondde, gering in aantal en niet geheel volledig waren, zoodat de vereischte waarborgen voor zekerheid ten deele ontbraken. Van die onvolledigheid mag allerminst den onderzoeker een verwijt worden gemaakt; zij vindt hare ver-

klaring geheel in de groote moeielijkheid, welke men in Europa heeft om zich de noodige voorwerpen voor zulk een onderzoek te verschaffen.

Zelf was ik in de gelegenheid, jonge vruchtbladen eener Cycadee: *Ceratozamia longifolia*, in alle gewenschte stadiën nauwkeurig te onderzoeken. Met het oog op de mededeeling van Warming, kwam mij dit onderzoek belangrijk voor; vooral daar a priori te zeggen is, dat, zoo er nog onbekende punten van overeenkomst met Cryptogamen te vinden zijn, deze zeker gezocht moeten worden bij de Cycadeeën, eene afdeeling der Gymnospermen, welke de laagsten van alle Phanerogamen bevat *).

Mijn onderzoek leerde mij het volgende: Aan elk jong schubvormig vruchtblad van *Ceratozamia longifolia*, ontstaan twee zijdelingsche lobben, welke uitgroeien in de richting van de as, welke het vruchtblad draagt. *Vóórdat er eenige uitwendige differentieering zichtbaar is*, scheidt zich *in* het weefsel van elk dier lobben, dicht onder de opperhuid, eene groep van cellen af, door eene scheidings-laag begrensd. Hoewel deze laag niet altijd even goed te volgen is, is de differentieering der celgroep, in haar geheel, in goed geslaagde praeparaten, niet twijfelachtig. *Die celgroep draagt, bij verdere ontwikkeling, alle kenmerken van een macrosporangium.* Groote cellen in het midden zijn de moedercellen van macrosporen. Eene dier moedercellen slechts levert eene macrospore. Daartoe deelt zij zich in drie boven elkander liggende cellen, van welke de onderste macrospore (kiemzak) wordt †). Die eenige zich ontwikkelende macrospore verbreedt zich en dringt de haar omringende macrosporen-moedercellen, welke platgedrukt en ten deele geresorbeerd worden, op zijde. Gedurende het grooter worden van de macrospore, blijft de groep van moedercellen, wier midden

*) Dat wil zeggen: die Phanerogamen, welke de meeste overeenkomst met Vaatcryptogamen vertoonen.

†) De kiemzak der Cycadeeën ontstaat dus uit zijne moedercel, op dezelfde wijze als bij de Phanerogamen in het algemeen. De eigenaardige deelingswijze van de macrosporen-moedercel der Cryptogamen is dus bij de Cycadeeën reeds verloren gegaan.

zij inneemt, scherp van het omringend weefsel gescheiden. Als de macrospore haar prothallium begint te ontwikkelen, is zij nog omringd door één of twee lagen cellen: het overblijfsel der groep van onontwikkelde macrosporen-moedercellen.

Warming's zienswijze, aan een gering aantal waarnemingen ontleend, blijkt juist te zijn. Het volledige materiaal, waarover ik te beschikken had, stelde mij in staat, alle gewenschte stadiën, van de jongsten af, te onderzoeken en alle bijzonderheden der ontwikkeling van het macrosporangium waar te nemen.

Kort *nadat* het macrosporangium zich, in eersten aanleg, heeft vertoond, ontstaat er op de slip van het vruchtblad, onmiddellijk boven het sporangium, eene kleine verhevenheid. Deze verhevenheid, welke zich later kegelvormig verheft, blijkt de »nucellus" te zijn. Tegelijkertijd groeit het weefsel van de vruchtbladslip, rondom den nucellus, tot een hem omhullenden mantel: het »integument", uit.

Dat nucellus en integument eerst beginnen te ontstaan *nadat* het macrosporangium is aangelegd, komt mij vooral belangrijk voor.

Als men aanneemt dat de door mij onderzochte *Ceratozamia*, wat de punten in quaestie betreft, als type der Cycadeeën kan gelden, hetgeen zeer waarschijnlijk of liever zoo goed als zeker is, dan kan dus het volgende worden gezegd:

Bij de Cycadeeën ontstaat IN *eene slip van het vruchtblad een macrosporangium, geheel op dezelfde wijze als een sporangium bij het Cryptogamen-geslacht Ophioglossum wordt gevormd.*

NA *den aanleg van het macrosporangium ontstaan twee nieuwvormingen op de vruchtblad-slip: eene kegelvormige — de nucellus — en eene mantelvormige — het integument.*

Het zoogenoemde ovulum bij de Cycadeeën bestaat dus eensdeels uit de sporangium-vormende slip van het vruchtblad, anderdeels uit de beide nieuwvormingen: nucellus en integument. Met een vrij, gesteeld, sporangium heeft dus dit ovulum geen enkel punt van overeenkomst.

Voor nucellus en integument bestaan bij de Cryptogamen

geen homologe organen; deze nieuwvormingen zijn te beschouwen als nieuwe adaptatie aan de veranderde wijze van bevruchting, bij welke stuifmeelbuizen in de plaats van spermatozoïden zijn getreden. De cryptogamische voorouders der Cycadeeën hadden macrosporangiën, welke zich *in* het bladweefsel ontwikkelden, en zich *niet* als vrije, gesteelde, zakken voordeden; in dat opzicht moeten die voorouders eenige gelijkenis met *Ophioglossum* hebben gehad.

De uitvoerige uiteenzetting mijner resultaten en bijbehoorende figuren maakt deel uit van een artikel, hetwelk, onder den titel van »Recherches sur les Cycadées'', in het tweede deel der *Annales du Jardin Botanique de Buitenzorg*, het licht zal zien. Tegelijk met deze kortere mededeeling, is het bedoelde artikel naar Europa ter perse gezonden.

In hoeverre de gemaakte gevolgtrekkingen ook voor de andere Gymnospermen geldig zijn; of zij ook op de opvatting van het ovulum der Angiospermen van invloed kunnen wezen; dit zijn vragen, voor wier bespreking ik de vrijheid neem naar mijne uitgewerkte verhandeling te verwijzen.

Buitenzorg, einde Maart 1881.

MIKROCHEMISCHE METHODEN

ZUR

MINERAL-ANALYSE

VON

Th. H. BEHRENS.

Einleitung.

1.

Wenn die Anzahl der mikrochemischen Reactionen, welche dem Mikroskopiker auf dem Gebiete der Petrographie zu Gebote stehen viel geringer und ihre Anwendung viel beschränkter ist als auf dem Felde der mikroskopischen Anatomie der Pflanzen und Thiergewebe, so ist die Ursache sicherlich nicht, dass für die Untersuchung der Gesteine von derartigen Methoden weniger Vortheil zu erwarten wäre. Könnte in Feldspath das Kalium und Calcium mit derselben Leichtigkeit und Schärfe nachgewiesen und die Quantität dieser Bestandtheile annähernd geschätzt werden wie dies für das Amylum mittelst Jod, für Cellulose mittelst Jod und Schwefelsäure möglich ist — wie sehr die Petrographie durch eine solche Untersuchungsmethode müsste gefördert werden, wird den meisten Mikroskopikern auf den ersten Blick einleuchten.

2.

Sehr früh ist man bemüht gewesen, die mikroskopischen Hülfsmittel zur Bestimmung von Gesteinsgemengtheilen zu

erweitern. Seine ersten Untersuchungen hat Zirkel in gewöhnlichem Licht ausgeführt; ein Jahr darnach sehen wir ihn von polarisirtem Licht Gebrauch machen, wieder einige Jahre später, 1868—1870 bringt er für seine mustergültigen Untersuchungen über die Basaltgesteine wiederholt Salzsäure in Anwendung um durch die zersetzende und auflösende Wirkung derselben Labrador von Oligoklas, Magnetit von Titaneisen zu unterscheiden.

Seitdem ist die Salzsäure das bevorzugte Reagens der Mikropetrographen, in den letzten Jahren allerdings ein wenig in Misscredit gekommen, weil man zu viel von ihr verlangte, ohne sich viel um die Concentration der Säure, die Temperatur, Dauer der Einwirkung und Controleversuche zu bemühen.

Im Wesentlichen hat man sich auf die Benutzung ihrer auflösenden und zersetzenden Wirkung beschränkt; nur ausnahmsweise wurde einem der Zersetzungsprodukte Beachtung gegönnt, so der Kohlensäure als Anzeichen von Calcit, dem Chlornatrium behufs Auffindung von Nephelin, der in gelatinöser Form färbungsfähigen Kieselsäure zur bequemen Auffindung von zersetzbaren Silikaten, wie Olivin, Chlorit u. dgl.

Von anderen mikrochemischen Reactionen sind aus den nächstfolgenden Jahren zu verzeichnen: die von Streng angegebene Anwendung des Fresenius'schen Reagens (Ammonium-Molybdat in Salpetersäure) auf Präparate in denen man Apatit vermuthet, die Färbung von Mineralien der Hauyngruppe durch Schwefeldampf nach der Methode von Knopp und Tinctionsversuche mit Fuchsinlösung an Opalen.

3.

Indessen die Anwendung chemischer Reactionen so geringe Fortschritte machte wurde eifrig an der Erweiterung optischer methoden gearbeitet. Aus der mikroskopischen Technik der Zoologen und Botaniker könnte die Verwendung farbengebender Gips- und Quarzplatten für Steigerung der Doppelbrechung, Orientirung der optischen Axen und Unterscheidung positiver und negativer Doppelbrechung fertig aus-

gebildet herübergenommen werden; dazu kam durch Tschermak (1869) die mikroskopische Untersuchung auf Dichroismus, anfangs mittelst der Haidinger'schen dichroskopischen Loupe, alsbald mittelst eines der beiden Nicols (am sichersten mittelst des unteren) und durch Descloizeaux' schöne Untersuchungen *) über die optischen Constanten der Feldspathe die Anpassung des Kobell'schen Stauroskops für mikroskopische Beobachtung. Den nunmehr ziemlich umfangreich gewordenen Beobachtungs-apparat brachte Rosenbusch in bequeme Form (1876) und verschaffte ihm durch sein mikrographisches Lehrbuch schnelle Verbreitung.

Optiker und Mechaniker kamen diesen Bestrebungen bereitwillig entgegen durch Construction von Schneide- und Schleifmaschinen, welche die Anfertigung durchscheinender Gesteinsplättchen zu einer weniger unangenehmen und zeitraubenden Arbeit machten und Durchschnitte nach bestimmten Richtungen zu nehmen erlaubten, sowie durch zweckmässige Einrichtung der Mikroskope und mikroskopischen Hülfsapparate. Hier sind vor allen zu nennen die Werkstätten von R. Fuess in Berlin, dessen Thätigkeit auf diesem Felde bahnbrechend gewesen ist, und der Gebrüder Seibert in Wetzlar.

4.

Für die Untersuchung nach optischen Methoden sind die Präparate geschickt, sobald sie vom überflüssigen Canadabalsam befreit sind und bleiben dafür geeignet, so lange man sie nur bewahren will. Alle Abänderungen der Untersuchung laufen auf leicht zu bewerkstelligende Abänderungen des optischen Apparats hinaus; an dem Object sind, ein zweckmässig construirtes Mikroskop vorausgesetzt, keine anderen Manipulationen, als Verschiebungen auf dem Objecttisch erforderlich.

Nimmt man hinzu, dass die mikroskopische Besichtigung,

---

*) Mehrere Memoiren in Comptes rendus und in Annales de chimie et de physique 1875 und 1876.

wie sie durch Sorby, Zirkel und Vogelsang ausgebildet war, in vielen Fällen binnen wenigen Minuten entscheidenden Aufschluss gab über Fragen, die an dem Handstück unmöglich gelöst werden konnten und dass die mikroskopischen Bilder von Gesteinspräparaten an Schärfe und Farbenpracht die von organischen Objecten vielfach übertreffen, so wird die Vorliebe, womit die optischen Methoden ausgebildet wurden, begreiflich. Es war reinliche Arbeit mit compendiösem Apparat, die ihr Object untersuchte und bestimmte, ohne etwas daran zu verderben, obendrein schnell und verhältnissmässig einfach auszuführen.

5.

Durch die Chemie war die Bestimmung der Mineralien nach formellen und physischen Eigenschaften, wie sie von Werner und Mohs zum System ausgebildet war aus ihrer gebietenden Stellung verdrängt worden; in der modernen Mikromineralogie und Mikropetrographie ist sie noch einmal zur Herrschaft gekommen mit mancherlei Eigenthümlichkeiten, theils vortheilhaften, theils auch nachtheiligen, die sich aus den Bedingungen ergeben, unter denen dünne Mineraldurchschnitte von zufälliger Richtung der Betrachtung unterliegen.

Völlig undurchsichtige Substanzen gehören für den Mikroskopiker zu den Ausnahmen; von häufiger vorkommenden sind nur drei zu nennen: Magneteisen, Titaneisen und Pyrit. Unebenheit der Flächen und Trübungen, die der Anwendung des Goniometers, des Polarisationsapparats und des Kobell'schen Stauroskops so oft im Wege stehen, werden im Dünnschliff beseitigt oder doch sehr vermindert. Spaltungsrichtungen, die sonst mit Hammer und Meissel aufgesucht werden mussten verrathen sich hier meistens auf den ersten Blick durch parallele Sprünge. Die »Einschlüsse" sind erst seit der Verbreitung des Mikroskops unter den Mineralogen Gegenstand eingehenden Studiums geworden. In gewissen Mineralien treten sie so constant auf, dass sie neue Species-Kennzeichen geliefert haben (Hauyn, Nosean, Leucit, Quarz, Granat).

Wo die optischen Hülfsmittel nicht dienen können befindet der Mikroskopiker sich der älteren Methode gegenüber im Nachtheil: den Mangel der schwierig oder gar nicht zu bestimmenden Kennzeichen der Härte und des specifischen Gewichts, die mangelhafte Beurtheilung von Glanz und Farbe, die unsichere Ableitung der Krystallformen aus zufälligen Durchschnitten, die unvollständige Kenntniss der chemischen Reactionen hat man durch die oben erwähnten Verfeinerungen und Erweiterungen der optischen Hülfsmittel auszugleichen gesucht.

Welche Erfolge die skizzirte Methode in den Händen geübter und scharfsinniger Beobachter geliefert hat, kann eine flüchtige Musterung der petrographischen Arbeiten der letzten fünfzehn Jahre lehren: sie haben nicht weniger als eine völlige Neugestaltung der Gesteinslehre herbeigeführt. Wie viel Uebung andererseits erforderlich ist, um zu einiger Sicherheit zu gelangen und wie viele Unsicherheiten, selbst bei sorgfältigster Arbeit, übrigbleiben, zumal wenn man mit älteren, von der Verwitterung bereits stark angegriffenen Gesteinen zu thun hat, weiss jeder, der sich einige Zeit mit Untersuchung von Dünnschliffen beschäftigt hat.

6.

Die Polarisationsapparate lassen sich nur in den Fällen für die Bestimmung des Krystallsystems verwenden, wo Spaltungsrichtungen oder scharf ausgeprägte Krystallumrisse die Orientirung der krystallographischen Hauptaxe ermöglichen. Bisweilen muss man lange suchen, bis dies gelingt. Bei der Untersuchung regulär krystallisirter und amorpher Substanzen lassen sie uns gänzlich im Stich; hier sind allein Unterschiede der Structur, der Durchsichtigkeit, der Färbung und im günstigsten Falle charakteristische Einschlüsse massgebend. Zu diesen misslichen Objecten gehört die »Grundmasse" sämmtlicher Gesteine von porphyrischer Structur. Nicht besser geht es mit den Verwitterungsproducten der älteren Feldspathe und Augite, die man als Saussurit und als Viridit aufgeführt findet und mit undurchsichtigen Massen

unbestimmter Form, wovon man die schwärzlichen als »Opacit", die röthlichen und bräunlichen als »Ferrit" bezeichnet hat, lauter Namen, die nur den Vortheil der Kürze vor vielen anderen Umschreibungen von »Weis ich nicht" voraus haben.

Mikrochemische Methoden.

7.

Gewiss ist schon manches mal der Wunsch aufgekommen, bei der Chemie Hülfe zu suchen, die in den Händen von Klaproth, Berzelius, Rammelsberg unschätzbare Dienste für die Unterscheidung und Classification der Mineralien geleistet hat, und ebenso gewiss wären wir bereits im Besitz eines Systems mikrochemischer Methoden für die Bestimmung der häufiger vorkommenden Mineralien, wenn dieselben für die Einwirkung von Reagentien nur annähernd so zugänglich wären wie die festesten organischen Gewebe. Morphologische Reagentien, welche durch Abänderung der Dichtigkeit wirken (Essigsäure für Zellkerne, Kali für Cuticularsubstanzen), sind hier, wegen fehlender Quellungsfähigkeit, gänzlich ausgeschlossen.

Tinctionsmethoden können nur in vereinzelten Fällen Anwendung finden, weil nur eine kleine Zahl von Mineralien die Fähigkeit besitzt, Farbstoffe aufzunehmen, und noch weniger dieselben festzuhalten vermögen. Maceration mit Säuren und Salzlösungen scheint mehr Erfolg zu versprechen, doch ist zur Zeit viel zu wenig von Versuchen in dieser Richtung bekannt, als dass sich darauf Trennungsmethoden gründen liessen. Die oben (1) erwähnten Aetzproben mit Salzsäure gehören hierher. Gewöhnlich wird die Probe an Gesteinspulver gemacht; dann sind ihre Ergebnisse schwierig zu beurtheilen und viele von den widersprechenden Angaben, durch welche dies Verfahren in Misscredit gekommen ist, dürften auf die Unklarheit und Ver-

worrenheit der mikroskopischen Bilder zurückzuführen sein, welche man bei seiner Anwendung erhält. In der bis jetzt gebräuchlichen Weise (als tropfbare Flüssigkeit) auf Schliffpräparate angewendet führt die Säure oft genug zu völliger Zerstörung derselben.

Es bleibt vor der Hand kaum etwas anderes übrig, als nach vollständiger Zersetzung einer Portion der Silikate, sei es auf begrenzten Partien der Schliffflächen, oder in ausgelesenen Splittern, die elementaren Bestandtheile nach den Regeln der qualitativen Analyse unorganischer Körper aufzusuchen.

8.

H. Rosenbusch, der sich mehrmals chemiseher Hülfsmittel bedient hat, räth in seiner mikroskopischen Physiographie (Bd. I, S. 108) mit der optischen Untersuchung allemal die chemische zu verbinden und giebt (S. 107—111) einige Anweisungen über mikrochemische Manipulationen.

Er will mittelst Säuren und Alkalien Gesteinspulver, resp. Dünnschliffe zur partiellen Lösung bringen, den ungelösten Rückstand, in Canadabalsam vertheilt, der mikroskopischen Betrachtung, die Lösung der gewöhnlichen qualitativen Analyse, mit gelegentlicher Beihülfe des Mikroskops, unterwerfen. Dabei sind Filtrationen unvermeidlich: Der Filtrirapparat, den Rosenbusch beschreibt, wird den fatalen Zeitverlust und den für kleine Mengen von Material noch fataleren Substanzverlust bei dieser Operation erheblich beschränken — besser wäre es, Methoden zu haben, die eine qualitative Mineralanalyse ohne Filtration auszuführen gestatten.

Bořicky's Methode

9.

E. Bořicky, dem das Verdienst zukommt, zuerst ein zusammenhängendes System mikrochemischer Reactionen für Gesteinsuntersuchung bekannt gemacht zu haben, sucht die

Filtration überall auszuschliessen. Dieser Vortheil, sowie die Eleganz seiner Methode, die nur *ein* Hauptreagens verwendet, gereichen ihr sehr zur Empfehlung.

Bořicky hat seine »Universalmethode'' auf die beiden Eigenschaften der Kieselflussäure gegründet, während des Verdunstens Fluorwasserstoff abzugeben und mit Alkalien schwer lösliche krystallinische Verbindungen zu bilden, von gut unterscheidbaren Formen. Er lässt $3^1/_2$ procentige Kieselflussäure in Berührung mit Mineralfragmenten oder aufgeschliffenen Gesteinsflächen verdunsten *) und unterscheidet die entstandenen Fluosilikate nach ihrer Form †). Das Kalium liefert cubische Krystalle, das Natrium hexagonale Säulen mit stumpfer Pyramide. Das Calcium giebt spindelförmige Gebilde, die Metalle der Magnesiumgruppe Rhomboëder. Die Strontiumverbindung gleicht der des Calciums. Barium giebt kleine zugespitzte Nadeln, Lithium winzige sechsseitige Pyramiden. Die Beobachtung wird bei 200 facher bis 400 facher Vergrösserung vorgenommen.

Calcium und Strontium werden mittelst Schwefelsäure unterschieden, die mit dem gleichen Volumen Wasser verdünnt ist §). Hierdurch werden die Krystalle des Calciumfluosilikats in Aggregate von Gipsnadeln verwandelt, während Strontiumfluosilikat zu einer feinkörnigen Masse wird. Natriumfluosilikat wird durch die verdünnte Schwefelsäure nicht angegriffen.

Eisen und Mangan werden von Magnesium mittelst Chlor unterschieden, welches den Krystallen des Eisenfluosilikats eine citrongelbe, denen des Manganfluosilikats eine röthliche Färbung ertheilt, oder mittelst Schwefelammonium, wodurch das Eisensalz schwarz gefärbt wird, das Mangansalz röthlichgrau mit körniger Structur, während das

---

*) E. Bořicky, Elemente einer neuen chemisch-mikroskop. Mineral- und Gesteinsanalyse, S. 15 u. f., in *Archiv der naturw. Landesdurchforsch. v. Böhmen,* 3 Bd. 5 Abth,

†) a. a. O. S. 17—22.

§) a. a. O. S. 22.

Magnesiumsalz von beiden Reagentien wenig angegriffen wird *).

In Betreff der übrigen Reactionen, welche der Verfasser mittheilt (Aetzungen, Glühversuche u. dgl.) muss ich auf die Original-Abhandlung verweisen; ich will nur noch darauf aufmerksam machen, dass mehrere der Wirkungen, welche er dem Chlor zuschreibt, auf Rechnung der begleitenden Salzsäuredämpfe kommen dürften.

10.

Bořicky hat durch zahlreiche Probeversuche an Mineralien bewiesen, dass mit seiner Methode gute Resultate zu erzielen sind, und meine eigenen Erfahrungen haben mich zu derselben Überzeugung geführt. Wenn ich gleichwohl von derselben abgegangen bin, so ist dies veranlasst worden durch Mängel der Methode und durch technische Schwierigkeiten bei ihrer Ausführung, die sich während des Arbeitens mit derselben fühlbar machten und zu eingehender Prüfung, weiter, im Verlauf derselben zu Ergänzungen und stetig um sich greifenden Abänderungen führten.

11.

Die Probe auf Alkalimetalle lässt an Schärfe kaum etwas zu wünschen übrig, wohl aber an Bequemlichkeit. Das einfachste Verfahren ist: einen Tropfen Kieselflussäure auf dem Schliffpräparat eintrocknen zu lassen. Dabei entstehen indessen wenig durchscheinende weisse Krusten †), auf denen die kleinen, ebenfalls weissen Krystalle, namentlich die sehr

*) ebend. S. 23.

†) Bořicky, a. a. O. S. 15, 16. Der Verf. spricht auf S. 16 von Kieselerde, die durch starke Kieselflussäure in reichlicher Menge ausgeschieden werde. Dann müsste die Kruste durch Kali beseitigt werden, was nur theilweise geschieht, leicht und vollständig nach Behandlung mit starker Schwefelsäure. Es handelt sich also um schnelle Bildung von Fluosilikaten und in den meisten Fällen auch von schwer zu zersetzenden Fluoaluminaten.

durchscheinenden des Kaliumfluosilikats nicht gut hervortreten. Weit bessere Bilder erhält man von Mineralfragmenten, die ganz von dem Säuretropfen bedeckt sind (S. 15), weil bei diesem Verfahren ein Theil der Fluosilikate sich auf farbloser, vollkommen durchsichtiger Unterlage präsentirt. Die besten Krystallisationen hat mir das Auskochen der Fluosilikate mit Wasser und Uebertragung der Lösung auf ein Objectglas geliefert; ein Verfahren, das Bořicky (S. 31) für Proben mit Fluorwasserstoff benutzt.

12.

Fluorwasserstoff wendet Bořicky für diejenigen Silikate an, die von Kieselflussäure schwierig angegriffen werden; im Allgemeinen bevorzugt er die Kieselflussäure, die nach ihm (auf Schliffpräparaten) deutlichere Krystalle giebt (der schwächeren und langsameren Einwirkung entsprechend) und das Mengenverhältniss der Bestandtheile zu schätzen gestattet, gleiche Löslichkeit vorausgesetzt (S. 14). Will man im Platinschälchen auskochen, so fallen auch mit Flussäure die Krystallisationen nach Wunsch aus, und was die quantitative Schätzung angeht, so wird diese vom Verfasser selbst (S. 15) auf ein bescheidenes Maass eingeschränkt, mit Rücksicht auf die ungleiche Löslichkeit der Fluosilikate *) und den ungleichen Widerstand, den verschiedene Minerale der Säure entgegensetzen. Diese ungleiche Angreifbarkeit, die mit dem Siliciumgehalt abnimmt, kann zu Partialanalysen benutzt werden: aus einem Feldspath-Augitgestein wird z. B. bei reichlichem Feldspathgehalt anfangs fast nur dieser, kein Augit ausgezogen, allein die Trennung ist nicht scharf, und das schwerlösliche Mineral (Augit, Glimmer) erleidet seinerseits auch eine partielle Zersetzung, so dass es wiederholter Behandlung mit Kieselflussäure bedarf, um alle Bestandtheile in die Form von Fluosilikaten überzuführen. Wo der Zeit-

*) Kaliumfluosilikat löst sich in 833 Th. Wasser von 17.5 C. Natriumfluosilikat in 153 Th., Lithiumfluosilikat in 1.9 Th., das Calcium- und Magnesiumsalz gehören ebenfalls zu den leicht löslichen.

aufwand nicht störend ist, kann das Verfahren vortheilhaft sein.

Etwa 4 Stunden sind ausreichend um mit 3 procentiger Kieselflussäure kräftige Einwirkung auf Feldspath zu erhalten, für Augit und Amphibol sind 6—7 Stunden genügend, für Glimmer ist ein Zusatz von Fluorwasserstoff wünschenswerth.

Sieht man von der Arbeit auf Schliffflächen ab, so kann man starke Flussäure nehmen, mit welcher man die feingeriebene Mineralprobe im Platinschälchen digerirt. Binnen wenigen Minuten ist völlige Zersetzung eingetreten, worauf man, Sicherheits halber ein wenig Kieselflussäure zufügt, abdampft, die trockne Masse mit Wasser aufkocht und auf dem Objectglase zur Krystallisation bringt.

Es liegt auf der Hand, dass die Mineralprobe viel kleiner genommen werden kann, als Bořicky sie anräth; er muss stecknadelkopfgrosse Körner verwenden, da er sich mit partieller Aufschliessung begnügt.

13.

Die Glasplatten, welche zu Versuchen mit Flussäure, Kieselflussäure oder Lösungen von Fluoriden dienen sollen, müssen durch einen Aetzgrund geschützt werden, wozu Bořicky Canadabalsam benutzt. Derselbe liefert eine glatte, bei vorsichtigem Abdampfen recht ebene und farblose Kruste, die der Einwirkung von Kieselflussäure und selbst schwacher Flussäure gut widersteht. Das Schutzmittel wäre tadellos, wenn sich die Krystallchen demselben nicht so fest anhängten, dass Abspülen zur Reinigung nicht ausreicht. Abwaschen ist ebenso wenig statthaft, der Ueberzug erhält dadurch Schrammen. Man bedarf also für jeden Versuch eines besonderen präparirten Glases, und hierin liegt für mich eine grosse Unbequemlichkeit der Bořicky'schen Methode.

14.

Wendet man sich von den Feldspathen, für deren Untersuchung es vor Allem auf die Alkalimetalle ankommt, zu

den Augiten und Amphibolen, so treten principielle Mängel der Methode hervor. Hier handelt es sich zunächst um die Unterscheidung und quantitative Abschätzung von Calcium, Magnesium und Eisen, in zweiter Linie um den Nachweis des Aluminiums.

15.

Calciumfluosilikat gehört zu den leicht löslichen Salzen. Bořicky giebt an, dass man seine Krystalle durch Schwefelsäure in Gipsnadeln umwandeln könne und E. Fleischer (Titrirmethode, S. 34, 35) verwendet es gar als Reagens zur Fällung von Kalium und Natrium an Stelle der Kieselflussäure. Das Salz kommt denn auch viel später zur Krystallisation als die Kalium- und Natriumverbindung, und mehrmals ist mir der Nachweis von Calcium mittelst Schwefelsäure binnen weniger als zwei Minuten gelungen, wo mich die Kieselflussäure im Stich gelassen hatte. Nach Bořicky kann dass Natriumfluosilikat calciumhaltig ausfallen — die Beobachtung (S. 23) ist richtig, nur muss sie auch auf das Kaliumsalz ausgedehnt werden, das, aus kalkreichen Mischungen abgeschieden, mit Schwefelsäure Gips bildet, freilich weniger, als das Natriumsalz. Es handelt sich hier um Verunreinigung mit concentrirter Lösung (Mutterlauge) des schwierig krystallisirenden Calciumfluosilikats, zu dessen Aufnahme das Natriumsalz vermöge seiner mikrolithischen Structur besonders geeignet ist.

Magnesiumfluosilikat hat dieselbe Form, wie die entsprechende Eisen- und Manganverbindung. Nach Analogie der Carbonate sollte man aus gemischten Lösungen Krystalle erhalten, die alle genannten Metalle in sich aufgenommen hätten. Dies scheint indessen nur in beschränktem Maasse der Fall zu sein. Selbst bei Gegenwart von eben so viel Eisen giebt das Magnesium ein Fluosilikat, das durch Schwefelammonium nur wenig gefärbt wird. Schlimmer ist die Löslichkeit des Salzes. Es giebt spät und schwierig Krystalle, die in feuchter Luft zerfliessen, eine Eigenschaft, die es mit dem entsprechenden Eisensalz theilt. Das dringende Bedürf-

niss nach einer besseren Reaction auf Magnesium hat mir den ersten Anlass zum Suchen nach neuen mikrochemischen Methoden gegeben.

16.

Vom Aluminium sagt Bořicky (S. 15) dass es mit Kieselflussäure keine Neubildungsprodukte in Krystallform biete. Aluminiumfluosilikat ist nicht krystallisationsfähig, seine Lösung trocknet zu einer gummiähnlichen Masse ein. Allein, nach Deville's Versuchen *) wird nicht unter allen Umständen dies Salz gebildet. Kieselflussäure giebt mit einem Ueberschuss von Kaolin Aluminiumfluorid und diese Umsetzung wird noch leichter in Gegenwart von alkalischen Fluoriden vor sich gehen, die mit Aluminiumfluorid sehr feste, beinahe unlösliche Verbindungen bilden. Wenn ein Gemenge von Kieselflussäure und Fluorwasserstoff zur Aufschliessung benutzt wurde, kann man, wofern genug Alkalimetall vorhanden war, darauf rechnen, alles Aluminium in Form dieser Fluorsalze zu erhalten.

Wahrscheinlich hat Bořicky die fraglichen Verbindungen übersehen, weil sie genau die Formen der entsprechenden Fluosilikate wiedergeben. Kaliumfluoaluminat gleicht dem Kaliumfluosilikat, das Natriumfluoaluminat giebt dieselben hexagonalen Krystalle (∞ p . p) wie das Natriumfluosilikat. Ich habe mich überzeugt, dass die zugespitzen Prismen doppeltbrechend sind, während die Hexagone zwischen gekreuzten Nicols dunkel werden und mit Rücksicht auf die, nach Descloizeaux, trikline Form des Kryoliths diesen Versuch mehrfach, an verschiedenen Präparaten, wiederholt. Von Kryolith, der nach drei, zu einander senkrechten Richtungen spaltete, vermochte ich keine Axenbilder zu erhalten; im polarisirenden Mikroskop zeigten die Platten Aggregatpolarisation.

---

*) Wurtz, *Dict. d. Chem.*, Art. Aluminium, Fluoride.

17.

Man könnte von der beschriebenen Reaction zwischen Alkalifluoriden und Aluminiumfluorid nach vorhergegangener Verjagung des Siliciums als Kieselfluorid vielleicht Nutzen ziehen für den Nachweis des Aluminiums, der nach dem gebräuchlichen Verfahren in der Mehrzahl der Fälle recht umständlich und für mikroskopische Beobachtung ganz ungeeignet ist. Von diesem Gesichtspunkt aus musste das Verhalten der übrigen dreiwerthigen Metalle geprüft werden; dabei stellte sich heraus, dass mit dem Natriumaluminiumfluorid isomorph sind die Natriumdoppelfluoride des Eisens, des Mangans, des Chroms und des Urans. Das alkalische Fluorid kann durch Chlorid ersetzt werden; wendet man Chlornatrium im Überschuss und in fester Form an, so entstehen an Stelle der hexagonalen Tafeln sechsblättrige Blumen, lebhaft an gewisse Formen der Schneesterne erinnerd.

Übrigens geht die Übereinstimmung der Krystallform unter den Fluorsalzen noch viel weiter, ohne dass ich dabei von Isomorphie sprechen möchte.

Den soeben besprochenen schliessen sich an die Fluorsalze des Zinns, des Wolframs, des Molybdäns, des Tantals und des Niobs, während die des Bors, des Titans und des Zirkoniums sich davon entfernen.

Natriumfluoborat gleicht dem entsprechenden Fluosilikat; das Fluotitanat ist ebenfalls hexagonal, doch sind seine Kryställchen viel weniger scharf begrenzt. Es scheidet sich langsam in Gestalt rundlicher Klümpchen ab, die nach etwa 10 Minuten allmählich hexagonalen Umriss annehmen. Natriumfluozirkoniat kommt viel schneller zum Vorschein, seine Kryställchen sind quadratisch-pyramidal (sogen. Briefcouvertform).

Kaliumfluoborat hat gleiche Form wie Kaliumfluotitanat, beide krystallisiren in Rautenform, oft mit abgestumpften Ecken (6 oder 8 seitige Blättchen). Die Rauten der Titanverbindung haben besondere Neigung durch einseitige Ausbildung des einen Paars abstumpfender Flächen in Raphiden überzugehen. Kaliumfluozirkoniat verhält sich abweichend.

Diese Verbindung scheint sehr wenig löslich zu sein, sie konnte nur in Gestalt winziger Körnchen erhalten werden; dasselbe gilt von dem Calciumsalz, indessen das Calciumfluotitanat leicht löslich ist.

Ich habe diese Reactionen mit einiger Ausführlichkeit abgehandelt, weil sie mir ein Mittel zur Entscheidung der Frage zu bieten scheinen, ob gewisse rothgelbe Kryställchen in Gabbros und Eklogiten Rutil oder Zirkon sind.

Marignac *) gibt für einzelne der besprochenen Fluorsalze andere Formen an. Ich habe die Versuche an den betreffenden Verbindungen mit gleichbleibenden Resultaten wiederholt und glaube dass es sich um abweichende Ausbildung einzelner Flächenpaare handelt. Diesen Differenzen weiter nachzugehen musste ich mir versagen, da für mich die Untersuchung der Fluorsalze nur von nebensächlicher Bedeutung war, ein unvermeidlicher Umweg zu dem Ziel, das ich mir gesteckt hatte.

18.

Nachdem ich die Ueberzeugung gewonnen, dass bei Befolgung von Bořicky's Methode nicht allein die Auffindung und Unterscheidung von Calcium und Magnesium mit Schwierigkeit und Unsicherheit behaftet ist, dass ausserdem Silicium mit Aluminium und dieses wieder mit Bor, Eisen, allenfalls auch mit Mangan und Chrom verwechselt werden kann, schien es mir geboten, die Methode zu verlassen und mich nach anderen umzusehen, die, vielleicht weniger einfach und elegant, einen höheren Grad von Zuverlässigkeit erreichen lassen und grössere Bequemlichkeit und Schnelligkeit der Ausführung bieten.

Neue mikrochemische Methode.

19.

Ein vollständiges System mikrochemischer Methoden für

*) Marignac, *Ann. d. ch. et de phys.*, LX, 301.

die Zwecke des Petrographen müsste ausreichende Mittel an die Hand geben:

1. für die qualitative Untersuchung kleiner Fragmente der häufiger vorkommenden Minerale, Fragmente deren Minimalgewicht ich zu 0.1 milligr. ansetzen möchte, entsprechend einem Durchmesser von etwa 0.3 millim.;

2. für qualitative Proben auf Schliffpräparaten, behufs localisirter Reactionen;

3. für die Scheidung von Fragmenten der häufigsten Mineralien, behufs Ergänzung der qualitativen durch quantitative Untersuchung.

Die unter 1) begriffenen Reactionen müssten ferner noch folgenden Anforderungen genügen:

a. Filtration ist, wegen Zeit- und Substanzverlust und leicht möglicher Verunreinigung der geringen Substanzmengen ausgeschlossen.

b. Als zweckmässige Reactionen können nur solche gelten, die entweder zu charakteristischen mikroskopischen Krystallen oder zu intensiv gefärbten Niederschlägen führen.

c. Krystallisationen, die langsames Verdunsten erfordern, sind im Interesse der Zeitersparniss zu vermeiden; die Untersuchung eines Minerals sollte höchstens zwei Stunden in Anspruch nehmen.

d. Alle Reactionen müssen so deutlich und sicher sein, alle Operationen so einfach in ihrer Ausführung, dass auch minder Geübte sich der Methode mit Erfolg bedienen können. Aus diesem Grunde werden Reagentien von hohem Aequivalent im Allgemeinen vorzuziehen, Reactionen, welche Doppelsalze liefern, vortheilhafter sein, als solche, die zu einfachen Verbindungen von gleicher Löslichkeit führen, wasserhaltige Verbindungen werden ein günstigeres Resultat erwarten lassen, als wasserfreie.

Vorbereitung der Mineralproben.

20.

1. Wenn grössere Quantitäten von Gestein zur Verfügung

stehen, Handstücke oder mehrere Scherben, so ist es oftmals vortheilhaft, davon dünne Splitter zu schlagen und aus diesen mittelst einer Beisszange Mineralfragmente auszubrechen. Ich wende dies Verfahren mit Vorliebe an, wenn die gesteinsbildenden Krystalle die Grösse von 1.5 Millim. erreichen. Man überzeugt sich unter der Lupe, dass man mit Körnchen von einerlei Structur, Farbe und Glanz zu thun hat und beseitigt nöthigenfalls anhängendes metallisches Eisen durch Königswasser.

2. Mikrokrystallinische Gesteine muss man wohl oder übel im Stahlmörser, weniger gut in Papier auf dem Ambos, zerkleinern, und nach Beseitigung des Staubes durch ein feines Drahtsieb (einfacher durch Abblasen) unter der Lupe, resp. schwacher Vergrösserung des zusammengesetzten Mikroskops mit der Präparirnadel oder einer feinen Pincette die gewünschten Körner ausklauben. Die Nadel wird, um das Anhaften der Körnchen zu erleichtern, von Zeit zu Zeit mit ein wenig Glycerin befeuchtet und die Körnchen in einem Wassertropfen übertragen, worin sie sich von der Nadelspitze ablösen.

3. Sind die Gemengtheile eines Gesteins nicht mit Sicherheit im groben Pulver zu unterscheiden, so muss man zu einem Schliffpräparat greifen, das nicht dünner gemacht wird, als nöthig ist um ihm für die Besichtigung bei hundertfacher Vergrösserung genügende Durchscheinendheit zu geben. Da kein Deckglas angebracht werden kann, giebt man dem Präparat einige Politur, wozu es in den meisten Fällen weiter nichts bedarf, als mit dem Zufügen von Schmirgel aufzuhören, statt dessen in kurzen Zwischenräumen reichlich Wasser auf die Schleifplatte zu bringen und das Präparat in kleinen Kreisen zu bewegen, so dass es schliesslich fast nur noch mit Wasser und blankem Eisen in Berührung ist. Im Nothfall lässt sich übrigens auch auf matten Präparaten, die für mittelstarke Objective erforderliche Durchscheinendheit durch Bestreichen mit Glycerin oder Oel herstellen.

Ein weiteres Erforderniss ist noch eine gewisse Nachgiebigkeit des zwischen Gestein und Objectglas befindlichen

Canadabalsams, die nöthigenfalls durch mässiges Erwärmen erzielt wird.

Man kann nun unter dem Mikroskop (mit schwachem Objectiv und starkem Ocular) vermittelst eines schmalen Messerchens oder einer messerförmig geschliffenen starken Präparirnadel beliebige Stücke von dem Gesteinsblättchen abbröckeln, ohne dass die Sprünge viel weiter laufen, als beabsichtigt war. Man arbeitet vom Rande nach der Mitte zu und beseitigt zwischendurch, nach stärkerem Erwärmen, über mässig sich anhäufende Brocken durch Abkratzen. Schliesslich wird der gewünschte Mineraldurchschnitt in derselben Weise abgelöst; etwa anklebende fremde Körnchen können nach dem Ausglühen, das in jedem Fall vorzunehmen ist, entfernt werden, wie unter 20,2 gelehrt ist.

Die auf eine oder die andere Weise isolirten Mineralfragmente müssen, behufs schneller und vollständiger Aufschliessung zu feinem Pulver gerieben werden. Um Verlust zu vermeiden bedeckt man die Körnchen während des Zerdrückens im Achatmörser mit einem Streifen feinen Filtrirpapier, das mit dem Hornmesser abgekratzt wird. In vielen Fällen ist hierfür, sowie zum Sammeln des an Pistil und Reibschale haftenden feinen Pulvers ebensogut ein stählernes Messer brauchbar, nicht aber ein Messer oder Spatel von Glas, Porzellan oder Elfenbein.

Aufschliessung der Proben.

21.

Zur Auflösung des Mineralpulvers dient rauchende Flussäure (für 0.5 Mgr. Substanz 2—3 Centigr. Säure) oder Fluorammonium und starke Salzsäure. Von der Flussäure des Handels muss man etwa 1 C. C. mit einigen Centigrammen Schwefelsäure abdampfen und den Rückstand auf Natrium, Calcium und Aluminium untersuchen. Ist sie unrein, so kann sie doch sehr wohl zur Bereitung von Fluorammonium dienen. Einem Rückstand liefert die Verdampfung der käuf-

lichen Flussäure auch wenn dieselbe keine Metalle enthält; derselbe ist braun, wird durch Erhitzen mit Schwefelsäure kohlig, er stammt aus den Guttaperchaflaschen, worin man die Säure versendet und bewahrt.

Wem dieser Rückstand, der sich im mikroskopischen Bilde in Gestalt braunschwarzer Flocken zeigt, unangenehm ist, kann sich des Fluorammoniums bedienen, unter Zusatz von Salzsäure. Es wirkt nicht so kräftig, wie rauchende Flüssäure und man hat, wenn auf Kalium untersucht werden soll, dafür zu sorgen, dass nach dem Abdampfen die Temperatur bis zu dunkler Rothglut gesteigert werde.

Uebrigens bietet die Aufbewahrung beider Aufschliessungsmittel nahezu gleiche Unbequemlichkeit, beide müssen in Gefässen von Platina oder Guttapercha bewahrt werden. Die grossen Guttaperchaflaschen, in denen die Flussäure versendet wird, sind, wo es sich um die Anwendung von Centigrammen handelt, recht unbehülflich; am passendsten sind Fläschchen von ca. 30 C. C. Inhalt, in deren Guttaperchastöpsel ein Löffelchen von Guttapercha oder ein Platindraht eingeschmolzen ist, dessen freies Ende man zu einer Schraube von ca. 3 mm. Durchmesser windet, die als Tauchpipette dient. Ein solches Fläschchen ist nicht leicht zu erhalten, noch weniger leicht im Laboratorium anzufertigen. Conische Guttaperchagefässe für Fluorammonium lassen sich ohne Schwierigkeit aus kreisrunden Scheiben zwischen zwei in einander passenden Porzellantiegeln pressen. Man erweicht die Guttaperchascheiben in heissem Wasser und bestreicht die pressenden Flächen mit Oel. Der Deckel wird in derselben Weise zwischen zwei Tiegeldeckeln geformt, von deren einem man die Oese abgebrochen hat. Die Aufschliessung wird in halbkugeligen Platinschälchen von 1 Cm. Durchmesser vorgenommen *), wie sie für Löthrohrproben gebräuchlich sind. Um sie bequem reinigen zu können, lässt man in ein Stück hartes Holz (zweckmässig eine hölzerne

*) Von sehr guter Qualität zu beziehen von der Deutschen Gold- und Silberscheide-Anstalt in Frankfurt a.M. (vormals H. Rössler).

Dose) entsprechende Vertiefungen drehen, oder man formt sie in Gips ein, der nachträglich mit Schellackfirniss getränkt wird. Man kann sie alsdann, ohne Verbiegung fürchten zu müssen, gründlich putzen. Concave Deckel für Sublimationen kann man aus dünnem ausgeglühtem Platinblech schlagen. Man thut dies auf Blei mit Hülfe der zu den Plattnerschen Capellenformen gehörigen Stempel.

In die Schälchen kommen zunächst ein paar Tropfen Flussäure oder Fluorammonium und Sälzsaure, darauf das feingeriebene Silikat. Man dampft unter mässiger Erwärmung ab, fügt, wenn nöthig, noch einmal Flussäure zu und wiederholt das Abdampfen. Bei dieser und der folgenden Operation hat man sich vor den Dämpfen zu hüten, da selbst geringe Quantitäten Flussäure äusserst unangenehme Wirkungen hervorbringen können, wenn sie mit Wunden in Berührung kommen.

Die trockne Masse von Fluoriden wird nunmehr mit so viel verdünnter Schwefelsäure abgedampft, dass graue Dämpfe von Schwefelsäurehydrat in reichlicher Menge entweichen. Hierauf ist zu achten, damit nicht Fluorsalze des Siliciums und Aluminiums unzersetzt bleiben.

Die Schwefelsäure darf nicht bis auf die letzte Spur verdampft werden; ein kleiner Überschuss derselben ist der Lösung in Wasser und der Krystallbildung in mehreren Fällen sehr förderlich und verhütet ausserdem das lästige Eintrocknen flacher Tropfen während der mikroskopischen Beobachtung *). Man setze also nöthigenfalls vor dem Aufkochen mit Wasser ein Minimum von Schwefelsäure zu und erhitze nochmals bis zum Rauchen.

Wasser wird in reichlicher Menge angewendet: das Schälchen wird zur Hälfte gefüllt und der Inhalt unter gelindem

---

*) In Präparaten, die einige Zeit bewahrt werden sollen, kann der Verdunstung durch behutsames zusetzen von Glycerin ein Ende gemacht werden, worauf man mittelst dicken Asphaltlacks ein Deckglas darauf befestigt. Ist die Verdunstung einmal zu weit gegangen so hilft man sich mit Anhauchen, oder mit einem minimalen Wassertröpfchen, wie sie an den in 23 erwähnten Platinhäkchen hängen bleiben.

Sieden so weit verdampft, dass man von 0.1 Mgr. Substanz ein Centigr. Lösung erhält.

Nachweis des Calciums.

22.

Die Lösung von Sulfaten wird mittelst einer Capillarpipette aufgenommen und davon durch vorsichtiges Blasen ein Tröpfchen von 2—3 mm. Durchmesser auf eine reine Glasplatte gebracht. Als Pipette dient ein hohler Glasfaden von ca. 0.2 mm. im Lichten. Mit Hülfe von dergleichen Glasfäden kann man das in Arbeit genommene Quantum Substanz, wenn es auch nur 0.1 mgr. beträgt, auf mehrere Versuche vertheilen und darin die Lösungen geräume Zeit bewahren *).

Die Glasplatte mit dem Tropfen wird ohne Deckglas unter das Mikroskop gebracht, dem man 150 fache bis 250 fache Vergrösserung gegeben hat. Ich ziehe es vor, ohne Deckglas zu arbeiten und das Mikroskopobjectiv durch ein mit Glycerin untergeklebtes Glimmerblättchen zu Schützen, weil mir die Verdunstung des Probetropfens oftmals gute Dienste geleistet hat und weil die Wirkung der Reagentien in dem freiliegenden Tropfen eine viel schnellere und gleichmässigere ist, als unter einem Deckglas.

Enthielt das in Arbeit genommene Mineral Calcium in irgend erheblicher Menge so sieht man sofort oder doch binnen zwei Minuten Gipskrystalle von der gewöhnlichen Form ∞ p. p. ∞ p $\overset{\frown}{\infty}$, meist auf dem Klinopinakoïd liegend (Fig. 3). War viel Calcium zugegen, so ist das ganze Gesichtsfeld voll von kurzen rudimentären Prismen, die dem Gips angehören, zwischen diesen entstehen dünne, spiessige

---

*) Lässt man ein solches Röhrchen einige Stunden in verticaler Stellung, so klärt sich die Lösung darin. Man befestigt es zu dem Ende mit Klebwachs an ein Reagirglasgestell.

Krystalle, die oft zu unregelmässigen Rosetten verwachsen sind, noch dünner fallen sie aus in Lösungen, die viel Salzsäure enthalten. Später entstehen grössere Krystalle, hauptsächlich am Rande des Tropfens, an denen man Winkelmessungen vornehmen kann, unter denen man auch nicht selten die bekannten Schwalbenschwanz-Zwillinge findet. Die Gipskrystalle haben im Mittel 60 mikr. Länge bei 6 mikr. Breite.

Selten wird man in die Lage kommen, der Abscheidung des Gipses durch Alkohol nachhelfen zu müssen. Man lässt zu diesem Ende das Präparat einige Minuten uuter einem Pappkästchen verweilen, dessen Boden man mit ein paar Tropfen Alkohol befeuchtet hatte. Die Krystalle, welche man nach diesem Verfahren erhält, gleichen denen, welche in salzsauren Lösungen durch zusatz von Schwefelsäure entstehen.

In den meisten Fällen führt die Verdunstung zum Ziel; mit einigem Abwarten wurden aus einer Lösung, die nicht mehr als 0.3 pro mille Ca O enthielt, ohne Hülfe von Alkohol Krystalle erhalten.

Die Empfindlichkeit der Reaction ist sehr befriedigend: 0.0005 Mgr. Ca O sind nachweisbar. Durch Alkoholdampf kann sie auf das Vierfache gesteigert werden, freilich, wie schon angedeutet wurde, auf Kosten von Grösse und Formvollendung der Krystalle. Versuche mit den üblichen Fällungsmitteln: Ammoniumoxalat, Oxalsäure und Ammoniumcarbonat führten nicht zu brauchbaren Resultaten. Die Kryställchen von Calciumoxalat und Calciumcarbonat fallen, wenn man nicht übermässig lange Zeit auf den Versuch verwenden will, zu klein und undeutlich aus.

Nachweis des Kaliums.

23.

Zu dem Tropfen, in welchem man nach Gipskrystallen gesucht hat, wird ein Tröpfchen Platinchlorid gefügt. Man bedient sich dazu eines in Glas eingeschmolzenen Häkchens

von Platindraht — Oesen sind weniger leicht und sicher zu reinigen — und setzt das daran hängende Tröpfchen der concentrirten Platinlösung in die Mitte des Probetropfens. Die Krystalle des Kaliumplatinchlorids bilden sich dann vorzugsweise am Rande, binnen einigen Minuten, die man benutzt um die Probe auf Natrium oder Aluminium vorzubereiten. Bleiben die Krystalle zu lange aus, so kann in der unter 22 beschriebenen Weise mit Alkohol nachgeholfen werden.

Das Salz bildet lichtgelbe, äusserst scharf ausgebildete Octaëder von auffallend starkem Brechungsvermögen. Ihre Grösse wechselt zwischen 10 und 30 Mikr. Aus concentrirten Lösungen erhält man viele kleine Krystalle, nicht selten zu kleeblattförmigen Drillingen und Vierlingen verwachsen (Fig. 4). In Chloridlösungen entstehen sie schneller und fallen sie kleiner aus, als in Sulfatlösungen. Grosser Überschuss von Schwefelsäure ist ihrer Entstehung hinderlich.

An dem Platinchlorid haben wir ein mikrochemisches Reagens auf Kalium, das nichts zu wünschen übrig lässt. Die Reaction ist sicher, leicht wahrzunehmen, sie ist, da Caesium und Rubidium zu den Seltenheiten gehören, charakteristisch und sehr empfindlich. Nachweisbar: 0.0006 Mgr. K^2O. Kieselflussäure wirkt weniger schnell und die Kryställchen von Kaliumfluosilikat sind viel weniger gut wahrzunehmen, als die des Platindoppelsalzes.

Phosphormolybdänsäure und Natriumphosphomolybdat wirken noch langsamer als Kieselflussäure; die Abscheidung der Kaliumverbindung aus einer Lösung, die 2 p. C. Kaliumsulfat enthielt, begann erst als der Rand des Tropfens eintrocknete. Übrigens gleichen die Krystalle in Grösse und Farbe denen des Platindoppelsalzes; octaëdrische Krystalle der beiden Verbindungen sind einander zum Verwechseln ähnlich, auch kommen hier die oben beschriebenen Vierlinge vor. Die vorherschende Form ist die des Rhombendodekaëders.

Cerosulfat bewirkt eben so schnell, wie Platinchlorid die Abscheidung eines Doppelsalzes, das aber durch Form und

Farbe viel weniger gut gekennzeichnet ist als das Kaliumplatinchlorid. Es soll unter 24 näher besprochen werden.

Nachweis des Natriums.

24.

Der Nachweis des Natriums bietet die grössten Schwierigkeiten. Ich habe lange nach einem guten Reagens gesucht und bin schliesslich bei der Anwendung von Ceriumsulfat stehen geblieben. Dies Salz zeigt, wie die Kieselflussäure, beide Alkalimetalle an; während aber Bořicky's Reagens empfindlicher ist für das Kalium verhält sich hier die Sache umgekehrt: das Natrium-Cerosulfat kommt vor dem Kalium-Cerosulfat zum Vorschein. Die Doppelsalze des Lithiums und des Ammoniums sind viel weniger schwer löslich, in noch höherem Maasse gilt dies von Calcium und Magnesium, die überdies andere Krystallgebilde liefern. Das gelbe Cerisulfat gab kein brauchbares Resultat.

Das Cerosulfat verwendet man in gesättigter Lösung, von der man ein Tröpfchen neben den Probetropfen setzt, in ca. 5 Mm. Entfernung. Man verbindet beide, am sichersten durch einen Glasfaden und sieht nun in dem Ceriumtropfen desminähnliche Krystallbündel von Cerosulfat entstehen, am Rande, bei etwas reichlichem Natriumgehalt schnell den ganzen Ceriumtropfen erfüllend, eine stark getrübte braune Zone des Natriumdoppelsalzes und wenn auch Kalium zugegen ist innerhalb der eben beschriebenen eine mehr grobkörnige, grauliche Zone des Kaliumdoppelsalzes.

Starke Vergrösserungen (600 f. und darüber) zeigen, dass die fraglichen Trübungen aus winzigen, weisslich durchscheinenden Körnchen von kaum 2 Mikr. Durchm. (Natriumsalz) und grösseren Sphäroïden, von 5—8 Mikr. Durchm., bestehen (Kaliumsalz), welche letzteren mit Körnern von Kartoffelstärke Aehnlichkeit haben.

In neutralen Lösungen, die weniger als 1 p. Ct. Alkalisulfat enthalten, ebenso in sauren Lösungen treten die be-

schriebenen Erscheinungen viel weniger deutlich auf. Man setzt das Reagens unmittelbar neben den Probetropfen und erhält nach einigen Minuten, über den ganzen Tropfen verbreitet, Knollen des Kaliumdoppelsalzes, unter besonders günstigen Verhältnissen auch enteckte Rhomben, bald sechs- bald achtseitig, und kurze zugespitzte Prismen (Länge 3—5 Mikr.) des Natriumdoppelsalzes, die viel Aehnlichkeit mit kleinen Navicellen haben (Fig. 5 und 6).

Isolirte Krystalle des Cerosulfats besitzen denselben Habitus, wie das Natriumdoppelsalz, sind aber 5- bis 6-mal so gross.

Ein grosser Überschuss von Schwefelsäure kann in Lösungen, die wenig Kalium und Natrium enthalten, die Reaction gegen Ceriumsalz gänzlich verhindern; statt der Doppelsalze erscheinen viel grössere radialfaserige Knollen, wie es scheint, einem sauren Ceriumsulfat angehörig *). Zusatz von Magnesiumacetat oder Kupferacetat bringt in solchen Fällen die gewünschte Reaction zum Vorschein, doch ist es besser, bei der Aufschliessung dafür zu sorgen, dass die freie Schwefelsäure bis auf einen kleinen Rest verjagt wird. Man kann das Cerosulfat als erstes Reagens für beide Alkalimetalle benutzen und in zweifelhaften Fällen, allenfalls in demselben Tropfen, darnach zuerst Platinchlorid, später Kieselflussäure zusetzen.

Die Controle des Kaliums mit Platinchlorid mache ich sehr gern, die des Natriums mit Kieselflussäure ist für mich ein Nothbehelf, weil ich nur dann, wenn die Reaction schnell und reichlich eintritt, oder wenn ich auf gefirnissten Platten arbeite, überzeugt sein kann, dass kein Alkali aus dem Glase abgeschieden wurde, und die Reaction leider nicht zu den empfindlichen gehört. In einer Lösung die $^1/_2$ pCt. Natriumsulfat enthielt, zeigte sich die Reaction gegen Ce-

*) Säure Überschuss beeinträchtigt die Abscheidung des Kaliumdoppelsalzes weniger als die der Natriumverbindung; in sauren Lösungen kann daher das Kalium vor dem Natrium angezeigt werden, oder gar nur ersteres, wenn auch viel Natrium zugegen ist.

rosulfat nach zwei Minuten, in einer Lösung, die 1.2 p. Mille Natriumsulfat enthielt, nach 5 Minuten, während Kieselflussäure in einem anderen Tropfen derselben Lösung erst nach 20 Minuten spärliche Anzeichen von Natrium gab. In einer Lösung von $^1/_2$ p. M. gab Cerosulfat nach 10 Minuten Reaction, Kieselflussäure gab keine, auch nicht nach halbstündigem Abwarten. In stark verdünnten Lösungen kann die Reaction gegen Ceriumsalz durch mässiges Erwärmen beschleunigt werden. In vielen Fällen lässt sich das Resultat durch Flammenreaction controliren oder gar die Reaction auf nassem Wege gänzlich umgehen.

Lanthan- und Didymsulfat geben mit Alkalimetallen dieselben Reactionen, wie Ceriumsulfat, bei geringerer Empfindlichkeit. Aus diesem Grunde kann man sich an Stelle des reinen Ceriumsalzes des sogenannten »Ceritsulfats" bedienen *).

Versuche mit Oxalsäure, mit Ammoniumoxalat und mit Kaliumstibiat führten nicht zu dem gewünschten Resultat. Erstere sind zu wenig empfindlich, das letztere reagirt träge und giebt mit Calcium- und Magnesiumsalzen dicke pulverige Niederschläge, die den ganzen Tropfen trüben und die spät eintretende Reaction auf das Natrium verhüllen.

Nachweis des Lithiums.

25.

Das Lithium ist in schwefelsaurer Lösung leicht aufzufinden, wenn man den Gips soweit möglich nach 22, Anm. entfernt hat. Man präcipitirt es als Carbonat, das sehr gut ausgebildete Krystalle von monoklinem Habitus, mit recht-

*) Darzustellen aus Cerit durch Abdampfen mit gleichen Theilen Schwefelsäure und Wasser bis zu schwachem Glühen. Vertheilen der zerriebenen Masse in 4 Th. kaltem Wasser, Filtriren und Aufkochen der gesättigten Lösung, wobei ein wasserarmes Ceritsulfat niederfällt, das entwässert und zerrieben in kaltem Wasser gelöst wird.

eckigem Querschnitt bildet, wie sie in Fig. 7 dargestellt sind. Ihre Länge beträgt 50 bis 75 Mikr.

Verwechselung ist möglich mit Gips und mit Doppelsalzen von Magnesiumcarbonat mit alkalischen Carbonaten. Von Gips sind die Krystalle des Lithiumcarbonats zu unterscheiden durch die rectangulären Formen, die fast niemals fehlen und durch ihre Löslichkeit in verdünnter Schwefelsäure; von Magnesiumdoppelsalzen unterscheidet sie die Eigenschaft, bei jedem Verhältniss von Kaliumcarbonat und Lithiumsulfat zu entstehen, während Doppelsalze des Magnesiumcarbonats nur bei Überschuss von Alkalicarbonat sich bilden können.

In Magnesiumlösungen erhält man, wenn der Zusatz von Alkalicarbonat nicht übermässig gross ausgefallen ist, die prismatischen Krystalle des Doppelsalzes nur in nächster Umgebung des Reagens, und auch nur vorübergehend; sie zerfallen alsbald zu Körnchen von Magnesiumcarbonat.

Phosphorsäure ist dem Nachweis des Lithiums als Carbonat hinderlich: ein Zusatz von Phosphorsalz vermag selbst fertig ausgebildete Krystalle von Lithiumcarbonat zu zerstören.

Nachweis des Bariums und Strontiums.

26.

Barium und Strontium finden sich, nebst Gips, wenn viel Calcium vorhanden war, in dem Sediment, das nach Abziehen der wässerigen Sulfatlösung im Platinschälchen zurückbleibt. Sie lassen sich durch Erhitzen mit concentrirter Schwefelsäure in Lösung bringen, und diese Lösung lässt bei'm Erkalten und weiter durch Wasseraufnahme das Bariumsulfat in Form kleiner linsenförmiger, gekreuzter Kryställchen fallen (Fig. 8). Sie messen 5 bis 12 Mikr. *)

---

*) Sehr schnell erfolgt die Abscheidung, wenn man das erkaltete Präparat anhaucht.

Strontiumsulfat kommt nach dem Bariumsulfat zur Krystallisation. Zuerst zeigen sich verworrene Büschel feiner Nadeln, ähnlich denen, die Gips bei schneller Abscheidung aus saurer Lösung bildet, alsbald folgen gekreuzte Krystalle, deren kleinste mit den Kreuzen des Bariumsulfats verwechselt werden können, während die volkommen ausgebildeten sich gut von ihnen unterscheiden lassen. Sie messen von 20 bei 30 bis zu 30 bei 45 Mikr. und haben eine recht complicirte Structur (Fig. 9). Zuletzt entstehen Rhomben, meistens etwas trübe und an den Ecken zu Spitzen ausgezogen (sie entstehen durch Ausfüllung der Kreuze), auch kommen Zwillinge und kreuzförmige Vierlinge dieser letzteren Krystallgebilde vor *). (Fig. 9, unten).

Gips, der gleichfalls in Lösung geht, kommt noch später zur Abscheidung, anfangs in feinen, zu Bündeln und Rosetten verwachsenen Spiessen, später mit seinem gewöhnlichen Habitus.

Nachweis des Magnesiums.

27.

Für Magnesium besitzen wir ein ausgezeichnetes Reagens an Natriumphosphat in ammoniakalischer Lösung. Die Kryställchen des Ammonium-Magnesium-Phosphats sind so scharf ausgebildet und durch ihre Hemimorphie so gut gekennzeichnet, auch die rudimentären Krystallgebilde in Folge der Hemimorphie so eigenthümlich entwikkelt, dass die Verwendung der Reaction für mikroskopische Zwecke auf der Hand liegt. Aus zahlreichen Versuchen hat sich ergeben, dass Natriumammoniumhydrophosphat (Phosphorsalz)

---

*) Bleisulfat scheidet sich aus schwefelsaurer Lösung ebenfalls in kreuzförmigen Zwillingsgebilden ab. Sie haben dieselbe Grösse, wie die des Bariumsulfats (5—12 Mikr.), aber den Habitus der zuletzt beschriebenen Krystalle des Strontiumsulfats (Malteserkreuz mit lichtem Centrum).

in fester Form die besten Resultate giebt. Der Probetropfen, in welchem man bereits nach Alkalien oder nach Aluminium gesucht hat, wird mit Ammoniak übersättigt, ein Wassertröpfchen in 1 Cm. Abstand daneben gesetzt, in dieses ein Körnchen Phosphorsalz gebracht und schliesslich der Zwischenraum der beiden Tropfen durch einen Glasfaden überbrückt. Die Grösse des Zwischenraums ist für die Entwickelung gut ausgebildeter Kryställchen von Bedeutung: enthält die Flüssigkeit 1 p. Ct. Magnesium und darüber, so werden, wenn die Tropfen in einander verfliessen, lange Zeit nur doppelt gegabelte Krystallrudimente (Fig. 10, oben) bis 60 Mikr. lang, unformliche Zwillinge hemimorpher Kryställchen, gebildet werden; ist die Lösung sehr verdünnt, so entstehen nur gut ausgebildete hemimorphe Krystalle (Fig. 10, unten) von 10—20 Mikr. Länge, die aber, wenn der Verbindungskanal der beiden Tropfen lang und schmal ist, recht lange auf sich warten lassen. Man kann sich alsdann helfen durch einen zweiten Glasfaden, der dicht neben den ersten gelegt wird, hierdurch wird das Überströmen der Flüssigkeit von einem Tropfen zum andern sehr beschleunigt. Weiss man, dass die zu prüfende Lösung weniger als $^1/_2$ p. Ct. Magnesium enthalten wird, so kann man einfacher handeln und dabei Zeit sparen; es genügt alsdann ein Körnchen Phosphorsalz von $^1/_3$ Mm., das mittelst einer Nadelspitze an den Rand des Probetropfens gebracht wird.

Eisen und Mangan, die durchaus ähnliche Verbindungen geben, können keine Irrthümer veranlassen, wenn man zwischen dem Zusatz von Ammoniak und dem von Phosphorsalz einige Minuten Zeit gönnt für die Oxydation der genannten Metalle.

Bisweilen bleibt die Reaction auf Magnesium aus oder kommt nur schwach zum Vorschein, weil nicht die genügende Quantität von Ammoniumsalzen in Lösung war; man thut deshalb gut vor der Übersättigung mit Ammoniak ein wenig Salzsäure oder Chlorammonium zuzufügen *).

---

*) Umgekehrt kann die Reaction zur Prüfung einer Flüssigkeit auf Ammoniak dienen. Es wird dieselbe mit Natriumphosphat versetzt und durch Kali- oder Natronlauge alkalisch gemacht, hierauf mit einem Körn-

Die Empfindlichkeit der Reaction ist durchaus befriedigend. Eine Lösung die 1.5 pro Mille Mg O enthielt, gab binnen acht Minuten reichliche Krystallbildung. Der Nachweis von 0.001 Mgr. Mg O ist noch ohne Schwierigkeit auszuführen.

Nachweis des Aluminiums.

28.

Ein gutes Reagens für Aluminium zu finden hat ebenso viel Zeit gekostet, wie für Natrium, doch bin ich hier zu besseren Resultaten gelangt, die um so mehr von Werth sind, als die einzige Löthrohrreaction auf Aluminium, die mit Kobaltlösung, nur beschränkter Anwendung fähig ist und unter dem Mikroskop noch viel von ihrer Bedeutung verliert.

Ein brauchbares Reagens ist alkoholische Alizarinlösung, die mit alkalischer Aluminiumlösung in Wechselwirkung gebracht wird (auf einem Streifchen Filtrirpapier, weniger gut auf Glas), der Überschuss von Alkali wird durch Essigsäuredampf weggenommen.

Diese Reaction eignet sich besser für Schliffflächen als für Flüssigkeitstropfen. Für letzteren Zweck wurde das geeignete Reagens gefunden in Caesiumchlorid, wovon ein Körnchen oder ein minimales Tröpfchen concentrirter Lösung an den Rand des Probetropfens gebracht wird. Es genügt, die Spitze eines Platindrahts in die zerflossene Salzmasse zu tauchen und damit den Probetropfen zu berühren um sofort um die berührte Stelle grosse wasserhelle Alaunkrystalle (35—90 Mikr. messend) von der gewöhnlichen Form entstehen zu sehen: vorherrschend scharfe Octaëder, seltener

---

chen Kieserit in Berührung gebracht. Es bilden sich Flocken von Magnesia und Magnesiumphosphat und dazwischen, wenn Ammoniak zugegen, die hemimorphen Krystalle. Nessler's Reagens giebt nur gelbe Flocken.

Combinationen von Octaëder mit Würfel (Fig. 1, ob.). In einigermassen concentrirten Lösungen entstehen statt isolirter Krystalle Dendriten (Fig. 1, unten): bemerkt man diese, so muss ein kleiner Wassertropfen zugesetzt werden, gegenüber der Seite des Tropfens, an welcher man das Reagens angebracht hatte. Auflösen der Dendriten durch Erwärmen ist nicht zu empfehlen; man erhält dadurch viel kleinere und weniger Krystalle als durch locale Präcipitation bei gewöhnlicher Temperatur. Auch hat man sich vor grossem Überschuss von Schwefelsäure zu hüten. In schwach saurer Lösung entstehen die Alaunkrystalle schneller und bilden sie sich vollkommener aus, als in einer neutralen Flüssigkeit, abgesehen davon, dass ein Überschuss von Schwefelsäure sehr gute Dienste leistet bei der Auflösung des Aluminiumsulfats, das in Wasser sich träge löst; viel Schwefelsäure verzögert und beeinträchtigt die Alaunbildung. Glaubt man, dass hierin etwas versehen ist, so kann durch ein Acetat — Natrium- oder Kupferacetat — Abhülfe geschafft werden.

Anwesenheit von Eisen, selbst in reichlicher Menge, macht keine Schwierigkeit, da der Eisenalaun schwierig krystallisirt. In einigen Fällen, wo ich die Bildung von Eisenalaun für möglich hielt, habe ich Controlversuche mit Tropfen angestellt, die ich durch Zink reducirt hatte, ohne dadurch abweichende Resultate zu erhalten.

Die Empfindlichkeit der Reaction beruht auf der geringen Löslichkeit des wasserreichen Doppelsalzes: ein Theil Caesiumalaun bedarf an 200 Th. Wasser. Ein hundertstel Milligr. $Al^2 O^3$ ist mehr als ausreichend für eine deutliche Reaction, wenn für gehörige Concentration der Lösung gesorgt war.

Eisen und Mangan.

29.

Eisen wird man schwerlich unter dem Mikroskop suchen wollen, übrigens ist die Färbung des feinkörnigen, sich zu Flocken zusammenballenden Niederschlages, den Ferrocyan-

kalium in Eisenlösungen hervorbringt, unter 200 f. Vergrösserung eben so intensiv, wie für das unbewaffnete Auge.

Mangan kann durch oxydirendes Schmelzen mit Soda in so minimalen Quantitäten nachgewiesen werden und dabei ist die Reaction so charakteristisch, dass auch hier ein mikroskopisches Prüfungsverfahren überflüssig scheint.

Aufsuchung der Metalloïde.

30.

Von Nichtmetallen lassen sich durch Umkehrung bereits beschriebener Reactionen auffinden: Schwefel (28) und Phosphor (27). Für Chlor, Fluor, Bor und Silicium mussten besondere Reactionen gesucht werden.

Nachweis des Schwefels.

31.

Es handelt sich zunächst darum, den Schwefel als Alkalisulfat in Lösung zu bringen. Sulfurete und Sulfarseniate müssen mit einem Gemenge gleicher Theile Soda und Salpeter verbrannt, unlösliche Sulfate mit Soda geschmolzen werden.

Die gröblich zerkleinerte Schmelze wird in einen Wassertropfen gebracht und ein Tropfen einer Mischung von Chloraluminium und Salzsäure daneben gesetzt, dem man ein wenig Chlorcaesium zufügt. Man verfährt weiter nach 27 und findet die ersten Krystalle von Caesiumalaun in der Nähe des verbindenden Glasfadens.

Nachweis des Phosphors (und Arsens).

32.

Unlösliche Phosphate sind ebenso vorzubereiten, wie Sul-

fate. Als Reagens verwendet man eine concentrirte Lösung von Chlorammonium nebst einem Körnchen Bittersalz (besser Kieserit, der sich langsamer löst) und verfährt im Übrigen nach 27.

Arsenide können vorbereitet werden, wie Sulfurete, Arseniate wie unlösliche Sulfate. Die mikroskopischen Krystalle und Krystallrudimente des Ammonium-Magnesium-Arseniats sind denen des Ammonium-Magnesium-Phosphats zum Verwechseln ähnlich. Versuche, mittelst Schwefelwasserstoff an Kryställchen des Arseniats charakteristische Farbenänderung hervorzubringen gaben kein befriedigendes Resultat, ebensowenig Versuche mit Silbernitrat.

Handelt es sich um Aufsuchung von Arsen neben Phosphor, so wird Sublimation mit einem geschmolzenen Gemenge von Soda und Cyankalium zum Ziel führen; der Rückstand ist in soeben beschriebener Weise auf Phosphor zu untersuchen. Die Sublimation kann in ähnlicher Weise verfeinert werden, wie weiter unten (36) für Wasser gelehrt werden soll.

Die Reaction mit Ammoniummolybdat und Salpetersäure leidet auch an dem Übelstand, gleich brauchbar für Phosphorsäure und für Arsensäure zu sein. Sie ist nicht empfindlicher, als die beschriebene und recht träge; man muss bei einigermaassen verdünnten Lösungen bis zum Eintrocknen des Randes warten. Aus diesem Grunde arbeite ich lieber mit Magnesiumsulfat und Chlorammonium, als mit Molybdatlösung. Übrigens gilt für den Habitus des Ammoniumphosphomolybdats alles was unter 23 von dem Kaliumphosphomolybdat gesagt ist.

Nachweis des Chlors.

33.

Chlor kann unter dem Mikroskop nicht mit Hülfe von Silbernitrat gefunden werden, da das Chlorsilber undurch-

sichtige Körnchen und Flocken bildet, die nichts Charakteristisches bieten und in trüben Flüssigkeiten leicht übersehen werden.

Mercuronitrat giebt unter gleichen Umständen einen krystallinischen Niederschlag, der anfangs aus feinen Prismen besteht, die ein recht auffallendes Bild geben und sich von Gipsnadeln wohl würden unterscheiden lassen, allein nach einigen Minuten ist davon fast nichts mehr übrig. Sie zerbröckeln zu winzigen Körperchen, so winzig, dass es mindestens 600 f. Vergrösserung bedarf, um wahrzunehmen, dass sie quadratischen Querschnitt haben.

Bleisalze geben mit Salzsäure und löslichen Chloriden scharf ausgebildete, stark lichtbrechende Krystallnadeln, sind aber nicht brauchbar, wenn man mit Sulfaten neben den Chloriden zu thun hat. Will man die Aufschliessung durch Schmelzen mit Soda bewerkstelligen, so kann in den meisten Fällen Bleinitrat in verdünnter Salpetersäure sehr wohl als mikrochemisches Reagens auf Chlor benutzt werden. Die Krystalle des Chlorbleis, aus kalter Lösung abgeschieden, sind in Fig. 11 dargestellt. Die Rhomben messen 10—15 Mik., die Dendriten sind von sehr ungleicher Grösse. Man operirt übrigens nach 31.

Bei Anwesenheit von Schwefelsäure oder Sulfaten muss das Bleinitrat durch Thalliumsulfat ersetzt werden, dem ich, seiner grösseren Empfindlichkeit halber und wegen der geringen Veränderlichkeit der Krystallgebilde des Chlorthalliums überhaupt den Vorzug gebe.

Hat man durch Schmelzen mit Soda aufgeschlossen, so wird das Thalliumsulfat in verdünnter Schwefelsäure angewendet, wobei man wieder nach 31 operirt, meistens wird man besser mit concentrirter Schwefelsäure arbeiten und hat dazu zwei Wege vor sich. Man kann durch mässiges Erwärmen mit möglichst wenig concentrirter Säure Zersetzung herbeiführen, hierauf ein gleiches Volumen Wasser zufügen und in ein daneben gesetztes Wassertröpfchen ein Körnchen Thalliumsulfat bringen, möglichst auf die Grenze der beiden Tropfen. Die Krystalle von Thalliumchlorid bilden sich dann in dem klaren Wasser in nächster Umge-

bung des Thalliumsulfats. Bei diesem Verfahren werden alle Operationen auf dem Objectglase ausgeführt. Oder man verwendet eine grössere Quantität Schwefelsäure im Platinschälchen und fängt die entweichende Salzsäure in Wasser auf. Auf das Platinschälchen wird ein Deckglas gelegt, dem unterwärts ein kleiner Wassertropfen angehängt ist. Von oberwärts wird es durch einen grösseren Tropfen gekühlt. Nach Beendigung der kleinen Destillation wird dieser Tropfen mittelst einer Capillarpipette entfernt, das Deckglas umgekehrt auf einen Objectträger gelegt und mitten in den Rest des kleinen Wassertropfens ein Körnchen Thalliumsulfat gebracht. Die Kryställchen des Thalliumchlorids bilden sich dann sehr schnell. Es sind Octaëder und Combinationen des Octaëders mit Rhombendodekaëder von 10 bis 15 Mikr. Durchmesser, für schwächere Vergrösserungen wegen ihres starken Brechungsvermögens in durchgehendem Licht beinahe schwarz, in auffallendem Licht weiss. Diese Eigenthümlickeit und noch mehr ihre Neigung kleeblattförmige Drillinge und kreuzförmige Vierlinge zu bilden, macht sie sehr auffallend und lässt auch kleine und spärlich gesäte Krystalle leicht finden.

Die Kreuze messen im Mittel 50 Mikr., die grössten bis 100 Mikr., diese letzteren sind regelmässig verzweigt und haben viele Aehnlichkeit mit den kreuzförmigen Rosetten des Magnetits mancher Hochofenschlacken (Fig. 12). Die Empfindlichkeit der Reaction ist von dem Säuregehalt der Lösung abhängig. Aus diesem Grunde erfolgt sie gewöhnlich schneller und reichlicher nach dem zweiten als nach dem ersten Verfahren. Ist zu viel freie Schwefelsäure zugegen, so hat man dieselbe durch ein Acetat unschädlich zu machen, wie unter 28 besprochen wurde.

Trotz unvermeidlicher Verluste bei der Zersetzung und Destillation des Minerals (Sodalith) wurde von einer Quantität Chlor, entsprechend 0.004 Mgr. Na Cl ausreichende Reaction erhalten.

Bromthallium ist unter dem Mikroskop kaum von Chlorthallium zu unterscheiden; die Form der Krystallindividuen stimmt vollkommen mit der des Chlorthalliums überein,

ebenso die Farbe, die kreuzförmigen Dendriten sind minder stark verästelt und kleiner, 15—25 Mikr.

Das Jodid hingegen und das Fluorid unterscheiden sich gut von der Chlorverbindung. Die Krystalle und Rosetten des Jodids sind, bei Übereinstimmung der Form, viel kleiner, als die des Chlorids — die grössten Rosetten messen 20 Mikr. — und so intensiv gelb gefärbt, dass in auffallendem Licht noch Kryställchen von nur 3 Mikr. Durchmesser an der Farbe erkannt werden können. In durchgehendem Licht scheinen so kleine Körner des Jodids fast schwarz. Das Fluorid ist leichter löslich, als die abgehandelten Verbindungen, es krystallisirt in stark abgeplatteten Octaëdern, auch in Combinationen von Octaëder mit Würfel und Rhombendodekaëder, die ebenfalls tafelförmig ausgebildet, und im Vergleich zum Thalliumchlorid sehr blass und durchscheinend sind.

Nachweis des Fluors.

34.

Das Fluor muss allemal durch Destillation seiner Verbindungen mit Schwefelsäure abgeschieden werden und zwar wird es dabei in Kieselflussäure übergeführt, nöthigenfalls unter Zusatz von pulveriger Kieselsäure oder Glaspulver. Einige fluorhaltige Silikate, wie Topas, Turmalin, Pyknit, müssen vor der Behandlung mit Schwefelsäure mit Soda (etwa dem doppelten Volumen des Pulvers) zusammengeschmolzen werden. Schmelzung mit Kaliumbisulfat oder Phosphorsalz würde auch aus diesen Verbindungen das Fluor austreiben, sie erfordert indessen eine für den hier vorliegenden Zweck allzu hohe Temperatur. Das Kieselfluorgas wird in verdünnter Schwefelsäure aufgefangen, die weniger schnell verdunstet, als Wasser; statt des für die Destillation von Salzsäure benutzten Deckgläschens dient hierbei der unter 21 erwähnte Deckel von dünnem Platinblech, dessen convexe Seite nach unten gekehrt wird. Bevor Schwefelsäure

zugesetzt wird, erwärmt man mit Soda geschmolzene Proben mit Essigsäure und dampft damit bis zur Trockniss ab, hierdurch wird das Spritzen vermieden, ohne dass man Verlust an Fluor erleidet und die Essigsäuredämpfe, die bei der nachfolgenden Destillation mit Schwefelsäure auftreten sind der Condensation der Kieselflussäure sehr günstig. Bei der Destillation erwärmt man etwa halb so lange, als man es für die Umwandlung von Fluoriden in Sulfate (21) zu thun pflegt, entfernt hierauf den Wassertropfen, der zur Kühlung gedient hat und überträgt den fluorhaltigen Säuretropfen auf eine gefirnisste Glasplatte oder auf eine polirte Schwerspathplatte, am einfachsten durch directe Berührung.

Geeignete Schwerspathplatten kann man ziemlich leicht aus Spaltstücken von 1.5—2 Cm. Kantenlänge und 2—3 Mm. Dicke anfertigen, wenn man die Vorsichtsmaassregel anwendet, sie mit Canadabalsam auf Glas zu kitten, um Spaltung nach dem zweiten Blätterdurchgang zu vermeiden. Sie werden auf einem feinen Wetzstein geschliffen, anfangs mit Wasser, zuletzt mit sehr wenig Oel; die letzte Politur giebt man mit weichem Leder und Zinnasche.

Als Reagens für Kieselflussäure dient mir Chlornatrium, wovon 1—2 Mgr. in den zu prüfenden Tropfen gethan werden. Ist die Kieselflussäure nicht allzu verdünnt, so entstehen anfangs zierliche sechsblättrige Rosetten (Fig. 2), bis 100 Mikr. gross, später hexagonale Tafeln und Prismen mit Pyramide, ca. Mikr. gross. Sie sind ein wenig trübe und zeigen eine schwache Rosafarbe (Contrastfarbe?). Das Kaliumfluosilikat ist viel weniger löslich, aber leider seiner ausserordentlichen Durchscheinendheit halber viel weniger gut wahrzunehmen, als das Natriumsalz. Nach dem beschriebenen Verfahren wurde mit 0.0036 Mgr. Fluor ausreichende Reaction erhalten.

Nachweis von Silicium und Bor.

35.

Die Prüfung auf Kiesel und Bor wird in ähnlicher Weise

ausgeführt, wie die auf Fluor, der wesentliche Unterschied besteht darin, dass hier neben der Schwefelsäure Flussäure zur Anwendung kommt und dass gefirnisste Glasplatten, resp. Schwerspathplatten unerlässlich sind, während für die Prüfung auf Fluor zur Noth gewöhnliche Objectgläser dienen können.

Das Verfahren bei der Destillation ist dasselbe, wie für Fluor (34). Als Fällungsmittel kann wiederum Chlornatrium dienen, wenn nur eins von beiden Elementen nachgewiesen werden soll; es giebt mit Borfluorwasserstoff genau dieselben Hexagone und Rosetten, wie mit Kieselfluorwasserstoff. 0.08 Mgr. SiO^2 konnte auf diesem Wege mit Leichtigkeit nachgewiesen werden, 0.04 Mgr. Borsäure gab noch ausreichende Reaction.

In den meisten Fällen handelt es sich darum Bor neben einer überwiegenden Quantität von Silicium aufzufinden (Axinit, Datolith, Turmalin), hier versagt dann das Chlornatrium seine Dienste.

Nach vielen vergeblichen Versuchen ist es mir gelungen zwei unterscheidende Reactionen zu finden, die ich in Ermangelung besserer mittheile.

Calciumfluosilikat giebt bei ziemlich weit fortgeschrittener Verdunstung linsenförmige Körperchen von etwa 20 Mikr. Länge; das Fluoborat erscheint unter denselben Umständen in Gestalt kurzer rhombischer Prismen, die sich meistens auf dem Querschnitt der Boabachtung darbieten, als scharfe Rauten von 10—15 Mikr. Länge auf 8—12 Mikr. Breite. Diese Reaction leistet sehr gute Dienste, wenn man nicht mit Schwefelsäure neben der Bor- und Kieselflussäure zu thun hat.

Kaliumfluosilikat giebt Krystalle, die dem regulären System angehören: Octaëder und Combinationen von Octaëder mit Würfel; Kaliumfluoborat erscheint, wenn die Säure ziemlich concentrirt ist, zuerst in Form schmaler, spiessiger Blättchen, später in Form von Rauten, deren Diagonalen im Verhältniss von 2 : 3 stehen. Sie messen 30 bis 50 Mikr. Oft sind die beiden stumpfen Ecken durch Kanten ersetzt, auch zeigen die grösseren bisweilen Andeutungen einer stumpfen Pyramide (Fig. 13). Das Kaliumfluobarat kommt

nach dem Fluosilikat zur Krystallisation, man hat hierauf Bedacht zu nehmen, wenn es gilt, Bor neben viel Kiesel aufzusuchen.

Wollte man dem Destillat, das man mit Schwefelsäure und Flussäure erhalten hat, ohne Weiteres Chlorkalium zufügen, so könnte es geschehen, dass gar kein Fluoborat zur Krystallisation gelangte; jedenfalls würde man Mühe haben, die wenigen Krystalle desselben unter der übergrossen Zahl von Octaëdern des Fluosilikats aufzusuchen. Es ist deshalb rathsam, den grössten Theil des Siliciums zu beseitigen.

Man erwärmt zunächst die mit Flussäure und Schwefelsäure gemischte Mineralprobe nur so weit, als nöthig ist um den grössten Theil des Kieselfluorids auszutreiben, das man nach 34 in Wasser oder verdünnter Schwefelsäure auffangen und mittelst Chlornatrium nachweisen kann. Die Operation wird hierauf nach abermaligem Zusatz von Flussäure wiederholt und dabei die Temperatur bis zum Rauchen der Schwefelsäure gesteigert, da der Siedepunkt des Borfluorwasserstoffs fast eben so hoch liegt, wie der von Schwefelsäure. Das Destillat erwärmt man bis auf 120°, fügt nach einigen Minuten zu dem Rückstand ein Wassertröpfchen, überträgt auf das Objectglas und prüft mit Chlorkalium auf Bor. Wenn nicht sofort die Rauten des Fluoborats entstehen, so ist dies noch kein Beweis für die Abwesenheit desselben, man hat die Eintrocknung des Probetropfens abzuwarten.

Nachweis des Wassers.

36.

In einzelnen Fällen kann es von Interesse sein, in sehr kleinen Mineralproben nach Wasser zu suchen Ein zehntelmilligramm Wasser ist mit einiger Behutsamkeit nach dem für Löthrohrproben üblichen Verfahren aufzufinden. Es kommt hierbei wesentlich darauf an, das kleine Wasserquantum auf einen möglichst kleinen Raum zusammenzudrängen

und zugleich sowohl das Entweichen, als das Eindringen von Wasserdampf in die Versuchsröhre zu verhüten.

Ich benutze Röhren von 3 Mm. im Lichten und 10 Cm. Länge, die einerseits zu einem Faden von 2 Cm. Länge und 0.5 Mm. Weite ausgezogen und hier, nach gelinder Erwärmung der ganzen Röhre und Durchsaugen von Luft mittelst einer auf das weite Ende aufgeschobenen Kautschukröhre, zugeschmolzen sind. Während die Röhre noch warm ist, wird die Mineralprobe eingebracht, die Röhre auf halber Länge ausgezogen und stumpf zugeschmolzen, wodurch die Möglichkeit des Eindringens von Wasser aus den Flammengasen vermieden wird. Jetzt wird das capillare Ende durch Alkohol abgekühlt und wenn sich kein Wasserbeschlag bildet, das stumpfe Ende mit der Mineralprobe darin bis zum gelinden Glühen erhitzt. Meistens bildet sich dann der Beschlag ohne künstliche Abkühlung an der Verengerung der Röhre. Durch Vorrücken der Flamme kann er in dem capillaren Theil zusammengetrieben werden.

Auch kann man für kleine Wassermengen eine Farbenreaction zu Hülfe nehmen, wofür freilich die Röhren vor dem Austrocknen vorbereitet werden müssen.

Alkoholische Fuchsinlösung lässt beim Verdunsten auf Glas ein undurchsichtiges gelbgrünes, metallisch glänzendes Häutchen zurück. Bringt man davon, mittelst eines dünnen Drahtes oder Glasfadens einen schmalen Streif oder einige kleine Tupfen in dem capillaren Theil der Röhre an und treibt den Wasserbeschlag gegen die grünen Flecke, so verlieren dieselben den Metallglanz und werden durchscheinend roth.

37.

Mit dem Vorliegenden ist dem Bedürfniss des Petrographen, wodurch diese Arbeit angeregt wurde, einigermaassen Genüge gethan. Einzelne Reactionen auf seltener vorkommende Metalle, die mir im Verlauf derselben unter die Hände kamen, spare ich für eingehende Prüfung und spätere Mittheilung

auf, falls sie nicht inzwischen von anderen Forschern gefunden sein sollten. Die vorgeschlagene Methode, auf Umwandlung der Silikate in Sulfate beruhend, schliesst sich der allgemein üblichen so eng an, dass ihre Ausdehnung auf eine grössere Zahl von Elementen nahe gelegt ist, und die Sicherheit, die schnelle Ausführung sowie der geringe Umfang der Apparate, welcher die Mehrzahl der mitgetheilten mikrochemischen Reactionen auszeichnet, würde mich länger bei diesem Gegenstand festgehalten haben, wenn nicht der zweite, schwierigere Theil meiner Aufgabe: Reactionen auf Schliffflächen zu finden, alle verfügbare Zeit in Anspruch nähme.

Ich habe mich aus diesem Grunde zur Veröffentlichung dessen entschlossen, was ich als sicher gestellt und zuverlässig glaubte ansehen zu dürfen. Mehrere der wichtigsten Reactionen: auf Kalium, auf Calcium, Magnesium und Aluminium habe ich bei den Übungen der Studirenden des Polytechnikums eingeführt und zwar mit gutem Erfolg, so dass ich diese mit vollem Vertrauen auch minder geübten Mikroskopikern empfehlen kann.

Fortgesetzte Anwendung der Methode wird zu Verbesserungen und Erweiterungen führen, deren Mittheilung mich sehr erfreuen und zu Dank verpflichten wird.

Anhangsweise füge ich einige der vielen Probeanalysen bei, die mit gewogenen Mineralmustern ausgeführt wurden, als Belege für den zu erreichenden Grad von Genauigkeit und zur Darlegung des Arbeitsverfahrens an Beispielen.

Probeanalysen.

38.

1. 0.2 Mgr. schwarzer Turmalin wurde mit Flussäure erwärmt. Die Einwirkung war sehr schwach. Nach starkem Glühen des Mineralpulvers löste sich die Hälfte. Die eingetrocknete Masse wurde mit Schwefelsäure erwärmt, bis diese grösstentheils verdampft war, mit Wasser aufgekocht und

die Lösung, deren Volumen ca. 0.015 C.C. betrug in eine Capillarpipette gebracht.

Die eine Hälfte derselben giebt, auf einem Objectträger verdunstend, deutliche Gipskryställchen und mit Caesiumchlorid soviel Alaun dass ein Fünftel davon genug gewesen wäre. Die andere Hälfte giebt, nach Übersättigung mit Ammoniak, auf Zusatz von Phosphorsalz binnen zwei Minuten eine grosse Anzahl hemimorpher Phosphatkrystalle.

Zu jedem der beiden Versuche wurden, unter Berücksichtigung der Verluste, höchstens 0.05 Mgr. Turmalin verwendet. Darnach ist erhalten, unter Annahme von 33 pCt. Al^2O^3, 1 pCt. CaO, 3.3 pCt. MgO im Turmalin:

Reichliche Reaction für	0.017	Mgr.	Al^2O^3
Ausreichende Reaction für	0.0017	»	MgO
und für	0.0005	»	CaO.

2. 0.2 Mgr. Sodalith wurden mit Schwefelsäure zersetzt, der Abdampfungsrückstand mit Wasser aufgekocht und die Lösung mittelst der Capillarpipette halbirt. In der einen Hälfte wurden spärliche aber gut ausgebildete Gipskrystalle gefunden und mit Caesiumchlorid gut ausgebildete aber nicht zahlreiche Alaunkrystalle erhalten.

Die andere Hälfte lieferte mit Platinchlorid reichlich Octaëder der Kaliumverbindung. Dies einigermaassen überraschende Resultat wurde in einer anderen Probe durch Controle mit Bor- und Kieselflussäure bestätigt. Die Reaction auf Natrium mit Kieselflussäure trat sehr spät, erst gegen Ende des Verdunstens ein und nicht so deutlich, wie zu wünschen gewesen wäre. Ein Zehntelmilligramm Sodalith entspricht:

0.03	Mgr.	Al^2O^3,
0.001	»	CaO,
0.0006	»	K^2O,
0.0025	»	Na^2O.

3. 0.1 Mgr. desselben Sodaliths wurden im bedeckten Platinschälchen mit Schwefelsäure der Destillation unterworfen. Sowohl das Destillat als der feuchte Rückstand (in

Wasser gelöst) gaben mit Thalliumsulfat ausgezeichnet deutliche Reaction auf Chlor. Nimmt man an, dass die Hälfte des Chlors in das Destillat übergegangen ist, so sind 0.05 Mgr. Sodalith in Rechnung zu bringen, entsprechend 0.0035 Mgr. Cl oder 0.006 Na Cl.

4. 0.2 Mgr. Apophyllit von Andreasberg gaben, mit Flussäure und Schwefelsäure im bedeckten Platinschälchen erwärmt, ein Destillat, das mit Na Cl reichlich Natriumfluosilikat abscheidet. Der Rückstand im Schälchen wird bis zur Trockniss abgedampft, nochmals mit ein wenig verdünnter Schwefelsäure bis zum Rauchen erhitzt, in Wasser gelöst und die Lösung halbirt. Die eine Hälfte giebt mit Caesiumchlorid Alaun (nicht reichlich) und zeigt viele Gipskrystalle. Phosphorsalz und Ammoniak geben keine Reaction. Die andere Hälfte giebt mit Platinchlorid reichliche Reaction auf Kalium. Natrium ist weder mit Ceriumsulfat noch mit Kieselflussäure nachzuweisen. 0.2 Mgr. Apophyllit entspr. 0.100 Mgr. Kieselsäure, wovon die Hälfte bequem hatte gefunden werden können; 0.1 Mgr. Apophyllit entspricht:

$$\left.\begin{matrix} 0.026 \ CaO \\ 0.005 \ K^2O \end{matrix}\right\} \text{(starke Reaction).}$$

Aluminium wird nur einmal, zu 1.5 pCt. angegeben (Rammelsberg, Mineralchemie, 1860; S. 506), wonach die noch eben ausreichende Reaction gegen Caesium durch 0.0015 Al^2O^3 hervorgerufen ist.

Weil möglicherweise die Flussäure Spuren von Al. enthalten konnte, wurde der Versuch mit 0.3 Mgr. desselben Apophyllits und concentrirter Schwefelsäure, ohne Zusatz von Flussäure wiederholt.

Das Destillat gab, als Reaction auf Fluor, mit Na Cl spärliche Krystallisation von Natriumfluosilikat und der Rückstand mit Caesiumchlorid viele Alaunkrystalle.

Rechnet man den Fluorgehalt des Apophyllits, der von 0.46 pCt. bis 1.71 pCt. angegeben wird (von Andreasberger Apophyllit zu 1.18 pCt., Rammelsb. S. 505) zu 1 pCt.,

so ergiebt sich als Grenzwerth für die Reaction mit Na Cl auf Fluor:

0.003 Mgr. Fl.

5. 0.4 Mgr. Boracit wurden mit Schwefelsäure destillirt, das Destillat gab mit Thalliumsulfat starke Reaction auf Chlor. Nach Zusatz von Flussäure zum Rückstand wurde die Destillation bei gelinder Hitze wiederholt; das Destillat gab mit Chlorkalium nur Spuren von Fluoborat.

Ein zweites, bei höherer Temperatur erhaltenes Destillat verhielt sich ebenso.

Ein drittes Destillat, für welches die Hitze bis zur Entwickelung grauer Dämpfe gesteigert wurde, gab mit Chlorkalium nach etwa fünf Minuten zahlreiche Rauten und langgestreckte Sechsecke.

Der Rückstand wurde in Wasser gelöst. Ein Viertel der Lösung gab mit Ammoniak und Phosphorsalz überreichliche Reaction auf Mg.

0.4	Mgr.	Boracit	= 0.034	Chlor
			= 0.250	Borsäure
0.1	»	»	= 0.031	Magnesia.

6. 0.2 Mgr. Axinit wurden mit Schwefelsäure und Flussäure im bedeckten Platinschälchen gelinde erwärmt; das Destillat gab mit Na Cl reichliche Krystallisation von Fluosilikat. Der Rückstand wurde mit Flussäure bei gesteigerter Temperatur nochmals der Destillation unterworfen, wobei die Dämpfe in verdünnter Schwefelsäure aufgefangen wurden. Dies Destillat wurde mit einem Tröpfchen Flussäure bis zur Bräunung der organischen Substanzen, die aus der Guttaperchaflasche stammen, erwärmt, mit Wasser auf gefirnisstes Glas gebracht und darin mit Chlorkalium nach 3 Minuten Rauten von Fluoborat neben einzelnen Octaëdern von Fluosilikat erhalten.

Der im Platinschälchen verbliebene Rückstand wurde mit Wasser aufgekocht; ein Drittel der Lösung gab mit Caesiumchlorid Alaun, das zweite Drittel gab ebensoviel, nach

vorheriger Reduction des Eisens durch ein paar Zinkspänchen, das letzte Drittel gab starke Reaction auf Magnesium. Gips wurde überall in reichlicher Menge angetroffen.

0.2 Mgr. Axinit entsprechen:
0.1 » SiO^2 (reichliche Reaction),
0.008 » BO^3;

0.07 Mgr. Axinit =

0.012 Al^2O^3
0.0014 MgO
0.013 CaO (reichliche Reaction).

7. 0.2 Mgr. Datolith gaben, in derselben Weise untersucht, reichliche Reaction auf Silicium und genügende Reaction auf Bor.

Im Rückstand zahllose Gipskrystalle, keine Reaction mit Caesiumchlorid und Phosphat in ammoniakalischer Lösung.

0.2 Mgr. Datolith enthalten 0.076 Mgr. SiO^2, 0.04 Mgr. BO^3 und 0.084 Mgr. CaO.

8. 0.5 Mgr. Pyknit von Altenberg wurden mit dem doppelten Volumen Soda geschmolzen, von der Schmelze kaum die Hälfte in starker Essigsäure gelöst, zur Trockne gedampft, und der Rückstand mit Schwefelsäure destillirt, was ohne Spritzen von statten ging. Das Destillat gab mit $NaCl$ starke Reaction auf Kieselflussäure. 0.2 Mgr. Pyknit entsprechen 0.037 Mgr. Fluor.

9. Feldspath aus grauem Porphyr von Elfdalen (Schweden). Wurde mit Fluorammonium und Salzsäure in Lösung gebracht, dann mit Schwefelsäure abgedampft. Viel Gips. Platinchlorid zeigte ziemlich viel Kalium an, Ceriumsulfat beide Alkalimetalle, das Natrium überwiegend.

10. Feldspath aus sogenanntem »Labradorporphyr" von Nanzenbach. Enthält wenig Calcium, neben vorherrschendem Natrium mehr Kalium, als das Elfdaler Gestein.

11. Feldspath des Corsits von Sta. Lucia, Corsica. Die Feldspathnadeln der Sphäroide haben dieselbe Zusammensetzung wie die unvollkommenen Krystallkörner der die

Sphäroide verkittenden Gesteinsmasse. Beide sind reich an Calcium, aber doch nicht reiner Kalkfeldspath, sie enthalten sowohl Kalium als Natrium in erheblicher Menge.

12. Bisilikat des Corsits von S. Lucia.

Das weissliche Pulver wird in Flussäure anfangs grün, dann verblasst es und löst sich. Dies Verhalten deutet auf Verunreinigung durch Feldspathsubstanz. Die Untersuchung ergab ausser viel Calcium und Magnesium (in Übereinstimmung mit Rosenbusch' Annahme von Hypersthen) einen ansehnlichen Gehalt an Kalium und Aluminium, und zwar in drei von verschiedenen Handstücken genommenen scheinbar reinen Splittern.

Die nachstehend aufgeführten Abbildungen sind grösstentheils nach Präparaten gezeichnet, die bei den unter 38, 1—12 beschriebenen Versuchen erhalten wurden.

Fig. 1. Caesiumalaun bei 100 facher Vergröss. (38.1).

» 2. Natriumfluosilikat, durch Überschuss von Chlornatrium präcipitirt. 100 f. Vg. (38.6).

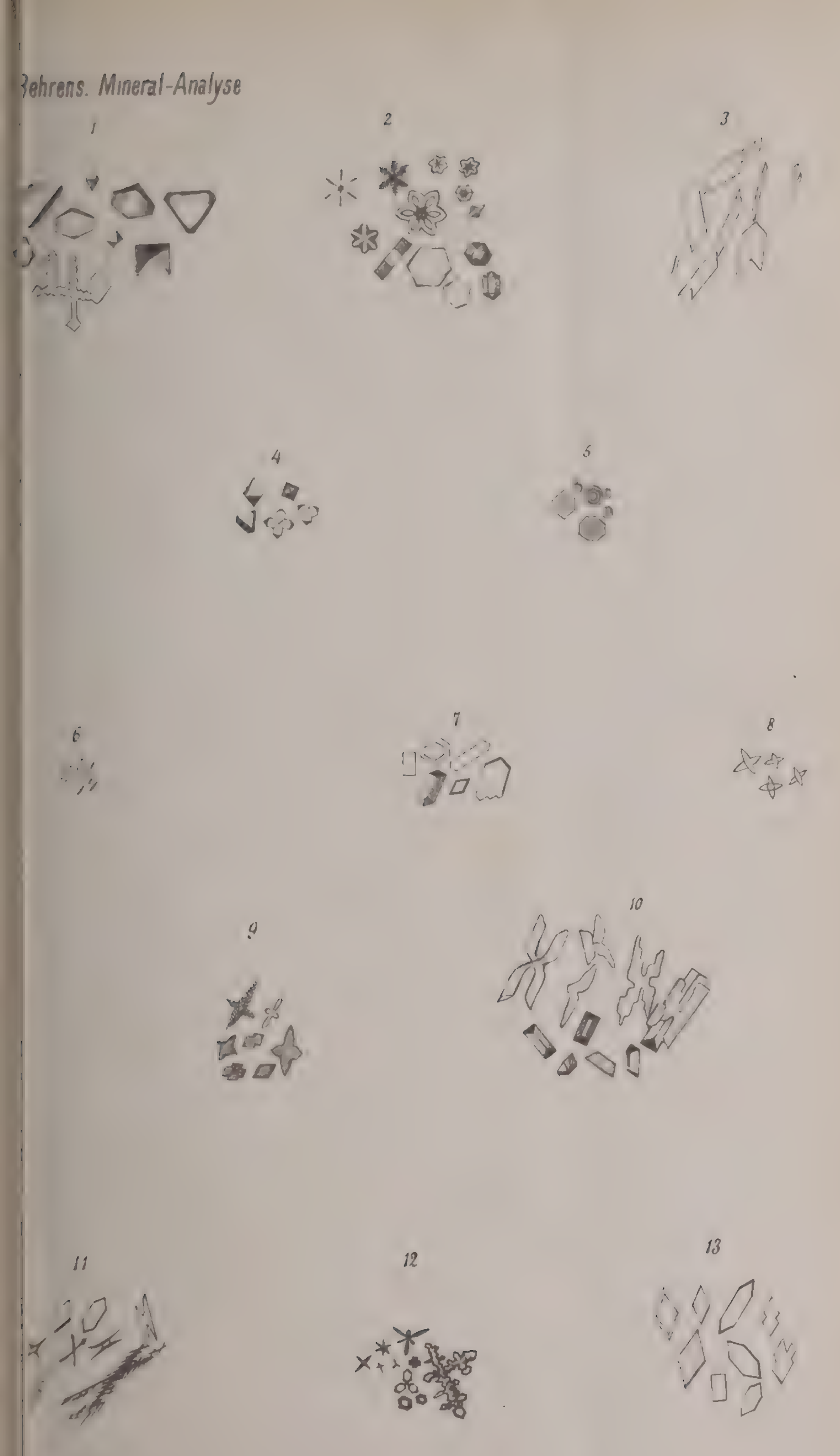
» 3. Gips. Die grösseren Krystalle sind aus einer Lösung, die wenig Schwefelsäure enthielt (38.6), die feinen Nadeln aus einer Lösung, die viel Salszäure enthielt. 200 f. Vgr.

» 4. Kaliumplatinchlorid. 120 f. Vgr. (38.2).

» 5. Kaliumcerosulfat, aus einer Kaliumsulfatlösung von 3 pro mille. 300 f. Vergr.

» 6. Natriumcerosulfat, aus 0.5 p. C. Lösung von Natriumsulfat. 500 f. Vgr. (38.11).

» 7. Lithiumcarbonat. 90 f. Vgr.



Th. H. Behrens del.



Fig. 8. Bariumsulfat, aus concentrirter Schwefelsäure krystallisirt. 300 f. Vgr.

» 9. Strontiumsulfat, aus conc. Schwefelsäure krystallisirt. 200 f. Vgr.

» 10. Ammonium-Magnesiumphosphat. Die grossen, rudimentären Krystallgebilde sind aus 2 p. C. Lösung von Magnesiumsulfat abgeschieden, die kleinen vollkommen ausgebildeten Krystalle aus einer stark verdünnten Lösung (38.1). 200 f. Vgr.

» 11. Chlorblei, bei gewöhnlicher Temperatur durch sehr verdünnte Salzsäure aus Nitrat-Lösung abgeschieden. 300 f. Vergr.

» 12. Chlorthallium. 200 f. Vergr. (38.2).

» 13. Kaliumfluoborat. 160 f. Vergr. (38.7).

TWEEDE RAPPORT DER COMMISSIE

VOOR

STANDAARDMETER EN -KILOGRAM,

BETREFFENDE DE

VERIFICATIE EN JUSTERING DER GEWIGTEN EN MATEN,

OP UITNOODIGING VAN DEN MINISTER VAN KOLONIËN,
BESTEMD VOOR WEST-INDIË.

NAMENS DE COMMISSIE UITGEBRAGT

DOOR

F. J. STAMKART.

Het eerste of voorloopig Rapport is voorgedragen in Maart 1875. Het zal dus noodig zijn de reden van het buitengewoon lange verwijl tot nu toe, kortelijk op te geven. Bij genoemd Verslag zijn de twee stuks gewigten van 1 kilogram niet goedgekeurd kunnen worden, omdat zij gebleken waren geen standvastig gewigt te bezitten, maar langzamerhand in gewigt toe te nemen. Het eene stuk ongeveer 16 mgr., het andere 7 mgr. in den tijd van één jaar: van April 1874 tot Maart 1875. Die stukken zijn toen, op last van den Minister van Koloniën, aan den Heer OLLAND teruggegeven, om daarvoor andere in de plaats te leveren.

De nieuwe stukken zijn in de tweede helft van het jaar 1875 ontvangen en omstreeks het einde van dat jaar gejusteerd en geverifiëerd. Zij hadden toen een geheel onberispelijk en fraai voorkomen. Uithoofde echter der opgedane ondervinding zijn zij toen, na eene eerste weging, stil weggesloten om eenigen tijd bewaard te blijven, en dan weder te worden gewogen.

De gewigts-toeneming der eerste stukken is gebleken het gevolg te zijn geweest van enkele stipjes op de oppervlakte, waar het koper niet door het vernis bedekt was geworden. Langzamerhand ontstond daar eenige oxydatie van het koper; donkere stipjes werden zichtbaar en de toeneming van gewigt was het gevolg.

Het is de vraag geweest of de zamenstelling van het vernis ook tot verzwaring aanleiding gegeven konde hebben? Maar het door den Heer OLLAND, volgens zijne opgave gebruikte vernis konde, naar getuigen van ons medelid A. C. OUDEMANS te Delft, dit gevolg niet hebben. Omtrent de nieuwe stukken verzekert de Heer OLLAND, in een schrijven van 22 Junij 1875, dat zij, ongevernist, *van eene wezenlijk zeldzame zuiverheid zijn. Onder honderd stukken zullen waarschijnlijk geen twee voorkomen, die beter zijn;* voegt hij er bij. De Commissie gelooft dit getuigenis van den Heer OLLAND gerust te mogen aannemen.

Te Delft zijn de stukken vergeleken met een zich daar bevindend verguld koperen gewigt, aangewezen door P″, en er is gevonden, in het luchtledige:

17 Novemb.	1875	Kilogr.	K = P″ + 0.06	mgr.	Kilogr.	+ K = P″ + 0.04 mgr.
8 en 9 Junij	1876	〃	〃 = P″ + 0.50	〃	〃	〃 = P″ + 0.28 〃
20 Julij	1876	〃	〃 = P″ + 0.41	〃	〃	〃 = P″ + 0.15 〃
16 Julij	1877	〃	〃 = P″ + 0.76	〃	〃	〃 = P″ + 0.92 〃

Eene geringe toeneming in gewigt scheen zich ook nu weder te vertoonen van ongeveer $^3/_4$ mgr. in $1^1/_2$ jaar.

Dit gaf aanleiding tot nog eene vergelijking der kilogrammen K en + K met het kilogram P″, den 24 Februarij 1881 te Delft, waarvan de uitslag was, in het luchtledige:

$$K = P'' + 2.44 \text{ mgr.} \qquad + K = P'' + 2.03 \text{ mgr.}$$

De bovenstaande vergelijkingen der kilogrammen met het stuk P″ zijn den 26sten Februarij 1881 in de vergadering der Akademie medegedeeld.

Het besluit lag voor de hand, dat de gewigten K toch weder iets zwaarder waren geworden, of dat mogelijker wijze het stuk P″ iets in gewigt was afgenomen.

Op voorstel der Commissie, is door de Natuurkundige Afdeeling der Akademie tot den Heer Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid het verzoek gerigt, dat het Platina-Kilogram nogmaals mogt ontzegeld worden om tot eene nieuwe vergelijking der gewigten K te dienen. Het verzoek is gereedelijk door Zijne Excellentie toegestaan en den 30sten April 1881 heeft de ontzegeling plaats gehad.

De Kilogrammen K en + K zijn nu in de eerste helft van Mei met het Platina-Kilogram vergeleken. De uitslag is geweest dat de geverniste gewigten geene merkbare verandering hebben ondergaan, terwijl het vergulde Kilogram P'' werkelijk, sedert zijne eerste vervaardiging, iets in zwaarte is afgenomen.

Bepaling van den inhoud en het soortelijk gewigt der Kilogrammen K en + K.

Hiertoe is het Kilogram K of + K gezet in een halven koperen standaard-Liter; de maat verder met gedistilleerd water gevuld en met een dekglas gesloten. De knop, die van het Kilogram afgeschroefd konde worden, is naast het stuk in de maat gelegd, zoodat alleen het massive koper water verplaatst heeft. De gevulde maat, met het Kilogram er *in*, is op eene weegschaal in evenwigt gebragt tegen *Tarra*; dus is:

$$^1/_2 \text{ Liter} + \text{dekglas} + K + W = \textit{Tarra}. \quad . \; . \; . \; (1)$$

Daarna is het Kilogram uit de maat genomen en de maat geheel met water gevuld en is er opnieuw evenwigt gemaakt tegen dezelfde *Tarra*, door *op* het dekglas een gewigt a te zetten; dit gaf:

$$^1/_2 \text{ Liter} + \text{dekglas} + W' + a = \textit{Tarra} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

dus is:

$$K + W = W' + a \; . \; . \; . \; . \; . \text{ in de lucht.}$$

Daar K + W in de maat hetzelfde volumen heeft als W′

zal men in het luchtledige hebben, als $r\,a$ de reductie tot het luchtledige voor het gewigt a is:

$$K + W + r\,a = W' + a;$$

en het gewigt van het verplaatste water zal zijn in het luchtledige:

$$W' - W = K - a + r\,a$$

$r\,a$ natuurlijk bij de lucht-temperatuur, barometerhoogte en dampdrukking.

Op deze wijze is gevonden den 10den November 1875.

Voor Kilogram K

Temperatuur water $= 13^0.2$ $W' - W = 0.122005$ kilogr.

en voor Kilogram + K

» » $= 14^0.9$ $W' - W = 0.122004$ »

Hieruit volgt met de digtheden van het water bij $13^0.2$ en $14^0.9$ respectievelijk 0.4994109 en 0.9991831:

Volume K bij $13^0.2 = 122076$ mm³, bij 0^0 121989 mm³ bij 15^0 122088 mm³
〃 +K 〃 $14^0.9 = 122104$ 〃 〃 0^0 122005 〃 〃 15^0 122105 〃
Soortelijk gewigt K bij $0^0 = 8.1974$
〃 〃 +K 〃 $0^0 = 8.1964$

Herleiding tot het luchtledigé.

Inhoud Kilogr. bij 15°C.	K = 122088 mm³	+K = 122105 mm³
» Platina stuk . .	46971 »	46971 »
Verschil bij t^0 . . .	K—P = 75117 mm³ + 5.67(t—15)	+K—P = 75134 mm³ + 5.67(t—15)

Zij b = barometerhoogte, herleid tot 0^0 C.,
t = de thermometerhoogte in de weegkast,
t' = de drooge thermometer van een psychrometer,
t'' = de natte thermometer van een psychrometer,
d = de dampdrukking,
$B = b - {}^3/_8\, d.$

Dan is:

$$Log.\ \text{Reductie} = Log\ (K-P) + Log\ B + 4.2310771-10 - Log\ (1 + 0.003665.\ t)$$

VERGELIJKING DER KOPEREN GEVERNISTE KILOGRAMMEN K EN +K MET DEN PLATINA-STANDAARD.

den 27sten en 28sten Junij 1876 in het Trippenhuis.

De verificaties zijn gedaan met de balans van BECKERS-SONS, behoorende aan de Polytechnische School.

1ste Wegingen door wijlen L. COHEN STUART.

Van deze kunnen alleen de gemiddelde resultaten medegedeeld worden; de details der enkele wegingen zijn door STUART medegenomen. Gevoeligheid der balans: 1 schaaldeel = 1.940 mgr.

Kilogram K

Datum 1876.	b mm.	t °	t' °	t'' °	d mm.	B mm.	Reductie. mgr.	K—P lucht. mgr.	K—P luchtled. mgr.	mgr.
28 Junij Voorm.	763.85	22.20	22.50	18.75	13.82	758.67	89.80	—91.64	—1.84	±0.133

Kilogram +K

Datum 1876.	b mm.	t °	t' °	t'' °	d mm.	B mm.	Reductie. mgr.	+K—P lucht. mgr.	+K—P luchtled. mgr.	mgr.
28 Junij Namidd.	763.05	23.00	23.50	19.30	13.40	758.02	89.48	—91.02	—1.54	±0.111

2de Wegingen door F. J. Stamkart.

Kilogram K.

Datum. 1876.	*b.* mm.	*t.* °	*t'* °	*t''* °	*d.* mm.	B. mm.	Reductie. mgr.	K—P. lucht. mgr.	K—P. luchtled. mgr.
26 Junij 11u10'	762.6	23.3	24.1	17.2	10.5	758.7	89.45	—91.81	—2.37
								—91.75	—2.15
Namiddag 1u20' en 2u10'	763.1	23.9	24.0	16.5	9.7	759.5	89.36	—91.52	—2.16
								—91.56	—2.20
								—91.59	—2.23
								—91.58	—2.22
								—91.68	—2.32
28 Junij 9u0'	763.1	21.6	21.0	17.5	12.8	759.0	89.28	—92.39	—2.41
								—92.46	—2.48
								—92.09	—2.11
						Gemiddeld	. . . . . .		—2.26

Kilogram +K.

Datum.	*b.*	*t.*	*t'*	*t''*	*d.*	B.	Reductie.	+K—P. lucht.	+K—P. luchtled.
27 Junij Namiddag 3u	763.3	23.9	24.1	16.7	9.8	759.5	89.38	—91.17	—1.79
								—91.47	—2.08
								—91.59	—2.21
								—91.41	—2.03
								—91.44	—2.06
28 Junij 8u25'	764.1	21.6	20.5	16.7	11.9	759.6	90.08	—92.97	—2.89
								—92.61	—2.53
								—92.58	—2.50
						Gemiddeld	. . . . . .		—2.26

Resultaat in het luchtledige. Junij 1876.

Stuart. . . . K = Pl — 1.84   + K = Pl — 1.54
Stamkart . . K = Pl — 2.26   + K = Pl — 2.26

Het verschil der uitkomsten tusschen Stuart en Stamkart is, zoowel voor K als + K, 0.4 à 0.7 milligram. Waaraan dit kan liggen is onzeker, want dezelfde balans is gebruikt en dezelfde manier van wegen is gevolgd.

Een gemiddeld resultaat kan al zeer weinig van de waarheid afwijken, te weten:

K = Pl — 2.05   + K = Pl — 1.90.

De vergelijkingen der Kilogrammen zijn in de maand Mei 1881, met het Platina-Kilogram, in het Trippenhuis herhaald geworden. Ditmaal is gebruik gemaakt van de balans door Becker Senior vervaardigd, nadat zij door Beckers-Sons nagezien en de messen opnieuw geslepen waren, volgens opdragt door het Bestuur der Akademie, op voorstel der Commissie.

De balans Becker Senior, die in 1838 te Parijs gebruikt is, om het Plat. Kilogram tegen het Archief-Kilogram te verifiëeren en later meermalen gediend heeft, is ook bij de verificatie in 1876 gebruikt, maar toen is zij niet meer voldoende woordhoudend bevonden; van daar het voorstel tot herstelling door de Heeren Beckers-Sons.

Nu is ook gebruik gemaakt van eene balans door Epkens, behoorende aan het Scheikundig Laboratorium te Amsterdam, en door den Hoogleeraar Gunning welwillend op verzoek der Commissie voor deze gelegenheid ten gebruike afgestaan.

Ook van deze balans zijn vooraf, door den instrumentmaker Olland, de messen opnieuw geslepen geworden.

Verificatie van K *en* + K *in Mei* 1881.

Kilogram K.

Balans Becker Senior. Gevoeligheid 1sd. = 0.459 mgr.

Datum. 1881.	*b.* mm.	*t.* °	*t'* °	*t''* °	*d.* mm.	B. mm.	Reductie. mgr.	K.—P. lucht. mgr.	K.—P. luchtled. mgr.
5 Mei.	767.2	16.7	15.6	12.6	9.3	763.7	92.04	—93.28	—1.24
2 tot 4u								—93.79	—1.75
								—93.86	—1.82
								—94.30	—2.26
								Gemiddeld K—P =	—1.77

Balans Epkens. Gevoeligheid 1sd. = 1.220 mgr.

Datum.	*b.*	*t.*	*t'*	*t''*	*d.*	B.	Reductie.	lucht.	luchtled.
7 Mei.	775.9	17.3	16.0	13.5	10.2	772.1	92.87	—94.04	—1.17
1u26'								—94.21	—1.34
tot 2u35'								—94.76	—1.89
								—94.70	—1.83
								—94.93	—2.06
								Gemiddeld K—P =	—1.66

Gemiddeld volgens de beide balansen:

K—Pl = — 1.71 mgr., in het luchtledige.

Kilogram +K.

Balans Becker Senior.

Datum. 1881.	*b.* mm.	*t.* °	*t'* °	*t''* °	*d.* mm.	B mm.	Reductie mgr.	K—P lucht. mgr.	K—P luchtled. mgr.
6 Mei.	769.9	15.6	15.1	12.8	9.9	766.2	92.71	—94.64	—1.93
1u 25								—95.00	—2.29
tot 3u 15								—94.30	—1.59
								—94.10	—1.39
								—94.70	—1.99
								Gemiddeld +K—Pl. =	—1.84

Balans Epkens.

Datum.	*b.*	*t.*	*t'*	*t''*	*d.*	B	Reductie	K—P lucht.	K—P luchtled.
7 Mei	776.1	17.4	16.0	13.5	10.2	772.3	92.88	—94.57	—1.69
2_u 45′								—95.03	—2.15
4u 0′								—95.09	—2.21
								—95.02	—2.14
								—95.92	—2.33
								Gemiddeld +K—P =	—2.10

Gemiddeld volgens de beide balanzen:

+K—Pl = — 1.97 mgr. in het luchtledige.

In Junij 1876 is gevonden K=Pl—2.05 mgr. +K=Pl—1.90 mgr.
In Mei 1881 » » K=Pl—1.71 » +K=Pl—1.97 »

De overeenkomst is voldoende om te besluiten dat de kilogrammen geene merkbare verandering van gewigt in 5 jaar tijds hebben ondergaan, en dus dat vernis, mits zorgvuldig aangebragt, een koperen stuk gewigt voldoende tegen veranderingen in de zwaarte beschut.

NB. Bij deze zelfde gelegenheid is ook het verguld koperen kilogram P″ van de Polytechnische School met het platina stuk vergeleken geworden, en is gevonden:

P″ = Pl — 3.80 in het luchtledige.

Met de bovenstaande waarden verbonden, volgt hieruit:

$$K = P'' + 2.08 \text{ mgr.} \qquad {}^{+}K = P'' + 1.83 \text{ mgr.}$$

Den 24sten Februarij jl. is te Delft gevonden:

$$K = P'' + 2.44 \text{ mgr.} \qquad {}^{+}K = P'' + 2.03 \text{ mgr.}$$

Tot op $^1/_3$ en $^1/_5$ milligram na, overeenstemmend.

Behalve de Kilogrammen, zijn in elk kistje nog 2 stuks van 2 kilogram elk, en 12 onderdeelen van het kilogram, te zamen ook weder 1 kilogram wegende: in alles 30 stuks gewigt, van het gram tot het dubbele Kilogram.

Van elk stuk kan de knop of het knopje afgeschroefd worden en ter justeering een platinadraadje er in gevoegd worden.

Het is een lange arbeid geweest en een zeer groot getal wegingen zijn gevorderd geworden ter justeering en verifieering van al de stukken, behalve van de beide Kilogrammen.

De vergelijking der Kilogrammen met het Platina-Standaard-Kilogram, waarvan de Akademie de bewaarster is, is gewis het voornaamste van den arbeid, waarvan verslag wordt gegeven. Deze vergelijking kan alleen door of namens de Akademie plaats vinden. De verificatie der onderdeelen of der dubbele Kilogrammen kan door ieder deskundige geschieden, zooals dit reeds in het voorloopig Rapport in 1875 is opgemerkt.

Het zal dus voldoende zijn, de uitkomst der wegingen en berekeningen te vermelden.

Er is aangenomen dat al de stukken, zoowel de dubbele Kilogrammen als de onderdeelen van het kilogram dezelfde soortelijke zwaarte bezitten, hetgeen waarschijnlijk zeer nabij het geval zijn zal.

De vier stuks gewigt, ieder à 2 kilogram, zijn, na vooraf gejusteerd te zijn, vergeleken met de som K + +K der beide Kilogrammen. Den 23sten Junij 1876 is gevonden:

$K_2 = K + {}^{+}K + 1.1$ mgr. midden uit 2 wegingen
$\dot{K}_2 = K + {}^{+}K + 1.8$ » » » » »
${}^{+}K_2 = K + {}^{+}K + 1.5$ » » » » »
${}^{+}\dot{K} = K + {}^{+}K + 3.0$ » » » » »

De temperatuur was $21^0.1$ C., de barometerhoogte, verminderd met $^3/_8$ dampdrukking, beliep 755.1 mm.

Onder aanneming dat de dubbele Kilogrammen hetzelfde soortelijk gewigt hebben als K en +K, moeten wegingen in het luchtledige dezelfde uitkomst hebben als in de lucht; en dan is volgens de verificatie op het Trippenhuis in Junij 1876 K + +K = 2 Pl — 3.9 mgr., en in 1881 2 Pl — 3.7 mgr., gemidd. — 3.8 mgr.; en dan is.

$$K_2 = 2\,P - 2.7 \text{ mgr.}$$
$$\underset{\cdot}{K}_2 = 2\,P - 2.0 \text{ »}$$
$$+K_2 = 2\,P - 2.3 \text{ »}$$
$$+\underset{\cdot}{K}_2 = 2\,P - 0.8 \text{ »}$$

De gemiddelde fout dezer wegingen kan op ± $1^1/_2$ mgr. geschat worden. Wij behouden dus alleen de volle mgr. als uitkomst.

Van de onderdeelen der Kilogrammen, zal het voldoende zijn de uitkomsten te vermelden:

	Mgr.		Mgr.
K_2	— 3	$+K_2$	— 2
$\underset{\cdot}{K}_2$	— 2	$+\underset{\cdot}{K}_2$	— 1
K	— 2	+K	— 2
H_5	+ 0.4	$+H_5$	+ 0.4
H_2	— 0.2	$+H_2$	— 0.2
$\underset{\cdot}{H}_2$	+ 0.5	$+\underset{\cdot}{H}_2$	+ 0.1
H	+ 0.6	+H	+ 0.4
D_5	+ 0.1	$+D_5$	+ 0.2
D_2	— 0.1	$+D_2$	+ 0.1
D	— 0.2	+D	0
$\underset{\cdot}{D}$	— 0.1	$+\underset{\cdot}{D}$	— 0.1
g_5	— 0.08	$+g_5$	+ 0.07
g_2	+ 0.09	$+g_2$	— 0.02
$\underset{\cdot}{g}_2$	+ 0.07	$+\underset{\cdot}{g}_2$	— 0.05
g	— 0.06	+g	— 0.03

De Kilogrammen zijn door K, de Hectogrammen door H, de Decagrammen door D, de grammen door g aangewezen; een cijfer, regts onder aan de letter gesteld, wijst het aantal aan: K_2 een stuk van 2 Kilogrammen, H_5 een stuk van 5 Hectogram, enz.

Daar, waar *twee* stuks van *gelijk* gewigt in eene doos voorkomen, is het eene, ter onderscheiding, door een klein *inktpuntje*, onder aan den bodem, aangewezen.

In de eene doos zijn de stukken door een *kruisje* (+) gemerkt, in de andere doos zonder merk.

Deze lijst is reeds in de jaren 1875 en 1876 opgemaakt.

In elk der doozen voor Curaçao of Suriname zijn twee koperen *Liters* met dekglazen: een *lage Liter*, waarvan de middellijn gelijk aan de hoogte is, en een *hooge Liter*, waarvan de hoogte het dubbel van de middellijn beloopt.

In het voorloopig Rapport is er reeds op gewezen, dat zulke maten niet meer *Standaarden* van inhoudsmaten zijn, in den zin zoo als dat vroeger het geval was, toen tusschen *lengtemaat*, *inhoudsmaat* en *gewigt* nog niet het eenvoudige verband bestond, dat thans bij het metrieke stelsel is in het leven geroepen. De boven genoemde Litermaten voldoen dan ook niet aan de bepaling dat de Nederlandsche inhoudsmaten haren juisteren inhoud zouden hebben bij de temperatuur van 15⁰ C.

Het onderzoek heeft plaats gehad bij temperaturen van 4 tot 15⁰, gemiddeld zeer nabij 10⁰. Bij deze gemiddelde temperatuur is gevonden:

1) Hooge Liter in de doos der gewigten met een kruisje (+) $\Big\}$ $i = 999229\ \text{mm}^3 + 47.176(t^0 - 10)\ \text{mm}^3$

2) Lage Liter in dito doos $\Big\}$ $i = 998950$ » $+45.623(t^0 - 10)$ »

3) Hooge Liter in de doos der gewigten zonder merkteeken $\Big\}$ $i = 999602$ » $+54.901(t^0 - 10)$ »

4) Lage Liter in dito doos $\Big\}$ $i = 1000829$ » $+62.707(t^0 - 10)$ »

Volgens de uitzettings-coëfficiënten in het tweede lid dezer uitdrukkingen, zouden de maten zeer nabij den inhoud van 1 Liter bezitten:

Hooge	+Liter N⁰. 1	bij	ongeveer	26⁰ C.
Lage	+Liter N⁰. 2	»	»	33⁰ »
Hooge	Liter N⁰. 3	»	»	17⁰ »
Lage	Liter N⁰. 4	»	»	— 3⁰ »

De eerste drie Liters kunnen in West-Indië ligtelijk in temperaturen komen waarbij zij den juisten inhoud van 1 Liter bezitten; de laatste blijft steeds te groot. Bij het gebruik der formule is dit echter hoegenaamd geen bezwaar.

Hierbij is evenwel eene opmerking *noodzakelijk*, te weten dat de gevonden inhouden *alleen gelden* bij het gebruik van *hetzelfde dekglas* op ieder der maten in het bijzonder, dat bij de wegingen gediend heeft. Om vergissingen te voorkomen, is in den onderrand van elke der maten in de doos der gewigten met een *kruis* (+) een klein vijlstreepje gemaakt, en op de koperen knoppen der bijbehoorende dekglazen een dito vijlstreepje.

Het zoude doelmatig zijn, de maten in het kistje der gewigten met een kruis, óók met een kruis (+) te merken, en gelijkerwijze ook de dekglazen boven op te teekenen.

In het kistje der ongemerkte gewigten zouden de maten en dekglazen ook overeenstemmend gemerkt kunnen worden.

RAPPORT

OVER EENE VERHANDELING VAN **Dr. W. J. VIGELIUS.**

GETITELD:

VERGLEICHEND-ANATOMISCHE UNTERSUCHUNGEN

UEBER DAS SOGENANNTE

PANCREAS DER CEPHALOPODEN.

De Commissie, benoemd om over de door den Heer VIGELIUS aangeboden verhandeling, getiteld »vergleichend-anatomische Untersuchungen über das sogenannte Pancreas der Cephalopoden'' advies uittebrengen, heeft de eer U dienaangaande het volgende te berichten.

Na een kort overzicht der literatuur, behandelt de Schrijver het eerst de groep der Dibranchiaten Decapoden, bij welke de als »pancreas'' bekende klierachtige aanhangselen der lever de hoogste ontwikkeling bereikt hebben, aangezien zij hier geheel en al tot zelfstandige klieren geworden zijn.

Het nauwkeurigst zijn die organen bij Sepia officinalis geschilderd en wel in de allereerste plaats de grof anatomische verhoudingen; dan die der bloedvaten getoetst aan door injectie verkregen praeparaten, en eindelijk de histologische structuur der klierwanden zelven.

Uit de gegeven beschrijving volgt, dat die zoogenoemde leveraanhangsels bij Sepia eene soort van acineuse klieren vormen, die door een zeer rijk haarvatenstelsel worden omsponnen. Vooral uitvoerig en nauwkeurig wordt het klierepithelium beschreven. Door vergelijking der verschillende toestanden, waarin dit epithelium door den Schrijver werd aangetroffen, trekt hij het besluit dat, bij de secretie, de kliercellen zelven, onder trapsgewijze veranderingen, ten slotte geheel te gronde gaan. Hoe het klierepithelium zich later weder opnieuw vormt, kon de Schrijver niet nagaan.

Uit diezelfde afdeeling der Dibranchiaten werden verder ook nog Rossia, Sepiola en Loligo onderzocht en de Heer VIGELIUS is uit die onderzoekingen tot het besluit gekomen, dat bij alle Dibranchiaten Decapoden het als Pancreas bekende klierachtige weefsel zich in meerdere of mindere mate in de gedaante van duidelijk zelfstandige klierachtige organen vertoont.

Dan gaat de Schrijver over tot de behandeling der tweede afdeeling der Dibranchiaten: de Octopoden. Hier treedt ons het pancreas niet meer als een eigen klierachtig orgaan tegen, maar het vormt bij deze afdeeling een in bouw gewijzigd gedeelte van de lever zelve. Het nauwkeurigst werd het geslacht Eledone onderzocht en bij de Octopoden, evenals bij de Decapoden, kwam Schrijver tot de overtuiging dat de kliercellen bij hare secretie te gronde gaan.

In het feit, dat bij de Octopoden het pancreas een veel minder hoogen trap van ontwikkeling vertoont dan bij de Decapoden, ziet de Schrijver een nieuw bewijs, dat werkelijk de Dibranchiaten Decapoden — zooals reeds door andere waarnemers langs andere wegen is aangetoond — een hoogeren trap van ontwikkeling vertoonen dan de Dibranchiaten Octopoden.

Ten slotte zij nog vermeld, dat in het zuivere uitscheidings-product der lever geen spoor van galstoffen is aan te toonen, wel daarentegen — en het duidelijkst bij Octopus — twee Enzyme, waarvan het eene in eene zure, het andere in eene alkalische oplossing in staat is, fibrine te verteren.

Een zeven-en-twintigtal, meerendeels keurig uitgevoerde, teekeningen luisteren deze verhandeling op.

De ondergeteekenden aarzelen dan ook niet om voor de opnem ng dezer verhandeling in de werken der Akademie te adviseeren.

De Commissie voornoemd:

Leiden en Utrecht,
Juni 1881.

C. K. HOFFMANN,
TH. W. ENGELMANN

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN DR. W. KAPTEIJN:

»OVER DEN VORM VAN ZEKERE DIFFERENTIALEN, WIER INTEGRALEN ZUIVER ALGEBRAISCHE FUNCTIËN ZIJN, EN OVER HUNNE INTEGRALEN".

UITGEBRACHT DOOR

D. BIERENS DE HAAN en F. J. VAN DEN BERG.

Schrijver stelt zich in de eerste plaats voor, de vraag te beantwoorden: wanneer is de integraal

$$\int (x - \alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^p \, dx ,$$

— waarin p een willekeurig gebroken voorstelt, welks noemer q is, — door zuiver stelkundige vormen voor te stellen?

Daarna past hij het gevondene toe op de binomische integraal

$$\int x^m (a + b x^n)^p \, dx,$$

en op de andere

$$\int x^m (a + b x^n + c x^{2n}) \, dx .$$

In § 1 gaat hij uit van eene stelling van LIOUVILLE, dat, onder de gestelde voorwaarde van zuiver stelkundige uitkomst, — als men $y^q = F(x)$, rationeel, stelt, — ook $\int y \, dx = y f(x) + C$

is, dat wil zeggen, dat dan y als factor in de waarde van deze integraal optreedt. Daaruit leidt Schr. af den eenig mogelijken vorm van y, zoowel als dien van $\int y\,dx$, altijd onder die voorwaarde van zuiver stelkundige vormen.

Dit wordt in § 2 toegepast op de algemeene functie

$$(x-\alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots + \lambda x^n)^p,$$

en daarbij worden er, na nauwkeurige discussie, en uitsluiting van onmogelijke gevallen, twee voorwaarden (8) en (9) gevonden, bij ieder van welke afzonderlijk deze functie tot den vorm van § 1 kan worden teruggebracht. Daarna wordt dan tevens de vorm der integralen (10) en (11) bepaald, die daarbij behooren, zoodra er aan ééne der genoemde voorwaarden is voldaan.

In § 3 gaat hij over tot den vorm

$$x^m (a + b x^n)^p,$$

en maakt de voorwaarden (12) en (13) op, zooals zij hier uit (8) en (9) volgen.

Ten opzichte van de voorwaarde (12) wordt bewezen, dat er eene noodzakelijke betrekking moet bestaan tusschen de exponenten m, n en p en een zeker getal i, dat met het aantal der gedeeltelijke breuken bij de ontwikkeling der integraal zamenhangt. Die betrekking is

$$(1+p)n + m + 1 = -i,$$

en tevens i een positief veelvoud van n.

Bij dit onderzoek blijkt, dat de tellers A_k van alle gedeeltelijke breuken verdwijnen moeten, tenzij $k = i =$ een veelvoud van n is.

Ten aanzien van de andere voorwaarde (13) komt Schrijver op eene dergelijke noodzakelijke betrekking tusschen m, n en i, maar thans zonder p, namelijk

$m - n + 1 = i$ en tevens i een positief veelvoud van n.

Het eerste gedeelte bewijst hij door aan te toonen, dat de tegenovergestelde onderstellingen, zoowel $m > i + n - 1$, als

$m < i + n - 1$, tot ongerijmdheden voeren: het tweede gedeelte wordt evenals boven bewezen (bij (12)).

Merken wij op dat beide vermelde betrekkingen niet alleen noodzakelijk, maar ook voldoende zijn tot het voorgestelde doel.

Daarna wordt nu tevens in beide gevallen de vorm der zuiver algebraïsche integraal zelve bepaald (15) en (17).

Slaan wij nu voor het oogenblik § 4 en 5 over, dan vinden wij in § 6 den vorm

$$x^m (a + b x^n + c x^{2n})^p$$

naar dezelfde methode behandeld, alléén natuurlijk voor het geval, dat de discriminant $b^2 - 4ac > 0$ is, daar anders die vorm in het voorgaande zoude begrepen zijn.

Schrijver begint weder met de voorwaarden (34) en (35) op te maken, zooals zij uit de vroegere (8) en (9) van § 2 hier voortvloeien.

In het eerste geval (34) vindt hij weder de noodzakelijke, maar ook voldoende, betrekking tusschen de exponenten m, n en p en den index i

$$(1 + p) 2n + m + 1 = -i,$$

en i een positief veelvoud van n;

waarbij die grootheden, in verband met de coëfficiënten a, b, c, nu nog eenen determinant $\triangle$ tot nul moeten maken, omdat het aantal verkregen vergelijkingen één meer is dan dat der tellers A, die daaruit bepaald moeten worden.

Wat daarentegen de vergelijking (35) betreft, is hier de noodzakelijke, maar evenzeer ook voldoende, betrekking tusschen de bekende grootheden, dat

zoowel $2n + i - (m + 1)$, als i zelf

een positief veelvoud van n moet zijn.

Hier wordt de uitkomst van iets anderen aard dan in § 3; want wel is waar voert de onderstelling $m > 2n + i - 1$ tot ongerijmdheid, maar zoowel aan die van $m = 2n + i - 1$, als aan de andere $m < 2n + i - 1$, kan hier wel voldaan worden.

Omdat er evenwel in het voorlaatste geval meer vergelijkingen zijn dan het aantal te bepalen standvastige coëfficiënten bedraagt, vindt men weder een determinant $\triangle'$, die nul moet worden, opdat die vergelijkingen niet met elkander in strijd zouden komen. In het laatste geval daarentegen komt die bizondere omstandigheid niet voor, en ontstaat er dus ook geen determinant.

Hier, namelijk voor de functie $x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p$, zijn er dus drie verschillende gevallen van integreerbaarheid onder zuiver algebraïschen vorm, en in die allen worden dan ook de integralen zelven aangegeven.

Keeren wij nu tot § 4 en 5 terug, die eigenlijk niet voldoen aan den titel dezer verhandeling, maar tot grootere volledigheid zijn bijgevoegd, en die wij dan ook, zooals straks blijken zal, ongaarne zouden missen.

Dan vinden wij eerst het bewijs van TCHEBICHEF vermeld, omtrent de beide eenige voorwaarden, dat eene binomische integraal door stelkundige en logarithmische functiën kan worden uitgedrukt. Daarmede volgt uit het voorgaande en uit een nader onderzoek in § 4, wanneer een integraal enkel door logarithmische functiën wordt bepaald; en ook hiervoor komen er twee verschillende voorwaarden te voorschijn.

Zoodra dit onderwerp in § 4 is afgehandeld, gaat Schrijver eindelijk in § 5 over tot het onderzoek van de onderscheidene substitutiën en herleidingen, die er telkens noodig zijn om eene binomische integraal tot enkel stelkundige en logarithmische functiën terug te brengen; hetgeen ook wel dus wordt uitgedrukt »om haar rationeel te maken". Zulks toch is het einddoel van zulke substitutiën, want bij rationeele vormen is de integratie altijd uit te voeren.

De uitkomsten waartoe Schrijver geraakt, zijn tweeled en komen met de bekende overeen; hij vindt ze voor

$$1^0.\quad \frac{m+1}{n} + p = \text{geheel},\quad \text{en } 2^0.\quad \frac{m+1}{n} = \text{geheel};$$

en wel afzonderlijk, $= 0$, $=$ positief en $=$ negatief geheel: voor beide vormen evenzeer.

Het substitutiën-stelsel bij binomische integralen is nu hetgeen Schrijver langs zijn weg bereikt heeft: het is hem bij deze integralen gelukt, maar nog niet bij die van den anderen vorm, in § 6 behandeld. Evenwel is hij bij deze laatste integralen dit doel toch voor een groot deel naderbij gekomen.

Voor dit onderwerp derhalve zijn des Schrijvers onderzoekingen van veel belang, en wij aarzelen niet de Afdeeling aan te raden, die in hare werken op te nemen.

OVER DEN VORM

VAN

ZEKERE DIFFERENTIALEN,

WIER INTEGRALEN ZUIVER ALGEBRAÏSCHE FUNCTIËN ZIJN EN OVER HUNNE INTEGRALEN.

DOOR

Dr. W. KAPTEIJN.

ALGEMEEN OVERZICHT.

In de eerste paragraaf wordt gesproken over $\int \sqrt[q]{F(x)}\, dx$, waarin $F(x)$ eene rationele functie van x en q een geheel positief getal voorstelt, en wordt aangegeven de meest algemeene vorm dien $F(x)$ kan bezitten zoo men aanneemt dat genoemde integraal zuiver algebraïsch zij. In de tweede paragraaf wordt een begin gemaakt met het onderzoek van de gevallen waarin tot genoemden vorm kan herleid worden de functie $(x - \alpha)^m (\beta + p\,x + \ldots \lambda\, x^n)^p$ waarin α, β, ... λ, m, n en p constanten zijn die zekere voorwaarden vervullen. Deze herleiding wordt in paragraaf 3 ten einde gebracht voor het bijzondere geval dat bovenstaande functie overgaat in $x^m (a + b\,x^n)^p$ en in paragraaf 6 voor het geval dat zij overgaat in $x^m (a + b\,x + c\,x^{2n})^p$. Tevens worden in deze paragrafen de corresponderende integralen bepaald in alle gevallen waarin deze uit zuiver algebraïsche functiën bestaan. Voorts worden in § 4 de gevallen onderzocht, waarin $\int x^m (a + b\,x^n)^p\, dx$ zuiver logarithmisch is en in § 5 de

algemeene reductieformules van $\int x^m (a + b x^n)^p \, dx$ ontwikkeld.

§ 1. Zijn twee grootheden x en y verbonden door eene vergelijking van den vorm:

$$y^q = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin q een geheel positief getal en $F(x)$ eene rationele functie van x voorstelt; zij verder gegeven dat $\int y \, dx$ waarin y eene der wortels van vergelijking (1) beteekent, eene algebraïsche waarde bezit, dan is bekend dat:

$$\int y \, dx = y f(x) + \text{constante} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

waarin $f(x)$ eene rationele functie van x beduidt.

Uitgaande van deze stelling die het eerst door LIOUVILLE bewezen werd en die gemakkelijk uit eene meer algemeene stelling van ABEL is af te leiden, kan de meest algemeene waarde van $F(x)$, die voldoet aan de vergelijking (2), op de volgende wijze gevonden worden.

Wanneer door eene functie $F(x)$ de voorwaarde (2) vervuld is, dan bestaat er tusschen de functies $F(x)$ en $f(x)$ eene betrekking die men vindt door de vergelijkingen (1) en (2) te differentiëren en daarna y en $\frac{dy}{dx}$ tusschen deze nieuwe vergelijkingen en (1) te elimineren. Deze betrekking is:

$$\frac{q\left(1 - \frac{df(x)}{dx}\right)}{f(x)} = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{F(x)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

of

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{q} \frac{d}{dx} . \, lg. \left\{ f(x)^q \, F(x) \right\} .$$

Daar nu $f(x)$ en $F(x)$ rationele functies zijn, is ook

de functie $f(x)^q \,.\, F(x)$ rationeel. Noemt men $x - a_1$, $x - a_2, \ldots x - a_l$ de verschillende eerste machtsfactoren dezer laatste functie en geeft door α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_l$ geheele getallen aan die positief nul of negatief zijn, dan kan men derhalve schrijven als algemeenste vorm dezer functie:

$$f(x)^q\, F(x) = B\,(x - a_1)^{\alpha_1}\,(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_l)^{\alpha_l}$$

waarin B eene constante beteekent.

Stelt men kortheidshalve het laatste product door het symbool

$$B \prod_{i=1}^{i=l} (x - a_i)^{\alpha_i}$$

en de som

$$\frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{\alpha_l}{x - a_l}$$

door het symbool

$$\sum_{i=1}^{i=l} \frac{\alpha_i}{x - a_i}$$

voor, zoo vindt men:

$$\frac{d}{dx}\, l.\, \{f(x)^q\, F(x)\} = \sum_{i=1}^{i=l} \frac{\alpha_i}{x - a_i}\,.$$

Hiermede is, zoo men stelt $\frac{\alpha_i}{q} = A_i$

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x - a_i}$$

waarin $q\,A_i$ altijd gelijk een geheel getal is.

Deze algemeenste vorm van $\frac{1}{f(x)}$ gesubstitueerd in de ver-

gelijking (3) geeft nu ook den algemeensten vorm van $F(x)$. Immers, voor (3) schrijvende:

$$\frac{d}{dx} l . F(x) = q . \sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i} + q \frac{d}{dx} lg . \sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i}$$

zoo vindt men terstond:

$$F(x) = C^q \left(\sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i} \right)^q \prod_{i=1}^{i=l} (x-a_i)^{qA_i}$$

waarin C^q eene willekeurige constante is, die dezelfde waarde heeft als B.

Uit het voorgaande volgt dat, wanneer y met x verbonden door vergelijking (1), $\int y\,dx$ alleen dan zuiver algebraïsche integralen zal bezitten, wanneer y tot den vorm:

$$C \sum_{i=1}^{i=l} \frac{A_i}{x-a_i} \prod_{i=1}^{i=l} (x-a_i)^{A_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

waarin $q\,A_i$ steeds een geheel getal is, kan herleid worden. Kan y tot deze vorm herleid worden, dan is omgekeerd $\int y\,dx$ steeds zuiver algebraïsch en wel gelijk:

$$C \prod_{i=1}^{i=l} (x-a_i)^{A_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

zoo men de constante der integratie buiten rekening laat.

§ 2. De voorgaande algemeene beschouwing wordt nu toegepast op de functie:

$$y = (x-\alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^p \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

waarin ondersteld wordt:

1⁰. dat de vergelijking

$$\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

alleen ongelijke wortels a_1, $a_2 \ldots a_n$ bezit;

2°. dat α eene constante is die verschilt van deze wortels;

3°. dat m en n geheele getallen zijn waarvan het laatste steeds positief is;

4°. dat p een willekeurig gebroken beteekent, wiens noemer q is.

De vraag is dus onder welke voorwaarden het mogelijk is de functie (6) tot den vorm (4) te herleiden.

Van de grootheden a_i in (4) voorkomende is bekend dat zij allen verschillend zijn; daaronder kunnen voorkomen de grootheden a_1, $a_2 \ldots a_n$ die de wortels zijn van de vergelijking (7) en bovendien andere a_{n+1}, a_{n+2}, .. a_l wier aantal onbepaald is. Onderzoekt men nu of het mogelijk is dat de functie y in den vorm:

$$C\left\{\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{A_{n+1}}{x-a_{n+1}}+\ldots\frac{A_l}{x-a_l}\right\}$$
$$(x-a_1)^{A_1}(x-a_2)^{A_2}\ .(x-a_n)^{A_n}(x-a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x-a_l)^{A_l}$$

kan geschreven worden, dan valt al dadelijk in het oog dat zoo men de wortels a_1, a_2, .. a_n van (7) in de functie y permuteert deze functie onveranderd blijft; bovenstaande uitdrukking moet dus ook deze eigenschap bezitten, derhalve moet

$$A_1 = A_2 = \ldots A_n\,.$$

Daar nu

$$\beta+\gamma x+\ldots\lambda x^n=\lambda(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

zoo is

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots\frac{1}{x-a_n}=\frac{d}{dx}\,lg\,(\beta+\gamma x+\ldots\lambda x^n)$$

waarmede dus de vorm (4) overgaat in:

$$\frac{C}{\lambda^{A_1}}\left\{A_1\,\frac{\gamma+\ldots n\lambda x^{n-1}}{\beta+\gamma x+\ldots\lambda x^n}+\frac{A_{n+1}}{x-a_{n+1}}+\ldots\frac{A_l}{x-a_l}\right\}$$
$$(\beta+\gamma x+\ldots\lambda x^n)^{A_1}(x-a_{n+1})^{A_{n+1}}\ldots(x-a_l)^{A_l}.$$

Deze vorm kan niet identiek zijn met y tenzij $A_1 = 1 + p$. Om dit te bewijzen zal eerst worden aangetoond dat A_1 niet gelijk nul kan zijn. Ware dit laatste toch het geval dan zouden de zoogenaamde kritieke punten (zie BRIOT en BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*) van dezen vorm niet overeenkomen met die van y. Liet men dan de veranderlijke x, uitgaande van een willekeurig punt, éénmaal een gesloten kromme doorloopen die één van de kritieke punten a_1, a_2, .. a_n der functie y en geen der punten a_{n+1}, .. a_l insluit, dan zou deze functie, zoodra x in het punt van uitgang teruggekeerd was, eene andere waarde verkregen hebben dan zij aanvankelijk bezat, terwijl de bovenstaande vorm tot hare oorspronkelijke waarde zou teruggekeerd zijn Hieruit volgt dat A_1 niet nul kan wezen.

Stelt men nu de functie y gelijk bovenstaande vorm en deelt beide leden dezer vergelijking door $(\beta + \gamma x + .. \lambda x^n)^p$ dan blijft in het eerste lid eene functie over die rationeel is en die niet nul of oneindig kan worden voor de waarden $x = a_1$, $x = a_2$, ... $x = a_n$ of met andere woorden die de punten a_1, a_2, ... a_n noch tot nullen, noch tot polen kan hebben. Hieruit volgt dat hetgeen na deeling in het tweede lid overblijft ook eene rationele functie moet zijn wier nullen en polen moeten verschillen van a_1, a_2 .. a_n. De orde dezer nullen of polen in het tweede lid moet dus nul wezen. Vereenigt men de breuken van het tweede lid tot eene enkele dan blijkt terstond dat de orde van deze nullen of polen is $A_1 - p - 1$; dus moet

$$A_1 = p + 1 .$$

Het is hieruit tevens duidelijk dat de grootheid $q A_1$ waarin q de noemer van p voorstelt, een geheel getal is. De vergelijking waarvan sprake was, is derhalve:

$$(x - a)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + .. n \lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + .. \lambda x^n} + \frac{A_{n+1}}{x - a_{n+1}} + .. \frac{A_l}{x - a_l} \right\}$$

$$(\beta + \gamma x + .. \lambda x^n) (x - a_{n+1})^{A_{n+1}} .. (x - a^l)^{A_l} .$$

Het eerste lid hiervan eene rationele functie zijnde, vindt men terstond dat alle coëfficiënten $A_{n+1}, \ldots A_l$ geheele getallen moeten zijn. In het eerste is voorts α een nul of pool van de m^e orde, dus moet α ook een nul of pool van dezelfde orde wezen van de functie in het tweede lid. Onderstelt men dus $a_{n+1} = \alpha$, dan is, indien A_{n+1} niet gelijk nul is, α een nul of pool van de orde $A_{n+1} - 1$ van het tweede lid, immers, zoo men de som der breuken schrijft als één breuk, dan zal in den noemer dezer breuken $(x-\alpha)^1$ voorkomen, terwijl de teller ondeelbaar is door $x - \alpha$. Indien evenwel $A_{n+1} = 0$ dan is het wel onmogelijk dat in het tweede lid een pool α, maar niet dat er een nul α optreedt, want, zoo men weêr de overblijvende breuken vereenigt tot eene enkele, is het mogelijk dat de teller dezer breuk door $(x-\alpha)^m$ deelbaar is. Er blijft dus nog over te onderzoeken onder welke voorwaarden aan eene der vergelijkingen

$$1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + \ldots n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha} + \frac{A_{n+2}}{x-a_{n+2}} + \ldots \frac{A_l}{x-a_l} \right\}$$

$$(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)(x-\alpha)(x-a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x-a_l)^{A_l},$$

$$(x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + \ldots n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n} + \frac{A_{n+2}}{x-a_{n+2}} + \ldots \frac{A_l}{x-a_l} \right\}$$

$$(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)(x-a_{n+2})^{A_{n+2}} \ldots (x-a_l)^{A_l}$$

in welke laatste m alleen positief is, kan voldaan worden.

Daar nu de eerste leden dezer vergelijkingen geheele functiën zijn, die geene der punten $a_{n+2}, \ldots a_l$ tot nullen hebben, zoo moet ook de orde van de nullen of polen $a_{n+2}, \ldots a_l$ in de tweede leden nul wezen, waaruit volgt:

$$A_{n+2} - 1 = \ldots = A_l - 1 = 0 .$$

Natuurlijk kunnen eenige der coëfficiënten $A_{n+2} \ldots A_l$ ook de waarde nul bezitten; dit geval kan men echter buiten beschouwing laten daar hierdoor het aantal termen dat geheel onbepaald is, slechts zou gereduceerd worden.

Stelt men de gevonden waarden van $A_{n+2}, \ldots A_l$ in de bovenstaande vergelijkingen en schrijft tevens

$$(x - a_{n+2}) \ldots (x - a_l) = x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$$

dan gaan zij over in deze:

$$1 = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \cdot \frac{\gamma + \ldots n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n} + \frac{1+m}{x-\alpha} + \frac{i\, x^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i} \right\}$$
$$(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)(x - \alpha)(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots . (8)$$

$$(x-\alpha)^m = \frac{C}{\lambda^{1+p}} \left\{ (1+p) \frac{\gamma + \ldots n\lambda x^{n-1}}{\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n} + \frac{i\, x^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i} \right\}$$
$$(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots \ldots (9)$$

Stelt men de vraag onder welke voorwaarden een polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ gevonden kan worden dat aan de vergelijkingen (8) of (9) voldoet, dan is deze algemeener dan die welker oplossing gezocht wordt. Beide vragen komen echter op hetzelfde neêr als men dit polynomium onderwerpt aan de bepaling dat het slechts enkelvoudige wortels mag bezitten die verschillen van $a_1, a_2, \ldots a_n$ en α.

Aan vergelijking (8) kan evenwel geen polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ voldoen dat gelijke wortels bezit, want dan zoude er eene waarde bestaan waarvoor dit en het polynomium $i x^{i-1} + \ldots A_{i-1}$ gelijktijdig nul zouden zijn. Door invoering dezer waarde zoude dan het tweede lid van vergelijking (8) nul worden, terwijl het eerste lid de constante waarde 1 zoude behouden, hetgeen ongerijmd is. Ook kan geen polynomium met enkelvoudigen wortel $a_1, a_2, \ldots a_n$ of α aan deze vergelijking voldoen omdat zoo men alsdan aan x deze waarde toekende weder het tweede lid de waarde nul zoude verkrijgen hetgeen strijdt tegen het bestaan der vergelijking (8).

Aan vergelijking (9) kan geen polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ voldoen dat gelijke wortels bezit die verschillen van α, want zoo men de waarde van een dezer gelijke wortels voor x substitueerde zoude men op eene ongerijmdheid stuiten. Dit-

zelfde zoude ook plaats hebben wanneer onder de enkelvoudige wortels van $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ eene der grootheden $a_1, a_2, \ldots a_n$ voorkwam.

In de laatste dezer vergelijkingen heeft m eene positieve waarde. Voor het geval dat $m = -1$ is kan men onmiddellijk besluiten dat het onmogelijk is aan de vergelijking (8) te voldoen daar alsdan het tweede lid een nul α bezit die in het eerste lid niet voorkomt.

De vraag blijft dus nog onder welke voorwaarden aan vergelijking (8 en onder welke voorwaarden aan vergelijking (9) kan voldaan worden, waarbij in het oog gehouden dient te worden dat bij de laatste vergelijking alleen die voorwaarden in aanmerking komen onder welke het polynomium $x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i$ geen enkel- of veelvoudigen wortel α bezit. Heeft men deze voorwaarden gevonden en tevens in die gevallen de waarden der grootheden i, A_1, $A_2, \ldots A_i$ bepaald, dan kan men daaruit besluiten tot de integraal van de differentiaal $y\,dx = (x-\alpha)^m (\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^p\,dx$ in alle gevallen waarin deze integraal algebraïsch is. Is nl. aan (8) voldaan dan is volgens (5) deze integraal:

$$C(x-a_1)^{1+p}(x-a_2)^{1+p}\ldots(x-a_n)^{1+p}(x-\alpha)^{1+m}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i)$$

of

$$\frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^{1+p}(x-\alpha)^{1+m}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots (10)$$

terwijl zoo aan (9) voldaan is, de integraal de waarde

$$\frac{C}{\lambda^{1+p}}(\beta + \gamma x + \ldots \lambda x^n)^{1+p}(x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots\ldots (11)$$

bezit.

§ 3. Beschouwt men de differentiaal $y\,dx = x^m (a + b x^n)^p\,dx$, dan vindt men door in (8) en (9) te stellen:

$$\alpha = 0, \quad \beta = a, \quad \gamma = \delta = \ldots = 0 \quad \lambda = b:$$

$$\frac{b^{1+p}}{C} = \left\{(1+p)\cdot\frac{n b x^{n-1}}{a + b x^n} + \frac{1+m}{x} + \frac{i x^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i}\right\}$$
$$(a + b x^n)\, x\, (x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i) \ldots\ldots\ldots (12)$$

en

$$\frac{b^{1+p}}{C} x^m = \left\{ (1+p) \frac{n\,b\,x^{n-1}}{a+b\,x^n} + \frac{i\,x^{i-1} + \,..\, A_{i-1}}{x^i + A_1\,x^{i-1} + \,..\, A_i} \right\}$$

$$(a + b\,x^n)(x^i + A_1\,x^{i-1} + \,..\, A_i). \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (13)$$

In het volgende zal verder onderzocht worden onder welke voorwaarden aan eene dezer vergelijkingen kan voldaan worden, daarbij aannemende dat a en b van nul verschillende constanten zijn, m in (13) slechts eene positieve waarde bezit en A_i van nul verschilt. Immers $A_i = 0$ zoude, zooals reeds opgemerkt is, in vergelijking (12) tot eene ongerijmdheid leiden, terwijl, wanneer men de hypothese $A_i = 0$ in vergelijking (13) uitsluit, daardoor voldaan is aan de voorwaarde dat het polynomium $x^i + A_1\,x^{i-1} + \,..\, A_i$ geene enkel- of veelvoudige wortel x mag bezitten.

Onderzoek van vergelijking (12).

Aan deze vergelijking kan niet voldaan worden tenzij

$$(1+p)\,n + 1 + m + i = 0$$

en

$$i = r\,n$$

waarin r voorstelt een geheel positief getal.

Om dit aan te toonen schrijve men kortheidshalve $(1+p)\,n + 1 + m = \varepsilon$; men vindt dan voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in (12) de daarachter geplaatste waarden:

x^{i+n} : $(\varepsilon + i)\,b$

x^{i+n-1} : $(\varepsilon + i - 1)\,b\,A_1$

. . . .

x^i : $(\varepsilon + i - n)\,b\,A_n + (m + 1 + i)\,a$

x^{i-1} : $(\varepsilon + i - n - 1)\,b\,A_{n+1} + (m + 1 + i - 1)\,a\,A_1$

. . . .

x^{i-n} : $(\varepsilon + i - 2\,n)\,b\,A_{2n} + (m + 1 + i - n)\,a\,A_n$

x^{i-n-1} : $(\varepsilon + i - 2\,n - 1)\,b\,A_{2n+1} + (m + 1 - i - n - 1)\,a\,A_{n+1}$

. . . .

$$
\begin{array}{lll}
x^{n+1} & : (\varepsilon + 1)\, b\, A_{i-1} + (m + 1 + n + 1)\, a\, A_{i-n-1} \\
x^{n} & : \varepsilon\, b\, A_i + (m + 1 + n)\, a\, A_{i-n} \\
x^{n-1} & : \qquad (m + 1 + n - 1)\, a\, A_{i-n+1} \\
x^{n-2} & : \qquad (m + 1 + n - 2)\, a\, A_{i-n+2} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x^{1} & : \qquad (m + 1 + 1)\, a\, A_{i-1} \\
x^{0} & : \qquad (m + 1)\, a\, A_i - \dfrac{b^{1+p}}{C}\,.
\end{array}
$$

Zal dus aan (12) voldaan worden, dan moeten al deze $i + n + 1$ coëfficiënten afzonderlijk nul zijn. Daar nu ondersteld is dat a en b van nul verschillende constanten zijn, zoo is een eerste vereischte dat $\varepsilon + i = 0$. Is hieraan voldaan, kan kan geene der grootheden $\varepsilon + i - 1$, $\varepsilon + i - 2, .. \varepsilon$ nul zijn. Dit in het oog houdende moet verder

$$
\begin{array}{l}
A_1 = A_2 = .. = A_{n-1} = 0 \\
A_{n+1} = A_{n+2} = .. = A_{2n-1} = 0 \\
A_{2n+1} = A_{2n+2} = .. = A_{3n-1} = 0
\end{array}
$$

Daar nu A_i niet mag verdwijnen, en dus geen der even aangehaalde coëfficiënten A mag wezen, volgt hieruit dat

$$i = r\, n$$

moet zijn: hiermede is dus het gestelde bewezen.

Neemt men nu aan dat de exponenten m, n en p zoodanig zijn, dat $\varepsilon + r\, n = 0$, waarin r eene der waarden 0, 1, 2, .. bezit, zoo kan steeds en op geene andere wijze, aan (12) voldaan worden dan door een polynomium

$$x^i + A_1\, x^{i-1} + .. A_i = x^{rn} + A_n\, x^{(r-1)n} + .. A_{rn}$$

waarin de coëfficiënten bepaald worden door de volgende vergelijkingen:

$$\frac{1}{A_n} = - \frac{\varepsilon + i - n}{m + 1 + i} \cdot \frac{b}{a} = \frac{n}{m + 1 + r\, n} \cdot a$$

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = \frac{2\,n}{m + 1 + (r - 1)\,n} \cdot \frac{b}{a}$$

$$\frac{A_{2n}}{A_{3n}} = \frac{3\,n}{m + 1 + (r - 2)\,n} \cdot \frac{b}{a}$$

. . . .

$$\frac{A_{(r-1)n}}{A_{rn}} = \frac{r\,n}{m + 1 + n} \cdot \frac{b}{a}$$

en

$$\frac{C}{b^{1+p}} = \frac{1}{(m + 1)\,a} \cdot \frac{1}{A_{rn}}.$$

Daar nu het polynomium gevonden is dat aan (12) voldoet, kan men ook de integraal van $x^m(a + b\,x^n)^p\,d\,x$ vinden indien de voorwaarde $\varepsilon + r\,n = 0$ vervuld is. Deze integraal is toch volgens (10):

$$\frac{C}{b^{1+p}}(a + b\,x^n)^{1+p}\,x^{1+m}\,(x^i + A_1\,x^{i-1} + \ldots A^i)$$

of

$$\frac{x^{1+m}}{(1 + m)\,a} \cdot (a + b\,x^n)^{1+p} \cdot \left\{ \frac{1}{A_{rn}}\,x^{rn} + \frac{A_n}{A_{rn}}\,x^{(r-1)n} + \ldots 1 \right\}.$$

Het onderzoek van (12) leidt dus tot dit besluit:

Wanneer in $x^m(a + b\,x^n)^p\,d\,x$ de exponenten m, n, p voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{m + 1}{n} + p = -1 - r\,(r = 0,\ 1,\ 2\,\ldots) \quad \ldots (14)$$

dan is de integraal dezer differentiaal algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{x^{1+m}}{(1+m)\,a}(a+b\,x^n)^{1+p}$$

$$\left\{\frac{n}{m+1+rn}\cdot\frac{2n}{m+1+(r-1)n}\cdots\frac{rn}{m+1+n}\cdot\frac{b^r}{a^r}x^{nr}+\right.$$

$$+\frac{2n}{m+1+(r-1)n}\cdots\frac{rn}{m+1+n}\cdot\frac{b^{r-1}}{a^{r-1}}\cdot x^{n(r-1)}+$$

$$\left.+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +1\right\}\ .\ .\ .\ (15)$$

Het is gemakkelijk in te zien dat zoo de voorwaarde (14) vervuld is, nooit eene der waarden $m+1+rn$, $m+1+(r-1)n,\,..\,m+1+n$, $m+1$, in de noemers der breuken voorkomende, nul kan wezen

Ter opheldering van het voorgaande het voorbeeld $x\,(a+b\,x^3)^{-\frac{14}{3}}\,d\,x$ nemende, vindt men, daar de voorwaarde (14) vervuld is, dat de integraal dezer differentiaal eene algebraïsche waarde zal bezitten. De waarde van r hier 3 zijnde, is voorts de integraal volgens (15):

$$\frac{x^2}{2a}(a+bx^3)^{-\frac{11}{3}}\left\{\frac{3\,.\,6\,.\,9}{11\,.\,8\,.\,5}\frac{b^3}{a^3}x^9+\frac{6\,.\,9}{8\,.\,5}\frac{b^2}{a^2}x^6+\frac{9}{5}\frac{b}{a}x^3+1\right\}.$$

Uit het onderzoek van vergelijking (13) *blijkt dat hieraan niet kan voldaan worden tenzij*

$$m-n+1=i \quad \text{en} \quad i=rn$$

waarin weêr r een geheel positief getal voorstelt

Om dit te bewijzen merke men vooreerst op dat aan (13) niet voldaan kan worden indien het positieve getal m grooter is dan $i+n-1$. Dit behoeft geen betoog Indien in de tweede plaats $m<i+n-1$ kan evenmin aan vergelijking (13) voldaan worden. Dit laatste wordt als volgt bewezen.

Schrijft men kortheidshalve $(1+p)\,n=\eta$ dan vindt men voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in het tweede lid der vergelijking (13) de daarachter geplaatste waarden:

$$
\begin{array}{ll}
x^{i+n-1} : & (\eta + i)\, b \\
x^{i+n-2} : & (\eta + i - 1)\, b\, A_1 \\
\ldots & \ldots \\
x^{i-1} : & (\eta + i - n)\, b\, A_n + i\, a \\
x^{i-2} : & (\eta + i - n - 1)\, b\, A_{n+1} + (i-1)\, a\, A_1 \\
\ldots & \ldots \\
x^{n} : & (\eta + 1)\, b\, A_{i-1} + (n+1)\, a\, A_{i-n-1} \\
x^{n-1} : & \eta\, b\, A_i + n\, a\, A_{i-n} \\
x^{n-2} : & (n-1)\, a\, A_{i-n+1} \\
\ldots & \ldots \\
x^{1} : & 2\, a\, A_{i-2} \\
x^{0} : & a\, A_{i-1}\ .
\end{array}
$$

Wanneer nu $m < i + n - 1$ of $m = i + n - 1 - q$, waarin q eene der waarden $1, 2, \ldots i + n - 1$ bezit, dan is het noodig, om aan (13) te voldoen, dat voldaan worde aan de vergelijkingen die ontstaan zoo men, in bovenstaande rij, de coëfficiënt van x^m of $x^{i+n-1-q}$ gelijk $\frac{b^{1+p}}{C}$ en alle overige gelijk nul stelt.

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt dan terstond dat $\eta + i = 0$ moet zijn. Is deze voorwaarde vervuld dan zijn de getallen $\eta + i - 1$, $\eta + i - 2, \ldots \eta$ van nul verschillend. Verder blijkt dat om aan de overige vergelijkingen te voldoen de waarden van

$$
\begin{array}{llll}
A_q\ , & A_{q+n}\ , & A_{q+2n}\ , & \ldots \\
A_n\ , & A_{2n}\ , & A_{3n}\ , & \ldots
\end{array}
$$

van nul verschillend, alle overige grootheden A gelijk nul moeten zijn.

Is nu $q < i$ of een veelvoud van n, bijvoorbeeld $q = r_1\, n$, en houdt men in het oog dat de waarde van A_i niet nul mag wezen en dat dus A_i een der termen van de twee zooeven vermelde reeksen van grootheden A moet zijn, dan kan men i niet anders stellen dan een veelvoud van n, dus $i = r\, n$.

Is daarentegen $q < i$ en geen veelvoud van n, dus

$q = r_1 n + q_1$, waarin q_1 eene der waarden 1, 2, . . $n - 1$ bezit, dan kan men i niet anders stellen dan

$$i = rn + q_1 \quad \text{of} \quad i = rn.$$

De eerste onderstelling leidt echter terstond tot eene ongerijmdheid. Immers als $q < i$ en dus $m = i + n - 1 - q > n - 1$ is, zoodat, in de boven voorkomende rij der coëfficiënten van x^{i+n-1} tot x^0, de $n - 1$ laatste, zijnde die van x^{n-2} tot x^0, niet bevatten den eenigen coefficient nl. dien van x^m, welke van nul moet verschillen, en deze $n - 1$ coëfficiënten dus allen gelijk nul moeten wezen, dan worden ook

$$A_{i-n+1}\,,\ A_{i-n+2}\,,\ \ldots\ A_{i-2}\,,\ A_{i-1}$$

of

$$A_{(r-1)n+q_1+1}\,,\ A_{(r-1)n+q_1+2}\,,\ \ldots\ A_{(r-1)n+q_1+n-2}\,,\ A_{(r-1)n+q_1+n-1}$$

allen gelijk nul gevonden. Let men nu op de waarde van q_1 dan zal eene dezer laatste coëfficiënten zijn A_{rn}. Voor deze coëfficiënt A_{rn} zoude men dus eene waarde nul vinden en dit is in strijd met hetgeen reeds werd opgemerkt, nl. dat, om aan de vergelijkingen te voldoen, A_n, A_{2n}, A_{3n} . . . dus ook A_{rn}, van nul verschillend moeten zijn.

Welke waarde derhalve q heeft (1, 2, . . $i + n - 1$), men kan aan de vergelijkingen niet voldoen tenzij $i = rn$. Maar ook deze hypothese leidt tot eene ongerijmdheid, daar zij strijdt met de noodzakelijke voorwaarde $\eta + i = 0$. Immers in deze vergelijking schrijvende $\eta = (1 + p)n$ en $i = rn$ volgt daaruit $1 + p + r = 0$ wat ongerijmd is daar p een breuk voorstelt en r een geheel getal.

Hiermede is dus bewezen dat m ook niet kleiner kan zijn dan $i + n - 1$. Derhalve is eene noodzakelijke voorwaarde om aan de vergelijking (13) te voldoen:

$$m = i + n - 1.$$

Indien nu $m = i + n - 1$, volgt uit de vergelijkingen, die de gelijkstelling der coëfficiënten van de verschillende machten van x en de beide leden van (13) oplevert dat aan deze vergelijking niet voldaan kan worden indien eene der

waarden $\eta + i$, $\eta + i - n$, $\eta + i - 2n$, .. nul is. Verder kan aan dit stel vergelijkingen niet voldaan worden tenzij:

$$\begin{aligned} A_{i-1} &= A_{i-2} = \ldots = A_{i-n+1} = 0 \\ A_{i-n-1} &= A_{i-n-2} = \ldots = A_{i-2n+1} = 0 \\ A_{i-2n-1} &= A_{i-2n-2} = \ldots = A_{i-3n+1} = 0 . \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

De eenige coëfficiënten A die dus kunnen blijven bestaan zijn:

$$A_i \ , \quad A_{i-n} \ , \quad A_{i-2n} \ \ldots .$$

Omdat voorts A_n, A_{2n}, .. van nul verschillend moeten zijn om aan de vergelijkingen te kunnen voldoen, blijkt dat men aan i geene andere waarde kan toekennen dan $i = rn$.

Heeft i deze waarde dan merke men nog op dat de waarden van $\eta + i$, $\eta + i - n$, $\eta + i - 2n$ ... nimmer nul kunnen zijn

Aan vergelijking (13) kan dus niet voldaan worden tenzij $m = i + n - 1$ en $i = rn$.

Zijn deze voorwaarden voldaan zoo kan steeds en op geene andere wijze, aan (13) voldaan worden dan door het polynomium

$$x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_{i-1} = x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn}$$

waarin

$$A_n = - \frac{i}{\eta + i - n} \cdot \frac{a}{b} = - \frac{rn}{\eta + (r-1)n} \cdot \frac{a}{b}$$

$$A_{2n} = - \frac{(r-1)n}{\eta + (r-2)n} \cdot \frac{a}{b} \cdot A_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{rn} = - \frac{n}{\eta} \cdot \frac{a}{b} \cdot A_{(r-1)n}$$

en

$$\frac{C}{b^{1+p}} = \frac{1}{(\eta + rn)\, b} .$$

Daar nu het polynomium gevonden is dat aan (13) voldoet, kan men ook de integraal van $x^m (a + b x^n)^p dx$ vinden, indien de voorwaarde $m + 1 = (r + 1) n$ vervuld is.

Deze integraal is toch volgens (11)

$$\frac{C}{b^{1+p}} (a + b x^n)^{1+p} (x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i)$$

of

$$\frac{1}{(q + r n) b} (a + b x^n)^{1+p} (x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn}).$$

Het onderzoek van (13) leidt dus tot dit besluit:

Wanneer in $x^m (a + b x^n)^p dx$ *de exponenten* m n *en* p *voldoen aan de voorwaarde*

$$\frac{m+1}{n} = 1 + r \; (r = 0,\ 1,\ 2 \ldots),\ \ldots\ldots \quad (16)$$

dan is de integraal dezer differentiaal algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{1}{n(1 + p + r) b} (a + b x^n)^{1+p} \Big\{ x^{rn} - \frac{r}{p + r} \frac{a}{b} \cdot x^{(r-1)n} +$$
$$+ \frac{r-1}{p+r-1} \cdot \frac{r}{p+r} \frac{a^2}{b^2} \cdot x^{(r-2)n} - \ldots + (-1)^r \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \ldots \frac{r}{p+r} \frac{a^r}{b^r} \Big\} \ldots (17)$$

Ter opheldering van het voorgaande: het voorbeeld $x^8 (a + b x^3)^p dx$ nemende, vindt men dat de integraal dezer differentiaal zuiver algebraïsch is, omdat de voorwaarde (16) voldaan is. De waarde van r hier 2 zijnde, is voorts de integraal, volgens (17):

$$\frac{1}{3(p+3) b} (a + b x^3)^{1+p} \Big\{ x^6 - \frac{2}{p+2} \cdot \frac{a}{b} x^3 + \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \Big\}.$$

Verder volgt nog uit het voorgaande dit:

Wanneer de exponenten aan geene der voorwaarden (14) *en* (16) *voldoen, is* $\int x^m (a + b x^n)^p dx$ *niet zuiver algebraïsch.*

§ 4. Uit de onderzoekingen van TCHEBICHEF (*Journal de Liouville*, Année 1853) is bekend, dat de eenige gevallen waarin $x^m(a + b\,x^n)^p\,d\,x$ eene integraal bezit, die door algebraïsche en logarithmische functiën kan worden uitgedrukt zijn die, waarin aan de volgende twee voorwaarden voldaan is:

$$\frac{1+m}{n} + p = \text{geheel} \qquad \frac{1+m}{n} = \text{geheel.}$$

Zondert men hiervan af de gevallen waarin de integraal zuiver algebraïsch is, nl.:

$$\frac{1+m}{n} + p = -1, -2, -3, .. \qquad \frac{1+m}{n} = 1,\ 2,\ 3, ..$$

dan houdt men voor de gevallen waarin de integraal zuiver logarithmisch of gemengd algebraïsch en logarithmisch is over:

$$\frac{1+m}{n} + p = 0,\ 1;\ 2, \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

$$\frac{1+m}{n} = 0,\ -1,\ -2, \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Onderzoek van de gevallen waarin aan de voorwaarde (18) *voldaan en de integraal zuiver logarithmisch is.*

Wanneer $1 + m + n\,p = i\,n$ $(i = 1,\ 2,\ 3\,..)$, kan de integraal door herhaalde toepassing der formule:

$$\int x^{i\,n - n\,p - 1}\,R^p\,d\,x =$$

$$= \frac{x^{(i-p-1)n}}{b\,i\,n}\,R^{p+1} - \frac{a(i-p-1)}{b\,i}\int x^{(i-1)n - n\,p - 1}\,R^p\,dx, \ldots (20)$$

waarin kortheidshalve $a + b\,x^n$ door R is vervangen, herleid worden tot algebraïsche functiën en $\int x^{-n\,p-1}\,R^p\,d\,x$. Daar nu in deze laatste integraal $1 + m + n\,p = 0$ is, zoo is het

duidelijk dat geene zuiver logarithmische integralen kunnen gevonden worden tenzij $1 + m + n p = 0$.

Omgekeerd, wanneer deze voorwaarde vervuld is, mag men echter niet besluiten dat de integraal zuiver logarithmisch is.

Schrijft men toch $p = r + \frac{p'}{q}$ waarin r een geheel getal q een geheel positief getal en p' een geheel getal kleiner dan q voorstelt, voorts $x = \frac{1}{u}$ en $b + a u^n = t^q$ dan is:

$$\int x^{-np-1} R^p \, dx = - \int \frac{(b + a u^n)^p}{u} \, du = - \frac{q}{n} \int \frac{t^{qr+p'+q-1}}{t^q - b} \, dt.$$

Ontbindt men de breuk in de laatste integraal voorkomende, dan ziet men gemakkelijk in dat genoemde integraal, dus ook $\int x^{-np-1} R^p \, dx$ zuiver logarithmisch is als:

$$- 2 < qr + p' + q - 1 < q$$

of

$$- \frac{q+1}{q} < r + \frac{p'}{q} < \frac{1}{q}$$

en in deze gevallen alleen.

Daar nu $np = - 1 - m =$ geheel, zoo kan men $q = n$ nemen, dus blijkt dat alleen wanneer

$$r + \frac{p'}{q} = p = - \frac{1}{n}, \; - \frac{2}{n}, \ldots - \frac{n-1}{n}, \; \ldots . \quad (21)$$

de integraal zuiver logarithmisch zal wezen.

De waarde dezer integraal $\int \frac{x^{k-1}}{R^{\frac{k}{n}}} \, dx \; (k = 1, 2, \ldots n - 1)$ bepaalt men door, als boven, de veranderlijke t in te voeren. Zij wordt dan:

$$- \int \frac{t^{n-k-1}}{t^n - b} \, dt$$

of

$$-\int\left(\frac{A_0}{t-b_1}+\frac{A_1}{t-\varrho_1 b_1}+\cdots\frac{A_{n-1}}{t-\varrho_1^{n-1} b_1}\right) dt$$

waarin $b_1 = \sqrt[n]{b}$ en ϱ_1 een oorspronkelijke wortel van den vergelijking $t^n = 1$ voorstelt terwijl

$$A_j = \frac{(\varrho_1{}^j\, b_1)^{n-k-1}}{n\,(\varrho_1{}^j\, b_1)^{n-1}} = \frac{1}{n\, b_1{}^k}\cdot\frac{1}{\varrho_1{}^{kj}}\ (j=0,\ 1,\ 2, \ldots n-1).$$

Integreert men nu en laat de constante weg dan vindt men:

$$-\frac{1}{n\, b_1{}^k}\, lg\left\{(t-b_1)\,(t-\varrho_1\, b_1)^{\frac{1}{\varrho_1{}^k}}\ldots(t-\varrho_1{}^{n-1}\, b_1)^{\frac{1}{\varrho_1{}^{(n-1)k}}}\right\}$$

of terugkeerende tot de oorspronkelijke veranderlijke:

$$-\frac{1}{n b_1{}^k} lg\left\{\left(\frac{1}{x}R^{\frac{1}{n}}-b_1\right)\left(\frac{1}{x}R^{\frac{1}{n}}-\varrho_1 b_1\right)^{\frac{1}{\varrho_1{}^k}}\cdot\cdot\left(\frac{1}{x}R^{\frac{1}{n}}-\varrho_1{}^{n-1}b_1\right)^{\frac{1}{\varrho_1{}^{(n-1)k}}}\right\}\ldots(22)$$

Onderzoek van de gevallen waarin aan de voorwaarde (13) *voldaan en de integraal zuiver logarithmisch is.*

Wanneer $1+m=-in\ (i=1,\ 2,\ 3\ldots)$ kan de integraal door herhaalde toepassing van de formule:

$$\int x^{-in-1}\, R^p\, dx = -\frac{x^{-in}\, R^{p+1}}{i\, n\, a}+\frac{b(p+1-i)}{i\, a}\int x^{-(i-1)n-1}\, R^p\, dx\ldots(23)$$

herleid worden tot algebraïsche functiën en $\int x^{-1}\, R^p\, d\, x$.

In deze laatste integraal is $1+m=0$, derhalve kunnen de integralen niet zuiver logarithmisch zijn tenzij $1+m=0$.

Is deze voorwaarde vervuld, dan is evenwel niet altijd de integraal zuiver logarithmisch.

Schrijft men weêr, als boven, $p = r + \frac{p'}{q}$, dan is zoo $R = t^q$:

$$\int x^{-1} R^p \, d\, x = \frac{q}{n} \int \frac{t^{q\, r + p' + q - 1}}{t^q - a} \, d\, t.$$

Deze integralen zullen alleen zuiver logarithmisch zijn wanneer:

$$-2 < q\, r + p' + q - 1 < q$$

of

$$-\frac{q+1}{q} < r + \frac{p'}{q} < \frac{1}{q}$$

waaruit blijkt dat alleen wanneer

$$r + \frac{p'}{q} = p = -\frac{q-1}{q}, \; -\frac{q-2}{q}, \ldots -\frac{1}{q} \; . \; . \; . \; (24)$$

de integraal zuiver logarithmisch zal wezen.

De waarde dezer integraal $\int \frac{d\, k}{x\, R^{\frac{k}{q}}}$ $(k = 1, 2, \ldots, q-1)$ bepaalt men door invoering der veranderlijke t. Zij wordt dan:

$$\frac{q}{n} \int \frac{t^{q-1-k}}{t^q - a} \, d\, t$$

of

$$\frac{q}{n} \int \left(\frac{A_0}{t - a_1} + \frac{A_1}{t - \varrho\, a_1} + \ldots \frac{A^{q-1}}{-\varrho^{\rho-1}\, a_1} \right) d\, t$$

waarin $a_1 = \sqrt[q]{a}$, ϱ eene oorspronkelijke wortel van de vergelijking $t^q = 1$ en

$$A_j = \frac{(\varrho^j\, a_1)^{q-1-k}}{q\, (\varrho^j\, a_1)^{q-1}} = \frac{1}{q\, a_1^k} \frac{1}{\varrho^{kj}} (j = 0, 1, 2, \ldots, q-1).$$

Integreert men nu en laat de constante weg, dan vindt men

$$\frac{1}{n\, a_1^k} lg \left\{ (t - a_1)\, (t - \varrho\, a_1)^{\frac{1}{\rho^k}} \ldots (t - \varrho^{q-1}\, u_1)^{\frac{1}{\varrho^{(q-1)k}}} \right\}$$

of terugkeerende tot de oorspronkelijke veranderlijke:

$$\frac{1}{n\,a_1{}^k}\,lg\left\{(R^{\frac{1}{q}}-a_1)\,(R^{\frac{1}{q}}-\varrho\,a_1)^{\frac{1}{\rho^k}}\,..\,(R^{\frac{1}{q}}-\varrho^{q-1}\,a_1)^{\frac{1}{\rho^{(q-1)k}}}\right\}\ldots(25)$$

§ 5. De algemeene reductieformules van $\int x^m\,(a+b\,x^n)^p\,d\,x$, ingeval deze integraal uit algebraïsche en logarithmische functiën of slechts uit een van beide bestaat, kunnen uit het voorgaande worden afgeleid.

1e *Geval* $\dfrac{m+1}{n}+p=$ geheel.

a. Zij in de eerste plaats $m+1+n\,p=0$. Schrijft men dan $p=r+\dfrac{p'}{n}$, waarin nu p' positief ondersteld wordt, zoo is

$$p=r+1-\frac{n-p'}{n}=r+1-\frac{k}{n}.$$

Men onderscheide nu 3 gevallen, n.l.:

1. $r+1$ *positief*. Dan herleidt men $\int x^{-n\,p-1}\,R^p\,d\,x$ door de formule:

$$\int x^{-n\,p-1}\,R^p\,d\,x=-\frac{x^{-n\,p}}{n\,p}R^p+b\int x^{n\,(1-p)-1}\,R^{p-1}\,d\,x$$

$r+1$ malen achtereenvolgens toe te passen. Men vindt op deze wijze:

$$\int x^{-np-1}R^p d x=-\frac{x^{-np}}{n\,p}\,R_p+b.\frac{x^{n(1-p)}}{n\,(1-p)}R^{p-1}+b^2.\frac{x^{n(2-p)}}{n\,(2-p)}R^{p-2}+..$$
$$+\,b^r\,.\,\frac{x^{n(r-p)}}{n\,(r-p)}\,R^{p-r}+b^{r+1}\int\frac{x^{k-1}}{R^{\frac{k}{n}}}\,d\,x.\;.\;.\;.\;.\;.\;(26)$$

2. $r+1$ *negatief*. Men vindt dan door de formule:

$$\int x^{-np-1}\,R^p\,d\,x=\frac{x^{-n(p+1)}}{b\,n\,(p+1)}\,R^{p+1}+\frac{1}{b}\int x^{-n(p+1)-1}\,R^{p+1}\,d\,x$$

- $(r+1)$ malen achtereenvolgens toe te passen:

$$\int x^{-np-1} R^p\, dx = \frac{x^{-n(p+1)}}{bn(p+1)} R^{p+1} + \frac{1}{b} \cdot \frac{x^{-n(p+2)}}{bn(p+2)} R^{p+2} +$$

$$+ \frac{1}{b^2} \cdot \frac{x^{-n(p+3)}}{bn(p+3)} R^{p+3} + \ldots + \frac{1}{b^{-r-2}} \cdot \frac{x^{-n(p-r-1)}}{bn(p-r-1)} R^{p-r-1} +$$

$$+ \frac{1}{b^{-r-1}} \int \frac{x^{k-1}}{R^{\frac{k}{n}}} dx. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

3. $r+1$ *nul*. Men vindt dan, zie (22):

$$\int \frac{x^{k-1}}{R^{\frac{k}{n}}} dx =$$

$$= -\frac{1}{nb_1^{\,k}} lg \left\{ \left(\frac{1}{x} R^{\frac{1}{n}} - b_1\right) \left(\frac{1}{x} R^{\frac{1}{n}} - \varrho_1 b_1\right)^{\frac{1}{\rho_1^{\,k}}} \ldots \left(\frac{1}{x} R^{\frac{1}{n}} - \varrho_1^{\,n-1} b_1\right)^{\frac{1}{\rho_1^{\,(n-1)k}}} \right\} \ldots (28)$$

b. Zij in de tweede plaats $m+1+np = in\ (i = 1, 2, 3\ldots)$. Dit geval kan tot het vorige nl. $m+1+np=0$ worden teruggebracht door i malen achtereenvolgens de formule (20) toe te passen. Men verkrijgt dan:

$$\int x^{in-np-1} R^p\, dx = \frac{R^{p+1}}{nb} \left\{ \frac{x^{(i-p-1)n}}{i} - \frac{i-p-1}{i} \cdot \frac{x^{(i-p-2)n}}{i-1} \cdot \frac{a}{b} + \right.$$

$$+ \frac{(i-p-1)(i-p-2)}{i(i-1)} \cdot \frac{x^{(i-p-3)n}}{i-2} \cdot \frac{a^2}{b^2} - \ldots +$$

$$\left. + (-1)^{i-1} \frac{(i-p-1)(i-p-2)\ldots(1-p)}{i\ (i-1)\ \ldots\ 2} \cdot \frac{x^{-np}}{1} \cdot \frac{a^{i-1}}{b^{i-1}} \right\} +$$

$$+ (-1)^i \cdot \frac{(i-p-1)(i-p-2)\ldots(-p)}{i(i-1)\ldots 1} \frac{a^i}{b^i} \int x^{-np-1} R^p\, dx \ldots (29)$$

c. Zij in de derde plaats $m+1+np = in\ (i = -1, -2, -3, .)$. De integraal is dan zuiver algebraïsch en wordt uitgedrukt door (15).

2de *Geval.* $\dfrac{m+1}{n} =$ geheel.

a. Zij in de eerste plaats $m+1=0$. Schrijft men

weder $p = r + \frac{p'}{q}$ waarin p' een geheel positief getal kleiner dan q voorstelt, dan is:

$$p = r + 1 - \frac{q - p'}{q} = r + 1 - \frac{k}{q}.$$

Men onderscheide als boven de volgende 3 gevallen:

1. $r + 1$ *positief.* Past men dan de formule:

$$\int \frac{R^p}{x}\, dx = \frac{R^p}{n p} + a \int \frac{R^{p-1}}{x}\, dx$$

$r + 1$ malen achtereenvolgens toe, zoo vindt men:

$$\int \frac{R^p}{x}\, dx = \frac{R^p}{np} + a \,.\, \frac{R^{p-1}}{n(p-1)} + a^2 \,.\, \frac{R^{p-2}}{n(p-2)} + \,.\,.\, a^r \frac{R^{p-r}}{n(p-r)} + $$

$$+ \; a^{r+1} \int \frac{dx}{x R^{\frac{k}{q}}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

2. $r + 1$ *negatief.* Door alsdan de formule:

$$\int \frac{R^p}{x}\, dx = - \frac{R^{p+1}}{a n (p + 1)} + \frac{1}{a} \int \frac{R^{p+1}}{x}\, dx$$

$-(r + 1)$ malen achtereenvolgens toe te passen komt:

$$\int \frac{R^p}{x}\, dx = - \frac{R^{p+1}}{a n (p+1)} - \frac{1}{a} \cdot \frac{R^{p+2}}{a n (p+2)} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{R^{p+3}}{a n (p+3)} - \ldots$$

$$- \frac{1}{a^{-r-2}} \frac{R^{p-r-1}}{a n (p-r-1)} + \frac{1}{a^{-r-1}} \int \frac{dx}{x R^{\frac{k}{q}}} \,.\,.\, (31)$$

3. $r + 1$ *nul.* Men vindt dan, zie (25)

$$\int \frac{dx}{x R^{\frac{k}{q}}} = \frac{1}{n a_1{}^k} lg \left\{ (R^{\frac{1}{q}} - a_1)(R^{\frac{1}{q}} - \varrho a_1)^{\frac{1}{\varrho^k}} \,.\,.\, (R^{\frac{1}{q}} - \varrho^{q-1} a_1)^{\frac{1}{\varrho^{(q-1)k}}} \right\} \,.\,.\, (32)$$

b. Zij in de tweede plaats $m + 1 = - i n$ $(i = 1, 2, 3 \,.\,.)$

Dit geval kan tot het vorige nl. $m + 1 = 0$ worden teruggebracht door i malen achtereenvolgens de formule (23) toe te passen. Men verkrijgt dan:

$$\int x^{-in-1} R^p \, dx = -\frac{R^{p+1}}{na} \left\{ \frac{x^{-in}}{i} + \frac{p+1-i}{i} \cdot \frac{x^{-(i-1)n}}{i-1} \frac{b}{a} + \right.$$

$$+ \frac{(p+1-i)(p+1-(i-1))}{i(i-1)} \cdot \frac{x^{-(i-2)n}}{i-2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \ldots$$

$$\left. + \frac{(p+1-i)(p+1-(i-1))\ldots(p+1-2)}{i(i-1)\ldots 2} \cdot \frac{x^{-n}}{1} \cdot \frac{b^{i-1}}{a^{i-1}} \right\}$$

$$+ \frac{(p+1-i)(p+1-(i-1))\ldots(p+1-1)}{i(i-1)\ldots 1} \frac{a^i}{b^i} \int \frac{R^p}{x} dx \,.. (33)$$

c. *Zij in de derde plaats* $m + 1 = -i\,n$ $(i = -1, -2, -3, \ldots)$. De integraal is dan zuiver algebraïsch en wordt uitgedrukt door (17).

§ 6. Bij het onderzoek van $\int x^m (a + bx^n + cx^{2n})^p \, dx$ waarin a, b en c van nul verschillende constanten beteekenen wordt ondersteld dat $b^2 - 4ac \gtrless 0$, daar uit het voorgaande deze integraal gevonden kan worden indien $b^2 = 4ac$.

De gevallen waarin de bovenstaande integraal zuiver algebraïsch is worden volgens paragraaf 2 gevonden door na te gaan in welke gevallen kan voldaan worden aan eene der beide volgende vergelijkingen:

$$1 = \frac{C}{c^{1+p}} \left\{ (1 + p) \frac{nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}}{a + bx^n + cx^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+m}{x} + \frac{ix^{i-1} + \ldots A_{i-1}}{x^i + \ldots A_i} \right\} (a + bx^n + cx^{2n}) x (x^i + \ldots A_i) \,.. (34)$$

$$x^m = \frac{C}{c^{1+p}} \left\{ (1 + p) \cdot \frac{nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}}{a + bx^n + cx^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{ix^{i-1} + \ldots A^{i-1}}{x^i + \ldots A_i} \right\} (a + bx^n + cx^{2n})(x^i + \ldots A_i) \,.. (35)$$

daarbij aannemende dat A_i van nul verschilt en m in (35) eene positieve waarde bezit.

Onderzoek van vergelijking (34).

Aan deze vergelijking kan niet voldaan worden tenzij

$$2(1+p)n+1+m+i=0$$

en

$$i=rn$$

waarin r *voorstelt een geheel positief getal, grooter dan nul.*

Om dit aan te toonen schrijve men kortheidshalve

$$2(1+p)n+1+m=\eta \qquad (1+p)n+1+m=\varepsilon,$$

men vindt dan voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in (34) de daarachter geplaatste waarden:

x^{2n+i} : $(\eta+i)c$

x^{2n+i-1} : $(\eta+i-1)cA_1$

. . . .

x^{n+i} : $(\eta+i-n)cA_n+(\varepsilon+i)b$

x^{n+i-1} : $(\eta+i-n-1)cA_{n+1}+(\varepsilon+i-1)bA_1$

. . . .

x^i : $(\eta+i-2n)cA_{2n}+(\varepsilon+i-n)bA_n+(1+m+i)a$

x^{i-1} : $(\eta+i-2n-1)cA_{2n+1}+(\varepsilon+i-n-1)bA_{n+1}+$
$+(1+m+i-1)aA_1$

. . . .

x^{2n} : $\eta cA_i+(\varepsilon+n)bA_{i-n}+(1+m+2n)aA_{i-2n};$

x^{2n-1} : $(\varepsilon+n-1)bA_{i-n+1}+(1+m+2n-1)aA_{i-2n+1}$

. . . .

x^n : $\varepsilon bA_i+(1+m+n)aA_{i-n}$

x^{n-1} : $(1+m+n-1)aA_{i-n+1}$

. . . .

x^1 : $(1+m+1)aA_{i-1}$

x^0 : $(1+m)aA_i-\dfrac{c^{1+p}}{C}$.

Door $i = 0$ in de vergelijking (34) te substitueren vindt men terstond eene ongerijmdheid. Stelt men $i > 0$ dan zal aan deze vergelijking voldaan worden zoo bovenstaande $2n + i + 1$ coëfficiënten allen gelijk nul zijn.

Een eerste vereischte hiervoor is $\eta + i = 0$; wanneer aan deze voorwaarde voldaan is, zullen $\eta + i - 1$, $\eta + i - 2, \ldots \eta$, $\varepsilon + i$, $\varepsilon + i - 1, \ldots \varepsilon$ allen van nul verschillende waarden bezitten. Hieruit volgt in de tweede plaats dat allen coëfficiënten A behalve

$$A_n\,,\quad A_{2n}\,,\quad A_{3n}\;\ldots$$

nul moeten zijn. Daar nu A_i niet nul mag wezen, moet wel aangenomen worden $i = rn$, waarmede het gestelde bewezen is.

Wanneer nu de exponenten m, n en p zoodanig zijn dat

$$2(1+p)n + 1 + m + rn = 0 \quad (r = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

zoo kan steeds en op geene andere wijze aan vergelijking (34) voldaan worden dan door een polynomium

$$x^i + A_1 x^{i-1} + \ldots A_i = x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn}$$

waarin de coëfficiënten bepaald worden door de volgende vergelijkingen :

$$\left.\begin{array}{l}
(\eta+(r-1)n)cA_n + (\varepsilon+rn)b = 0 \\
(\eta+(r-2)n)cA_{2n} + (\varepsilon+(r-1)n)bA_n + (1+m+rn)a = 0 \\
(\eta+(r-3)n)cA_{3n} + (\varepsilon+(r-2)n)bA_{2n} + (1+m+(r-1)n)aA_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta cA_{rn} + (\varepsilon+n)\,b\,A_{(r-1)n} + (1+m+2n)\,a\,A_{(r-2)n} = 0 \\
\varepsilon b\,A_{rn} + (1+m+n)\,a\,A_{(r-1)n} = 0
\end{array}\right\}\ldots(36)$$

Het aantal vergelijkingen dat ter bepaling der r onbekenden A_n, $A_{2n}, \ldots A_{rn}$ dient, één grooter zijnde dan het aantal onbekenden, moet noodzakelijk de volgende determinant waarin η en ε door hunne waarden vervangen zijn, en van

de voorwaarde $q + rn = 0$ gebruik gemaakt is, gelijk nul wezen:

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccccccc} . & . & . & . & . & . & -nc, & -(1+p)nb \\ . & . & . & . & . & -2nc, & -(2+p)nb, & (1+m+rn)a \\ . & . & . & . & -3nc, & -(3+p)nb, & (1+m+(r-1)n)a, & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ -rnc, & -(r+p)nb, & (1+m+2n)a, & . & . & . & . & . \\ -(1+r+p)nb, & (1+m+n)a, & . & . & . & . & . & . \end{array}\right|$$

Het onderzoek van (34) leidt dus tot dit besluit:

Wanneer in $x^m(a + bx^n + cx^{2n})^p\,dx$ de exponenten voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{1+m}{n} + 2p = -2 - r \quad (r = 1, 2, 3, ..) \quad . \; . \quad (37)$$

en de coëfficiënten aan de vergelijking $\Delta = 0$, dan is de integraal dezer differentiaal zuiver algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{1}{(1+m)\,a\,A_{rn}}(a + bx^n + cx^{2n})^{1+p}\,x^{1+m}\,(x^{rn} + A_n\,x^{(r-1)n} + \,..\, A_{rn})$$

waarin de grootheden A voldoen aan de vergelijkingen (36).

Ter opheldering van het voorgaande het voorbeeld

$$x\,(a + bx + cx^2)^{-\frac{7}{2}}\,dx$$

nemende, vindt men, daar de voorwaarde (37) vervuld is, dat de integraal dezer differentiaal zuiver algebraïsch is, wanneer de coëfficiënten voldoen aan de betrekking

$$\left|\begin{array}{cccc} . & . & -c, & \frac{5}{2}b \\ . & -2c, & \frac{3}{2}b, & 5a \\ -3c, & \frac{1}{2}b, & 4a, & . \\ -\frac{1}{2}b, & 3a, & . & . \end{array}\right| = 0$$

of $b^4 = 24\,a\,c\,(b^2 + 2\,a\,c)$. De waarde der integraal is dan:

$$\frac{1}{2\,a\,A_3}\,(a + b\,x + c\,x^2)^{-\frac{3}{2}}\,x^2\,(x^3 + A_1\,x^2 + A_2\,x + A_3)$$

waarin:

$$A_1 = \frac{5}{2}\,\frac{b}{c} \qquad A_2 = \frac{15}{8}\,\frac{b^2}{c^2} + \frac{5}{2}\,\frac{a}{c} \qquad A_3 = \frac{5}{16}\,\frac{b^3}{c^3} + \frac{15}{4}\,\frac{a\,b}{c^2}$$

Onderzoek van vergelijking (35).

Aan deze vergelijking kan niet voldaan worden tenzij

$$2\,n + i - 1 - m = r_1\,n \quad (r_1 = 0,\ 1,\ 2, \ldots, r + 1)$$

en

$$i = r\,n \quad (r = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Om dit te bewijzen merke men op dat aan (35) niet kan voldaan worden, wanneer $i = 0$ en verder indien het positieve getal m grooter is dan $2\,n + i - 1$. Er blijven dus slechts twee mogelijke gevallen over, nl. $m = 2\,n + i - 1$ en $m < 2\,n + i - 1$, die achtereenvolgens zullen besproken worden.

1⁰. $m = 2\,n + i - 1$ of $2\,n + i - 1 - m = r_1\,n\,(r_1 = 0)$.

Schrijft men de coëfficiënt $\dfrac{C}{c^{1+p}}$ van (35) in het eerste lid en werkt het tweede lid dezer vergelijking uit, dan vindt men voor de coëfficiënten der verschillende machten van x in dit laatste lid, zoo men stelt $2\,(1 + p)\,n = \eta$ en $(1 + p)\,n = \varepsilon$, de waarden die daarachter geplaatst zijn:

$x^{2n+i-1}: (\eta + i)\,c$

$x^{2n+i-2}: (\eta + i - 1)\,c\,A_1$

. . . .

x^{n+i-1} : $(\eta + i - n)\, c\, A_n + (\varepsilon + i)\, b$

x^{n+i-2} : $(\eta + i - n - 1) c\, A_{n+1} + (\varepsilon + i - 1)\, b\, A_1$

. . . .

x^{i-1} : $(\eta + i - 2\,n)\, c\, A_{2n} + (\varepsilon + i - n)\, b\, A_n + i\, a$

x^{i-2} : $(\eta + i - 2n - 1) c\, A_{2n+1} + (\varepsilon + i - n - 1) b\, A_{n+1} + (i-1) a A_1$

. . . .

x^{2n} : $(\eta + 1) c\, A_{i-1} + (\varepsilon + n + 1) b\, A_{i-n-1} + (2n+1) a\, A_{i-2n-1}$

x^{2n-1} : $\eta\;\, c\;\, A_i + (\varepsilon + n)\, b\, A_{i-n} + 2\, n\, a\, A_{i-2n}$

. . . .

x^n : $(\varepsilon + 1)\, b\, A_{i-1} + (n + 1)\, a\, A_{i-n-1}$

x^{n-1} : $\varepsilon\, b\, A_i + n\, a\, A_{i-n}$

x^{n-2} : $(n - 1)\, a\, A_{i-n+1}$

. . . .

x^1 : $2\, a\, A_{i-2}$

x^0 : $a\, A_{i-1}$

Ten einde nu aan vergelijking (35) te voldoen moet de eerste dezer coëfficiënten gelijk $\frac{c^{1+p}}{C}$, alle overige gelijk nul gesteld worden. De vergelijkingen die op deze wijze ontstaan, vorderen dat alle coëfficiënten A behalve

$$A_n, \quad A_{2n}, \quad A_{3n}, \ldots$$

nul zijn. Hieruit volgt, daar A_i van nul moet verschillen, dat het alleen mogelijk is aan (35) te voldoen indien $i = r\, n$.

Neemt men aan dat de exponenten m, n en p zoodanig zijn dat $m = 2\, n + i$ en $i = r\, n$, dan kan steeds en door geen ander polynomium aan (35) voldaan worden dan door

$$x^i + A_1\, x^{i-1} + \ldots A_i = x^{rn} + A_n\, x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn},$$

waarin de coëfficiënten bepaald worden door de volgende vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}(\eta+(r-1)n)cA_n+(\varepsilon+rn)b=0\\(\eta+(r-2)n)cA_{2n}+(\varepsilon+(r-1)n)bA_n+rna=0\\(\eta+(r-3)n)cA_{3n}+(\varepsilon+(r-2)n)bA_{2n}+(r-1)naA_n=0\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\\eta cA_{rn}+(\varepsilon+n)bA_{(r-1)n}+2naA_{(r-2)n}=0\\\varepsilon bA_{rn}+naA_{(r-1)n}=0\end{array}\right\}\dots(38)$$

die in vorm volkomen overeenstemmen met (36).

Evenals vroeger is het aantal onbekenden één geringer dan het aantal vergelijkingen; het is dus noodig om aan deze vergelijkingen te kunnen voldoen, dat de volgende determinant nul zij.

$$\Delta'=\left|\begin{array}{cccccccc}. & . & . & . & . & (2p+r+1)c, & (p+r+1)b & \\ . & . & . & . & (2p+r)c, & (p+r)b, & ra & \\ . & . & . & (2p+r-1)c, & (p+r-1)b, & (r-1)a, & . & \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ (2p+2)c, & (p+2)b, & 2a & . & . & . & . & \\ (p+1)b, & a & . & . & . & . & . & \end{array}\right|$$

Dit eerste gedeelte van het onderzoek van (35) leidt dus tot het volgende besluit:

Wanneer in $x^m(a+bx^n+cx^{2n})^p\,dx$ e exponenten voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{m+1}{n}=2+r\;(r=1,\,2,\,3,..)\;\dots\dots(39)$$

en de coëfficiënten aan de vergelijking $\Delta'=0$, dan is de integraal zuiver algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{1}{(2p+r+2)n}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}(x^{rn}+A_n\,x^{(r-1)n}+\dots A_{rn})$$

waarin de grootheden A voldoen aan de vergelijkingen (38).

Neemt men als voorbeeld $x^5(a+bx^2+cx^4)^p\,dx$, dan

blijkt dat de voorwaarde (39) vervuld is. Wanneer dus ook de coëfficiënten voldoen aan de betrekking:

$$\begin{vmatrix} 2(1+p)c, & (2+p)b \\ (1+p)b, & a \end{vmatrix} = 0$$

of

$$2ac = (2+p)b^2$$

dan is de integraal algebraïsch en gelijk aan:

$$\frac{1}{2(3+2p)c}(a+bx^2+cx^4)^{1+p}\left(x^2 - \frac{2+p}{2(1+p)} \cdot \frac{b}{c}\right).$$

2^0. $m < 2n+i-1$ of $2n+i-1-m = r_1 n$ $(r_1 = 1, 2, \ldots)$

Zij $m = 2n+i-1-q$ $(q = 1, 2, \ldots 2n+i-1)$ dan is het noodig, om aan (35) te voldoen, dat voldaan worde aan de vergelijkingen die ontstaan zoo men in de rij coëfficiënten onder 1^0. vermeld, de coëfficiënt van x^m gelijk $\dfrac{c^{1+p}}{C}$ en alle overige gelijk nul stelt.

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt dan terstond dat $\eta + i = 0$ moet zijn. Is deze voorwaarde vervuld dan zijn de getallen $\eta + i - 1$, $\eta + i - 2, \ldots \eta$, $\varepsilon + i$, van nul verschillend. Verder blijkt dat om aan de overige vergelijkingen te voldoen de waarden van

$$A_q, \quad A_{q+n}, \quad A_{q+2n} \quad \ldots.$$

$$A_n, \quad A_{2n} \quad . \quad A_{3n} \quad \ldots.$$

van nul verschillend, alle overige grootheden A gelijk nul moeten zijn.

Is nu $q > i$ of een veelvoud van n en houdt men in het oog dat A_i niet nul mag wezen, dan kan men i niet anders stellen dan een veelvoud van n, dus $i = rn$. Is daarentegen $q < i$ en geen veelvoud van n, dus $q = r_1 n + q_1$

($q_1 = 1,\ 2, \dots n - 1$) dan kan men i niet anders stellen dan

$$i = rn + q_1 \quad \text{of} \quad i = rn.$$

De eerste dezer hypothesen brengt mede dat

$$A_{r_1 n + q_1},\quad A_{(r_1+1)n+q_1},\ \dots\ A_{rn+q_1},$$

en

$$A_n \quad ,\quad A_{2n} \qquad ,\ \dots\ A_{rn}$$

blijven bestaan; daar echter $q < i$ volgen uit de laatste $2n - 1$ vergelijkingen:

$$A_{i-1} = A_{i-2} = \dots = A_{i-n+1} = 0$$

$$A_{i-n-1} = A_{i-n-2} = \dots = A_{i-2n+1} = 0.$$

Onder de eerste dezer beide reeksen komt nu, indien $i = rn + q_1$ is, stellig A_{rn}, onder de laatste $A_{(r-1)n}$ voor, die van nul verschillend behooren te zijn. Hieruit volgt dat de hypothese $i = rn + q_1$ tot eene ongerijmdheid leidt.

De tweede hypothese $i = rn$ leidt echter ook tot eene ongerijmdheid indien $q = r_1 n + q_1$ ($q_1 = 1,\ 2, \dots n - 1$).

Immers zoo $q > i$, dan zoude uit eene der $2n - 1$ laatste vergelijkingen voor eene der grootheden

$$A_{i-1},\ A_{i-2}, \dots A_{i-n+1} \text{ of } A_{i-n-1},\ A_{i-n-2}, \dots A_{i-2n+1}$$

eene van nul verschillende waarde gevonden worden, terwijl voor deze zelfde grootheid uit de vorige vergelijkingen stellig eene waarde nul zoude worden afgeleid.

Verder zoo $q < i$, zoude uit de laatste $2n - 1$ vergelijkingen volgen

$$A_{i-1} = A_{i-2} = \dots = A_{i-n+1} = 0$$

$$A_{i-n-1} = A_{i-n-2} = \dots = A_{i-2n+1} = 0.$$

Hieronder bevinden zich de waarden $A_{(r-1)n+q_1}$ en $A_{(r-2)n+q_1}$

waaronder er stellig één is, waarvoor uit de $i + 1$ overige vergelijkingen eene waarde van nul verschillende volgt.

Alleen derhalve wanneer $\eta + i = 0$, $i = rn$ en $q = r_1 n$ ($r_1 = 1, 2, \ldots r + 1$) zijn er oplossingen van (35) mogelijk in dit tweede geval. De vraag blijft dus over of er steeds een polynomium gevonden kan worden dat aan (35) voldoet indien alle deze voorwaarden vervuld zijn. Om deze vraag op te lossen voere men deze condities in (35) in; men vindt dan door ontwikkeling van het tweede lid, zoo weder de coëfficiënt $\frac{c^{1+p}}{C}$ in het eerste lid wordt overgebracht; voor de coëfficiënten van de verschillende machten van x in het tweede lid de daarachter geplaatste waarden:

$$x^{(r+1)n-1} : \; - n c A_n + \frac{rn}{2} b$$

$$x^{rn-1} : \; - 2nc A_{2n} + \left(\frac{rn}{2} - n\right) b A_n + rna$$

$$x^{(r-1)n-1} : \; - 3nc A_{3n} + \left(\frac{rn}{2} - 2n\right) b A_{2n} + (r-1) na A_n$$

. . . .

$$x^{2n-1} : \; - rnc A_{rn} + \left(\frac{rn}{2} - (r-1)n\right) b A_{(r-1)n} + 2na A_{(r-2)n}$$

$$x^{n-1} : \; - \frac{rn}{2} b A_{rn} + na A_{(r-1)n}$$

Stelt men nu een dezer coëfficiënten nl. die van

$$x^m = x^{2n+i-1-q} = x^{(r+2-r_1)n-1} \text{ gelijk } \frac{c^{1+p}}{C},$$

de overige gelijk nul, dan is het duidelijk dat in het algemeen aan deze $r + 1$ lineaire vergelijkingen met $r + 1$ onbekenden A_n, $A_{2n} \ldots A_{rn}$, $\frac{c^{1+p}}{C}$ kan voldaan worden.

Daar uit de voorwaarden $\eta + i = 0$ en $i = rn$ volgt dat de breuk $p = -\frac{2k+1}{2}$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, waarmede $r = 2k - 1$, zoo kan het resultaat van het voorgaand onderzoek aldus worden uitgedrukt:

Wanneer in $x^m (a + b x^n + c x^{2n})^p dx$ *de exponenten voldoen aan de voorwaarden*

$$\left.\begin{array}{l} p = -\frac{2k+1}{2} \; (k = 1, 2, 3 \ldots) \\ m = k_1 n - 1 \; (k_1 = 1, 2, \ldots 2k) \end{array}\right\} \ldots\ldots (40)$$

dan is de integraal zuiver algebraïsch en gelijk aan

$$\frac{C}{c^{1+p}} (a + b x^n + c x^{2n})^{1+p} (x^{rn} + A_n x^{(r-1)n} + \ldots A_{rn})$$

waarin de onbekenden $\frac{C}{c^{1+p}}$, A_n, $A_{2n} \ldots A_{rn}$ *uit* $r + 1$ *bekende lineaire vergelijkingen gevonden worden, terwijl* $r = 2k - 1$.

Zij, om een voorbeeld te nemen, gevraagd de integraal van $x^m (a + b x^3 + c x^6)^{-\frac{3}{2}} dx$. Uit (40) volgt dan dat deze integraal zuiver algebraïsch zoo $m = 2, 5, 8, 11$. Voor $m = 5$ heeft men dan ter berekening der onbekenden $\frac{C}{c^{1+p}}$, A_3, A_6, A_9 deze vier vergelijkingen

$$-3 c A_3 + \frac{9}{2} b = 0$$

$$-6 c A_6 + \frac{3}{2} b A_3 + 9 a = 0$$

$$-9 c A_9 - \frac{3}{2} b A_6 + 6 a A_3 = \frac{c^{1+p}}{C}$$

$$-\frac{9}{2} b A_9 + 3 a A_6 = 0$$

waaruit

$$A_3 = \frac{3\,b}{2\,c}, \quad A_6 = \frac{3\,(b^2 + 4\,a\,c)}{8\,c^2}, \quad A_9 = \frac{a\,(b^2 + 4\,a\,c)}{4\,b\,c^2},$$

$$\frac{c^{1+p}}{C} = -\frac{9\,(b^2 - 4\,a\,c)^2}{16\,b\,c^2},$$

zoodat de integraal in dit geval is:

$$-\frac{16\,b\,c^2}{9\,(b^2 - 4\,a\,c)^2}(a + b\,x^3 + c\,x^6)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(x^9 + \frac{3\,b}{2\,c}x^6 + \frac{3\,(b^2 + 4\,a\,c)}{8\,c^2}x^3 + \frac{a\,(b^2 + 4\,a\,c)}{4\,b\,c^2}\right).$$

Ten slotte zij nog opgemerkt dat, behalve in de genoemde gevallen, $\int x^m\,(a + b\,x^n + c\,x^{2n})^p\,d\,x$ nimmer algebraïsch is.

BRUGBALKEN VAN DE TWEEDE ORDE

MET

FLAAUW GEBOGEN BOVENRAND EN GETROKKEN SCHOREN.

DOOR

N. Th. MICHAËLIS.

Balken van het in de figuur aangeduide type worden gezegd van de n^{de} orde te zijn, wanneer door een vertikaal vlak tusschen twee stijlen n gelijk gerigte diagonalen gesneden worden.

Voor de berekening der spanningen in de zamenstellende deelen van een balk van de eerste orde kan men gebruik maken van de formules:

$$h_{n+1}\, b_n \sin \beta_n + M_n = 0$$

$$s_n \sin \alpha_n = \frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n}$$

$$v_{n+1} + s_n \cos \alpha_n - G_n = 0\,.$$

Hierin beduiden:

b_n de spanning in het n^{de} vak van den bovenrand;

s_n » » » de » schoor;

v_{n+1} » » » den $n+1^{sten}$ stijl;

β_n den hoek tusschen het n^{de} randvak en het verlengde van den links daarvan geplaatsten stijl;

α_n den hoek tusschen de n^{de} schoor en den links daarvan geplaatsten stijl;
h_n de lengte van den n^{den} stijl;
M_n het moment der uitwendige krachten links van het knooppunt n, ten opzigte van dit punt;
G_n de belasting in het knooppunt n.

Als oorsprong van tellen is het linker steunpunt aangenomen.

Uit die formules blijkt, dat bij eene gelijkmatige belasting en eene parabolische buiging van den bovenrand, wanneer de lengte van den eindstijl nul is, de horizontaal ontbondene van de spanningen in de vakken van den bovenrand constant en de horizontaal ontbondene van de spanningen in de schoren nul is.

Is de bovenrand regt, dan nemen de spanningen in de randvakken toe als de ordinaten eener parabool en de horizontaal ontbondenen der spanningen in de diagonalen nemen af als de ordinaten eener regte lijn.

Voor daartusschen gelegen regelmatige, symetrische vormen nemen de horizontaal ontbondenen der spanningen in de randvakken van het einde naar het midden toe en in de schoren af, volgens eene wet, afhankelijk van den balkvorm.

Wordt de balk aan een einde ontlast, dan nemen nog wel de horizontaal ontbondenen der spanningen in de randvakken van de uiteinden naar eenig punt van den balk toe, en die der spanningen in de schoren naar hetzelfde punt af, maar het maximum voor de eerste en het nulpunt voor de andere liggen niet meer in het midden van den balk.

Voorbij het nulpunt verandert de spanning in de schoor van teeken. Wil men alleen getrokken schoren in de constructie toelaten, dan zet men ze, met den top naar buiten, zóó ver voort als de spanningsgetallen hun teeken behouden, zoodat in het midden altijd eenige gekruiste schoren voorkomen.

Ter berekening van de spanningsgetallen voor den balk van de tweede orde levert de figuur de volgende formules, waarin a_n de afstand tusschen de knooppunten $n - 1$ en n

aangeeft, terwijl de overige letters dezelfde beteekenis hebben als boven:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} h_n\, s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} + h_{n+1}\, b_n \sin \beta_n + M_n = 0$$

of daar $\Sigma^{n+1} s \sin \alpha + b_n \sin \beta_n = 0$ is

$$\Sigma^{n+1} s \sin \alpha = \frac{M_n}{h_{n+1}} + \frac{h_n}{h_{n+1}} \times \frac{a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}} s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} \ldots (1)$$

waaruit, daar ook

$$\Sigma^n s \sin \alpha = \frac{M_{n-1}}{h_n} + \frac{h_{n-1}}{h_n} \times \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n} s_n \sin \alpha_n$$

is, volgt:

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{(a_n + a_{n+1})\, h_{n+1}}{a_{n+1}(h_{n+1} - h_n) + a_n\, h_{n+1}} \left\{ \left(\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n} \times \frac{h_{n-1}}{h_n} s_n \sin \alpha_n \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wanneer, zooals in den regel het geval is en verder zal worden aangenomen, alle waarden van α onderling gelijk zijn, gaan de formules (1) en (2) over in:

$$\Sigma^{n+1} s \sin \alpha = \frac{1}{2\, h_{n+1}} \left\{ 2\, M_n + h_n\, s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} \right\} \ldots (1^a)$$

en

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{h_{n+1}}{2 h_{n+1} - h_n} \left\{ 2 \left(\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} \right) - \frac{h_{n-1}}{h_n} s_n \sin \alpha_n \right\} \ldots (2^a)$$

Met de vergelijking

$$v_{n+1} + s_n \cos \alpha_n - G_n = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

heeft men dus ook hier vormen voor de spanningen in de

randvakken, de schoren en de stijlen, die echter niet in de enkele gegevens van het vraagstuk zijn uitgedrukt.

Uit de figuur blijkt dat, althans op statische gronden, geene uitdrukkingen te vinden zijn voor de spanning in eenig deel van den balk, onafhankelijk van die in een ander deel. Om het punt A_1 toch, werken vier krachten in gegeven rigting, waarvan men alleen weet, dat zij onderling evenwigt maken en dat de spanning in den eindstijl even groot is als de reactie van het steunpunt. Men kan dus eene dier krachten willekeurig aannemen, of eene onderstelling maken waardoor eene dier krachten bepaald wordt.

In de praktijk bedient men zich ter bepaling van de spanning s_1 van de hypothese, dat elk schorenstelsel geheel onafhankelijk van het andere werkt en dat dus de lasten G_1, G_3, G_5 enz. door de schoren $A'1$, $1'3$, $3'5$, enz. gedragen worden en in het steunpunt eene reactie

$$D_1 = \frac{1}{l} \left\{ (l - g_1)\, G_1 + (l - g_3)\, G_3 + (l - g_5)\, G_5) \ldots \text{enz.} \right\}$$

opwekken waaruit, even alsof de schoor $A'2$ niet bestond, wordt afgeleid:

$$s_1 \sin \alpha_1 = \frac{a}{h_2} D_I$$

met behulp waarvan men dan alle overige spanningsgetallen kan bepalen.

Neemt men de door de lasten G_2, G_4, enz. in het linkersteunpunt opgewekte reactie D_{II}, dan is

$$D_I + D_{II} = D = \Sigma G - \frac{1}{l} \Sigma g G.$$

Zet men de schoren met den top links voort tot het regter steunpunt en noemt men de aldaar opgewekte reactiën C_I, C_{II} en C, dan zou, wanneer de balk in m vakken verdeeld is

$$D_I + C_I = G_1 + G_3 + G_5 + \ldots . G_{m-1}$$

moeten zijn.

De spanning $s_{m+1} \sin \alpha_{m+1}$ laat zich niet uit de formule (2′) berekenen, doch, daar de spanning in het laatste vak van den bovenrand, wanneer slechts schoren in éène rigting voorhanden zijn, nul wezen moet, is $s_{m+1} \sin \alpha_{m+1} - \Sigma^m s \sin \alpha = 0$. Alleen wanneer de bovenrand regt is, voldoet de hieruit afgeleide waarde van C_{I} aan de voor $D_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{I}}$ gevonden voorwaarde.

De gebruikelijke onderstelling is dus niet juist, de met behulp daarvan berekende waarden voor s zijn om de andere te groot en te klein, en hoewel nu hierdoor, met de gewone zekerheids-coëfficiënten, wel geen gevaar voor de constructie te duchten is, schijnt het toch verkieselijk eene hypothese tot grondslag te nemen, die althans de waarschijnlijkheid oplevert, dat de werkelijke spanningen de berekende niet overtreffen.

Is weder de bovenrand van den balk parabolisch gebogen, en de lengte van den eindstijl nul, dan vervallen de schoren s_1 en s_2 en wordt voor eene gelijkmatige totaalbelasting $\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} = 0$, alzoo uit ($2^a$) $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = 0$, terwijl $b_1 \sin \beta_1 = -\frac{M_1}{h_2}$ is. — Is daarentegen de bovenrand regt, dan wordt:

$$s_{n+1} \sin \alpha = \frac{2}{h} \left\{ M_n - M_{n-1} \right\} - s_n \sin \alpha$$

en daar de verschillen $M_n - M_{n-1}$ afnemen als de ordinaten eener regte lijn, nemen dus ook de sommen $\{ s_{n+1} + s_n \} \sin \alpha$ in dezelfde verhouding af. De waarde $s_{n+1} \sin \alpha$ blijft positief zoolang $M_n > M_{n-1}$ en $M_n - M_{n-1} > \frac{h}{2} s_n \sin \alpha$ is. M_n neemt van de uiteinden naar het midden toe en $M_n - M_{n-1}$ is dus tot het midden positief, daar voorbij negatief.

Hetzelfde heeft plaats wanneer men eenige punten bij het linkersteunpunt ontlast; slechts verplaatst zich het punt waar M_n maximum wordt, naar de regterhand, doch tot dat

punt blijft de eerste term van het tweede lid der vergelijking positief.

Heeft de lengte van den eindstijl eene eindige waarde, doch is de buiging van den bovenrand op elk punt minder sterk dan bij den parabolischen rand met eindstijl nul, dan neemt de waarde van $\frac{M_n}{h_{n+1}}$ tot een bepaald punt toe, om daar voorbij af te nemen en is dus $\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n}$ aanvankelijk positief en $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ positief, zoolang

$$\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} > \frac{h_{n-1}}{2h_n} s_n \sin \alpha_n \quad \text{is.}$$

Naar aanleiding van hetgeen bij balken met een enkel schorenstelsel plaats heeft, schijnt men dus te mogen aannemen, dat ook voor die van de tweede orde, mits de bovenrand weinig of niet gebogen zij, de waarde van s aanvankelijk positief is om op eenig punt, afhankelijk van den balkvorm en van de belastingswijze, negatief te worden en dan negatief te blijven. Hierbij wordt aangenomen dat de laatste positieve waarde van $s \sin \alpha$ kleiner, of althans niet grooter is dan de voorgaande en dat de eerste negatieve waarde kleiner, of althans niet grooter is dan de volgende.

Met deze hypothese kan men twee grenzen bepalen waartusschen, voor elke belastingswijze, de waarden van $s \sin \alpha$ moeten gelegen zijn.

Schrijft men de formule (2^a) onder den vorm

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = A - B\, s_n \sin \alpha_n$$

waarin dus

$$A = \frac{2\, h_{n+1}}{2\, h_{n+1} - h_n} \left\{ \frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n} \right\}$$

en

$$B = \frac{h_{n+1}}{2\, h_{n+1} - h_n} \times \frac{h_{n-1}}{h_n}$$

is en zij A de laatste positieve waarde van de uitdrukking,

die daardoor wordt voorgesteld, dan moet, op grond der hypothese, $s_n \sin \alpha_n$ positief zijn, omdat anders eene negatieve waarde van s door eene positieve zou worden opgevolgd. De waarde van s_{n+1} kan zoowel positief als negatief zijn. Is zij positief, dan is $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ kleiner of althans niet grooter dan $s_n \sin \alpha_n$ en de grootst mogelijke positieve waarde is dus:

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{A}{1 + B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Zij in

$$s_{n+2} \sin \alpha_{n+2} = A_1 - B_1 s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$$

A_1 de kleinste negatieve der door die uitdrukking voorgestelde waarden. Hierin moet $s_{n+2} \sin \alpha_{n+2}$ negatief zijn, want voor $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ positief, zijn beide termen van het tweede lid negatief en is $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ negatief, dan mag op grond der hypothese $s_{n+2} \sin \alpha_{n+2}$ niet positief wezen; daar overigens de grootste negatieve waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ die van $s_{n+2} \sin \alpha_{n+2}$ niet overtreffen mag, is de grenswaarde

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{A_1}{1 + B_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

De uit (I) en (II) afgeleide waarden van $s \sin \alpha$ zijn beurtelings te groot en te klein, doch daar de waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ uit (I) te groot, en die uit (II) te klein is, is ook de voor eene bepaalde schoor, uit de eene formule afgeleide waarde te groot, en die uit de andere te klein, en door nu alleen de grootere waarden van beide reeksen in aanmerking te nemen, verkrijgt men de zekerheid, dat de werkelijke spanningen de berekende niet overtreffen.

Is de waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ bepaald, dan vindt men de spanningen in de overige schoren uit de formule

$$s_n \sin \alpha_n = \frac{1}{\frac{h_{n-1}}{h_n}} \left\{ 2\left(\frac{M_n}{h_{n+1}} - \frac{M_{n-1}}{h_n}\right) - \left(2 - \frac{h_n}{h_{n+1}}\right) s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} \right\} \quad \ldots (4)$$

terwijl

$$s_1 \sin \alpha_1 = \frac{M_1}{h_2} - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{h_1}{h_2}\right) s_2 \sin \alpha_2 \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

is.

Voor den regten balk gaan deze formules over in

$$s_n \sin \alpha = \frac{2}{h}\,\{M_n - M_{n-1}\} - s_{n+1} \sin \alpha \quad . \; . \; . \quad (4^a)$$

en

$$s_1 \sin \alpha_1 = \frac{M_1}{h} - \frac{1}{2}\, s_2 \sin \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5^a)$$

Het geval kan zich voordoen dat de waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ uit (II) zooveel te klein is, dat ook $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ negatief wordt. Men verkrijgt dan een nadere grens voor $s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = 0$.

Substitueert men in (2^a) achtereenvolgens de waarden van $s_n \sin \alpha_n$, $s_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$, enz. uit diezelfde formule, dan vindt men:

$$s_{n+1} \sin \alpha_{n+1} = \frac{2}{2\,h_{n+1} - h_n}$$

$$\left[M_n - \frac{2\,h_{n+1}}{2h_n - h_{n-1}}\left\{M_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{2h_{n-1} - h_{n-2}}\left\{M_{n-2} - \frac{h_{n-2}}{2h_{n-2} - h_{n-3}}\left\{M_{n-3} - \ldots\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\ldots - \frac{h_4}{2h_4 - h_3}\left\{M_3 - \frac{h_3}{2h_3 - h_2}\left\{M_2 - \frac{h_2}{2h_2 - h_1}\left\{M_1 - \frac{h_1}{2} s_1 \sin \alpha_1\right\}\right.\right.\right.\right]\ldots (6)$$

terwijl met deze waarde van $s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$ en omdat $\Sigma^{n+1}\, s \sin \alpha = -\, b_n \sin \beta_n$ is, uit (1^a) volgt:

$$b_n \sin \beta_n = -\frac{2}{2\,h_{n+1} - h_n}$$

$$\left[M_n - \frac{h_n}{2h_n - h_{n-1}}\left\{M_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{2\,h_{n-1} - h_{n-2}}\left\{M_{n-2} - \frac{h_{n-2}}{2\,h_{n-2} - h_{n-3}}\right\}M_{n-3} \ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots - \frac{h_4}{2h_4 - h_3}\left\{M_3 - \frac{h_3}{2\,h_3 - h_2}\left\{M_2 - \frac{h_2}{2\,h_2 - h_1}\left\{M_1 - \frac{h_1}{2} s_1 \sin \alpha_1\right\}\right.\right.\right]\ldots (7)$$

Is de bovenrand regt en evenwijdig aan den onderrand, dan gaan deze formules over in:

$$s_{n+1} \sin \alpha = \frac{2}{h} \{ M_n - 2 M_{n-1} + 2 M_{n-2} - 2 M_{n-3} + \ldots$$
$$\ldots \pm 2 M_3 \mp 2 M_2 \pm 2 M_1 \mp h s_1 \sin \alpha_1 \} \quad \ldots \ldots (6^a)$$

en

$$b_n = -\frac{2}{h} \{ M_n - M_{n-1} + M_{n-2} - M_{n-3} + \ldots$$
$$\ldots \pm M_3 \mp M_2 \pm M_1 \mp \tfrac{1}{2} h s_1 \sin \alpha_1 \} \quad \ldots \ldots (7^a)$$

in welke beide laatste vergelijkingen het bovenste teeken der laatste termen geldt voor n oneven.

Voor n oneven is:

$$M_n - M_{n-1} = a D - \Sigma^{n-1} G$$
$$M_{n-2} - M_{n-3} = a D - \Sigma^{n-3} G$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$M_3 - M_2 = a D - (G_1 + G_2)$$
$$M_1 = a D$$

waaruit door optelling en substitutie in (7^a) volgt:

$$b_n = -\frac{1}{h} \{ (n+1) a D - (n-1) a (G_1 + G_2) - (n-3) a (G_3 + G_4) - \ldots$$
$$\ldots - 2 a (G_{n-2} + G_{n-1}) - h s_1 \sin \alpha_1 \}.$$

Is de balk verdeeld in m vakken en $n + 1 = m$, dan wordt, wijl $b_{m-1} = s_{m+1} \sin \alpha_1$, en

$$D = \frac{1}{m} \{ (m-1) G_1 + (m-2) G_2 + (m-3) G_3 + \ldots + 2 G_{m-2} + G_{m-1} \}$$

is

$$(s_1 - s_{m+1}) \sin \alpha_1 = \frac{a}{h} \{ G_1 + G_3 + G_5 + \ldots G_{m-3} + G_{m-1} \} \ldots (a)$$

Voor n even vindt men op gelijke wijze:

$$b_n = -\frac{1}{h}\{naD - naG_1 - (n-2)a(G_2 + G_3) - (n-4)a(G_4 - G_5) - \ldots$$
$$\ldots - 2\,a\,(G_{n-2} - G_{n-1}) + h\,s_1 \sin \alpha_1\}$$

en is nu $m = n + 1$ oneven, dan wordt:

$$(s_1 - s_{m+1}) \sin \alpha_1 = \frac{a}{h}\left\{\frac{1}{m}\{(m-1)\,G_1 + (m-3)\,G_3 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + 2\,G_{m-2}\} + \frac{1}{m}\{2\,G_2 + 4\,G_4 + \ldots (m-1)\,G_{m-1}\}\right\} \ldots (b)$$

Volgens de gewone hypothese is voor m even:

$$D_{\mathrm{I}} = \frac{1}{m}\{(m-1)\,G_1 + (m-3)\,G_3 + \ldots + 3\,G_{m-3} + G_{m-1}\}$$

$$C_{\mathrm{I}} = \frac{1}{m}\{G_1 + 3\,G_3 + \ldots + (m-3)\,G_{m-3} + (m-1)\,G_{m-1}\}$$

en voor m oneven:

$$D_{\mathrm{I}} = \frac{1}{m}\{(m-1)\,G_1 + (m-3)\,G_3 + \ldots + 4\,G_{m-4} + 2\,G_{m-2}\}$$

$$C_{\mathrm{I}} = \frac{1}{m}\{2\,G_2 + 4\,G_4 + \ldots + (m-3)\,G_{m-3} + (m-1)\,G_{m-1}\}$$

uit (a) en (b) volgt dus:

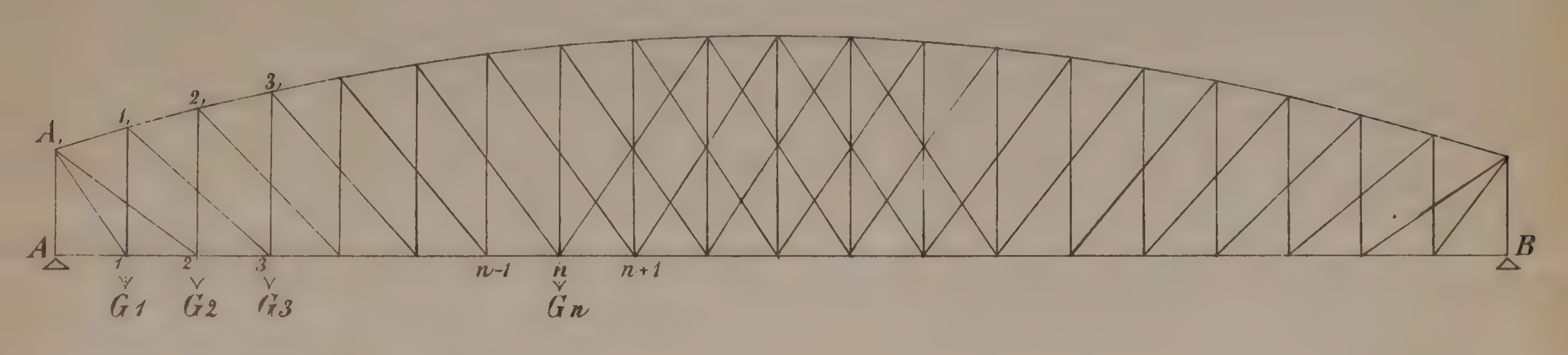
$$(s_1 - s_{m+1}) \sin \alpha_1 = \frac{a}{h}\{D_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{I}}\}$$

of

$$(s_1 - s_{m+1}) \cos \alpha_1 = D_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{I}}.$$

Al blijkt nu hieruit, dat de gewone hypothese voor den regter balk niet tot de ongerijmdheid leidt, dat men voor een balk, waarin de gelijk gerigte schoren over de geheele lengte zijn doorgezet, voor dezelfde schoor een ander spanningsgetal krijgt door den oorsprong van de linker- naar de regterhand te verplaatsen, dan mag men hieruit nog niet het gevolg trekken, dat die onderstelling juist is.

MICHAELIS, Brugbalken van de tweede orde.





Om het verschil tusschen de gewone en de voorgestelde rekenwijze aan te toonen, werden de spanningen bepaald voor eenen balk, verdeeld in twintig gelijke vakken a, hoog aan het uiteinde 7, in het midden 15 lengte-eenheden en met parabolisch gebogen bovenrand, in de gewone onderstelling dat het eigengewigt ad p per vak in de stijlen geconcentreerd is en verder dat de bewegende last de geheele brug kan bedekken en op elk belast knooppunt van den onderrand eveneens eene drukking p veroorzaakt.

De maximum spanningsgetallen zijn verzameld in de onderstaande tabel:

SPANNINGEN IN DE RANDVAKKEN.			SPANNINGEN IN DE SCHOREN.		
Randvak.	Gewone Hypothese.	Voorgestelde Hypothese.	Schoor.	Gewone Hypothese.	Voorgestelde Hypothese.
$b_1 \sin \beta_1$	— 2.977 *ap.*	— 3.021 *ap.*	$s_1 \sin \alpha_1$	1.174 *ap.*	1.224 *ap.*
$b_2 \sin \beta_2$	— 4.156 »	— 4.189 »	$s_2 \sin \alpha_2$	1.793 »	1.945 »
$b_3 \sin \beta_3$	— 4.963 »	— 4.995 »	$s_3 \sin \alpha_3$	1.180 »	1.313 »
$b_4 \sin \beta_4$	— 5.548 »	— 5.572 »	$s_4 \sin \alpha_4$	0.857 »	0.954 »
$b_5 \sin \beta_5$	— 5.962 »	— 5.985 »	$s_5 \sin \alpha_5$	0.666 »	0.732 »
$b_6 \sin \beta_6$	— 6.267 »	— 6.287 »	$s_6 \sin \alpha_6$	0.509 »	0.579 »
$b_7 \sin \beta_7$	— 6.470 »	— 6.489 »	$s_7 \sin \alpha_7$	0.420 »	0.472 »
$b_8 \sin \beta_8$	— 6.605 »	— 6.623 »	$s_8 \sin \alpha_8$	0.330 »	0.390 »
$b_9 \sin \beta_9$	— 6.665 »	— 6.683 »	$s_9 \sin \alpha_9$	0.279 »	0.327 »
$b_{10} \sin \beta_{10}$	— 6.669 »	— 6.685 »	$s_{10} \sin \alpha_{10}$	0.220 »	0.267 »
			$s_{11} \sin \alpha_{11}$	0.196 »	0.224 »
			$s_{12} \sin \alpha_{12}$	0.127 »	0.178 »
			$s_{13} \sin \alpha_{13}$	0.085 »	0.135 »
			$s_{14} \sin \alpha_{14}$	0.072 »	

EENE

MONSTER-NAJA;

DOOR

A. W. M. VAN HASSELT.

Het is heden juist 24 jaar geleden *) dat ik de eer had, de aandacht der Akademie te vestigen op eene buitengewoon groote vergiftige slang, uit Sumatra (of Borneo) †).

Zoo toen, als nu weder, trof het mij, dat onder de giftslangen — die zich, in het algemeen, niet door bijzondere lichaams-lengte kenmerken, en die veel meer door hare gifthaken dan door hare kronkels te vreezen zijn — zóó belangrijke uitzonderingen op den regel worden aangetroffen, die deze beide voorwaarden in zich vereenigen.

Als vervolg op mijne toenmalige mededeeling, zie ik mij thans in staat gesteld eene nadere bevestiging daarvan te leveren, door de goedheid van mijn' geachten oud-kameraad, den Officier van Gezondheid der 1ste klasse C. DE MOOIJ, die mij, voor eenigen tijd, een waar monster-exemplaar dezer inderdaad merkwaardige giftslang uit Sumatra heeft medegebracht.

Ontegenzeggelijk behoort zij, evenals de vorige, tot het genus *Naja* (Dendroaspis FITZINGER, *Hamadryas* CANTOR,

*) Zie, in de *Verslagen* en *Mededeelingen* voor 31 October 1857, mijne »Aanteekening over en beschrijving van een individu der grootste tot nu bekende giftslangen, uit het geslacht der *Naja's*".

†) Wijlen de Heer WASSINK wist mij niet met zekerheid te zeggen, of hij dit exemplaar uit het eerste, of misschien uit het tweede dezer O.-I. eilanden had verkregen.

Trimeresurus DUMÉRIL), waarvan ik destijds de juiste species, bij deze schrijvers en bij onzen SCHLEGEL, niet heb kunnen vinden, zoodat ik haar den soortnaam van *ingens* *) heb bijgelegd, waarover, alsmede over hare nog eenigszins onzekere synonymie, naar de bovenaangehaalde »Aanteekening" mag worden verwezen.

De kop met zijne kenmerkende auxiliaire achterhoofdsschilden, de gifthaken, de schubben, de schilden van buik en staart, de vorm van den laatsten, de bij beiden ontbrekende teekening door vlekken, strepen of banden, komen geheel overeen, alleen de overal gelijkmatige kleur is niet bruin-geel, doch meer donker geel-bruin, en in ligchaamslengte overtreft dit exemplaar het eerste nog vrij aanzienlijk.

Voor zooverre als mij destijds de erpetologische litteratuur had geleerd en mij door hoog geëerde vrienden, wijlen Prof. J. VAN DER HOEVEN en Prof. SCHLEGEL †) bevestigd werd — of sedert grootere vergiftslangen gevonden zijn, is mij onbekend — was het toen vertoonde individu *langer dan eenige andere bekende*. Het mat nagenoeg $3^1/_2$ *meter* (3 m. 43).

Uit het U thans voorgelegde exemplaar blijkt, dat deze *Naja*-soort eene nog grootere ligchaamslengte kan bereiken. Zoo als ge U kunt overtuigen, geloof ik niet te veel te zeggen, door het eene ware »reuzenslang" onder de *Serpentes venenati* te noemen.

Het is nog 47 centimeters langer dan het vorige, bezittende het eene lengte-afmeting van *bijna* 4 *meters* (meer dan 3 m. 90) §), alzoo ongeveer gelijk aan die van 2 mannen van 6 Rhijnl. voeten!

Verder zal ik over de diagnose en systematiek dezer *Naja*

---

*) Zij heeft overigens groote verwantschap met den *Trimeresurus ophiophagus* van DUMÉRIL en BIBRON.

†) SCHLEGEL schreef mij hieromtrent, dat deze niet alleen de grootste *Naja*, maar tevens de langste van *alle* vergiftige slangen was." Hij scheen in twijfel, of het een *zeer oud* voorwerp kon zijn van zijne *Naja bungarus*.

§) »Meer dan 3 m. 90" zeg ik, en zulks op grond het mij voorkomt, dat nog een klein gedeelte van het uiteinde van de, anders meer stompe, hoornachtige staartpunt is afgebroken.

niet uitweiden, doch over de wijze waarop zij bemachtigd werd, hoe de Heer DE MOOIJ daarbij is te werk gegaan, en wat hij wijders bij haar heeft waargenomen, nog een woord toevoegen.

De slang werd door DE MOOIJ, destijds gedetacheerd bij het leger in Nederlandsch Indië, alwaar hij, zoo op Java als in Atjeh en te Palembang, eenige jaren gediend heeft, in October 1877, in de binnenlanden der laatstgenoemde residentie, in een alang-alang-veld te Tebing-Tinghie, gevangen.

Een paar kettinggangers hadden hem bericht gebracht, dat, even buiten de benting daar ter plaatse, zich eene groote en zeer gevreesde slang, tot de vergiftigsten behoorende, ophield.

Na zich met een' scherpen klewang gewapend te hebben, en voorzien van eene lange, gaffelvormig gespleten bamboe, begaf hij zich, met zijn' desgelijks toegerusten »jongen", naar de aangeduide plaats.

Weldra ontdekte hij het reusachtige dier, dat zeer rustig in elkâar gekronkeld lag en, bij de voorzichtige nadering, geene pogingen deed tot aanval of vlucht.

DE MOOIJ stak haar zijne bamboe-vork, vlak achter den kop, om den hals en drukte dien met kracht tegen en in den grond, waarop de slang den bek wijd opende, maar mèt het lijf en den staart veel minder bewegingen maakte dan verwacht en gevreesd werd.

Hij had zijn' jongen een' tweeden, langen, gewonen bamboe-stok medegegeven, aan welks ééne uiteinde eene met chloroform rijkelijk bedeelde spons was bevestigd.

Deze werd diep in den open bek der slang gestoken en tot in de keel gedrukt, waarop het dier, na verloop van een kwartier, volkomen bedwelmd bleek te zijn.

Om de slang niet te beschadigen, zooals gewoonlijk, door het dooden met houwen of slagen, werd zij naar huis gesleept, met goed verzekerden kop, en dáár stevig op eene plank gebonden. Onmiddellijk werd het lichaam geopend en de huid met den kop afgeprepareerd.

Bij het nazien der ingewanden bleek, dat het geheele darmkanaal, bij overigens ledige maag, door eene soort van

draadvormige ingewandswormen bijna geheel was opgevuld, iets, wat de Heer DE MOOIJ kort te voren ook bij een' door hem gevangen *Python* had waargenomen, en waaraan hij het toeschreef, dat het, vermoedelijk zieke, vermagerde dier zoo ongewoon weinig wederstand had geboden.

De drukking van den bamboe-gaffel op medulla oblongata en spinalis zal evenwel tot dit laatste ook wel het hare hebben toegebracht.

Voor de wijze waarop men vergiftige slangen, zonder ze te verminken *) en zonder groot gevaar voor zich zelven, kan bemachtigen, acht ik deze waarneming van den Heer DE MOOIJ niet zonder praktisch belang, evenals zijne medegebrachte buit zulks is voor de wetenschap. Voor een en ander heb ik het genoegen, hem, ook bij deze gelegenheid, mijn' besten dank te betuigen.

's Gravenhage, October 1881.

---

*) Van een paar analoge, bijzonder lange, vergiftslangen, in het Parijsche museum, is de kop verbrijzeld, hetgeen voor de diagnose altijd zeer te bejammeren is.

DE GRONDFORMULES

DER

ELECTRODYNAMICA.

DOOR

H. A. LORENTZ.

§ 1. In zijne »Algemeene theorie der ponderomotorische krachten" *) werd door Dr. KORTEWEG de meest algemeene wet gezocht, die voor de electrodynamische werking van twee stroomelementen mag worden aangenomen. Eenige onderstellingen, zóó natuurlijk dat wel niemand er eenig bezwaar tegen zal hebben, voeren vooreerst tot uitdrukkingen voor deze werking, waarin een zeker aantal onbekende functiën voorkomen. Deze worden vervolgens zooveel mogelijk bepaald door de beschouwing van die gevallen, waarin de werking tusschen electrische stroomen geheel bekend is.

Het is mij gebleken, dat men tot dezelfde uitkomsten ook langs een anderen weg kan geraken, waarbij niet meer onbekende functiën worden ingevoerd dan in het eindresultaat blijven bestaan. Deze methode, die het mij vergund zij hier uiteen te zetten, staat in zooverre bij die van Dr. KORTEWEG achter, dat zij eene bijzondere wet voor de werking van stroomelementen als uitgangspunt noodig heeft; zij heeft echter, ten minste voor onvolledige stroomelementen, het voordeel van meerdere eenvoudigheid. Bij volledige elementen is er het bezwaar aan verbonden, dat de beschouwing daar-

*) *Natuurk. Verh. der Akad v. Wet.*, Deel 20, later in vereenvoudigden vorm, waarbij van de opmerkingen van Dr. VAN DER WAALS werd gebruik gemaakt, in het *Journal für Mathematik*, Bd. 40.

van op die der onvolledige berust, terwijl Dr. KORTEWEG beide gevallen onafhankelijk van elkander behandelt.

Natuurlijk moet gebruik worden gemaakt van de geheel bekende werking van een gesloten stroom op een (onvolledig) stroomelement. Ik heb daarom in de eerstvolgende §§ aangewezen, op welke wijze men die met zekerheid uit de waarnemingen kan afleiden, zonder daarbij van eene formule voor de onderlinge werking van twee stroomelementen gebruik te maken. In § 8 en volgende vindt men dan de afleiding der algemeene uitdrukkingen voor stroomelementen.

§ 2. De nauwkeurigste metingen, die men over de electrodynamische verschijnselen bezit, hebben geleerd, dat de onderlinge werking van twee gesloten lineaire stroomgeleiders, die zich als vaste lichamen van onveranderlijken vorm gedragen, en dus slechts verschuivingen en wentelingen kunnen ondergaan, geheel gelijk is aan die van twee magnetische dubbellagen. Om deze te verkrijgen denke men zich bij elken geleider een oppervlak aangebracht, dat door den geleider begrensd is, voorts een tweede oppervlak, overal op oneindig kleinen afstand van het eerste en voorzie het eene met noord-, het andere met zuidmagnetisme op zoodanige wijze, dat aan elke hoeveelheid noordmagnetisme op het eene oppervlak eene even groote hoeveelheid zuidmagnetisme op het andere beantwoordt en dat het product van de vlaktedichtheid en den afstand der beide vlakken (het moment der dubbellaag) overal gelijk is aan de intensiteit van den stroom, in electromagnetische maat uitgedrukt. Daarbij moet het noordmagnetisme aan die zijde van het oppervlak worden aangebracht, van waar uit gezien de richting van den stroom tegengesteld is aan die der wijzers van een uurwerk. Wij noemen zulk eene draaiingsrichting positief, die der wijzers van een uurwerk dus negatief. In het algemeen zullen wij zeggen, dat de richting eener wenteling en die van eene lijn loodrecht op het vlak daarvan getrokken dan overeenstemmen, wanneer de lijn naar die zijde loopt, van waar uit gezien de wenteling positief is. Door dezen regel wordt b. v. bij een koppel de richting der as

bepaald. Eindelijk zal steeds een systeem van coordinaat-assen worden gebezigd, waarbij de richting van OZ beantwoordt aan die eener wenteling van OX naar OY over een rechten hoek.

Wij zullen in het vervolg de beide stroomgeleiders door s en s', de beide dubbellagen door S en S' aanduiden, elementen van deze lijnen en oppervlakken door ds, enz. De normalen van S en S' naar de positieve zijde getrokken, zullen n en n' heeten. Daar wij verder de evenredigheid van alle werkingen met de stroomintensiteiten aannemen, kunnen wij ons bepalen tot het geval, dat die intensiteiten, dus ook de momenten der dubbellagen, $= 1$ zijn.

§ 3. De wederkeerige werking van twee magneten wordt, gelijk men weet, geheel bepaald door hunne onderlinge potentiaal; derhalve moet ook voor twee gesloten stroomen zulk eene grootheid bestaan, waarvan de vermindering bij elke verschuiving of wenteling der stroomgeleiders (bij constant gehouden stroomintensiteit) den arbeid der electrodynamische krachten aangeeft.

Is φ de magnetische potentiaalfunctie, die van den stroom in s' (of van de dubbellaag S') het gevolg is, dan is de onderlinge potentiaal der beide stroomen:

$$P = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

waarbij over de dubbellaag S moet geintegreerd worden. Door eenige herleidingen kan men daaruit afleiden:

$$P = -\iint \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds \, ds', \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

waarbij ε den hoek voorstelt tusschen de op een afstand r van elkander gelegen elementen ds en ds', en de integratie langs de beide stroomgeleiders moet worden uitgestrekt.

Voor ons doel is intusschen de vorm (1) het meest geschikt. Men kan daaraan eene eenvoudige beteekenis geven. Is F_n de component der (van den stroom in s'

afkomstige) magnetische kracht volgens de richting n, dan kan men voor (1) schrijven:

$$P = -\int F_n \, d\, S \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (3)$$

Wanneer men in het magnetische veld, bij den stroom in s' behoorende, door alle punten eener gesloten lijn krachtlijnen trekt, zal het buisvormige oppervlak, waarop deze liggen, de eigenschap bezitten, dat over alle doorsneden ervan de integraal $\int F_n \, d\, S$ dezelfde waarde heeft. Men kan de ruimte verdeelen in een groot aantal buizen van dezen aard, zoodat voor elke doorsnede daarvan de integraal de waarde 1 heeft. Blijkens (3) is dan P het met het tegengestelde teeken genomen aantal dergelijke *krachtbuizen*, van s' afkomstig, die door S gaan, of door s omvat worden. Bij het opmaken van dat aantal moet men de krachtbuizen als positief of negatief in rekening brengen, al naarmate zij (in de richting der magnetische kracht genomen) naar de positieve of naar de negatieve zijde van S gaan.

Uit het gezegde volgt nu verder, dat bij elke verschuiving of wenteling van den stroomgeleider s de arbeid der daarop werkende electrodynamische krachten gelijk is aan het aantal krachtbuizen, die s bij zijne beweging doorsnijdt. Men vindt dit aantal als de algebraïsche som van het aantal krachtbuizen, door de verschillende elementen van s doorsneden. Wordt daarbij een element $A\,B$ (in de richting van A naar B door den stroom doorloopen) naar $A'\,B'$ verplaatst, dan moet het aantal der daardoor doorsneden krachtbuizen als positief of negatief in rekening gebracht worden, al naarmate de magnetische kracht de richting heeft, beantwoordende aan de draaiing $B\,A\;A'\,B'$, of de tegengestelde.

§ 4. De eerste stap bij verdere ontleding der electrodynamische werking moet nu zijn, een der beide stroomen, b. v. s, in elementen te verdeelen en de krachten te zoeken, die zulk een element van den stroom in s' ondervindt. Om

tot de kennis daarvan te geraken kan men gebruik maken van alle proeven omtrent de electrodynamische werking op de deelen van een stroomgeleider, wanneer die ten opzichte van elkander bewegelijk zijn. Eéne dezer proeven is echter voldoende, namelijk die van AMPÈRE, later door v. ETTINGHAUSEN herhaald, waardoor bewezen werd, dat een door een electrischen stroom doorloopen cirkelboog, die draaibaar is om zijne as, door een willekeurigen gesloten stroom in de nabijheid nooit in beweging gebracht wordt.

Wanneer een stroomelement ds aan den invloed van den stroom in s' is onderworpen, zal men altijd al de krachten, die erop werken, naar een zelfde punt, waarvoor wij het midden van ds kiezen, kunnen overbrengen en daarbij eene resulteerende kracht en een koppel kunnen verkrijgen. Zal nu het resultaat der proef van AMPÈRE en v. ETTINGHAUSEN voor alle stroomgeleiders in den vorm van een cirkelboog doorgaan, dan moet het ook voor stroomelementen gelden, daar men deze als cirkelbogen kan opvatten. Elke lijn, gelegen in het vlak, dat het element loodrecht middendoor deelt, kan daarbij als de as van den cirkelboog beschouwd worden; om elke zoodanige lijn kan het element dus door de werking van gesloten stroomen geene wenteling verkrijgen. Daaruit volgt, dat de bovengenoemde resulteerende kracht loodrecht moet staan op het element en dat de as van het koppel de richting daarvan moet hebben.

§ 5. Ten einde vooreerst de kracht nader te bepalen zullen wij de hypothese invoeren, dat het element ds door zijne componenten dx, dy, dz mag vervangen worden. Op de eerste daarvan kan slechts eene kracht werken, evenwijdig aan het yz-vlak; noemen wij de componenten daarvan evenwijdig aan de y- en z-as resp. $k_z dx$ en $k'_y dx$, dan kunnen k_z en k'_y slechts functiën zijn der coördinaten x, y, z van het punt, waaraan het stroomelement geplaatst is, functiën, die bepaalde waarden moeten hebben, zoodra de vorm en de stand van den werkenden stroom s' zijn gegeven. Op dezelfde wijze werken op dy de krachten $k_x dy$ en $k'_z dy$ in de richtingen der z- en x-as, op dz de krachten $k_y dz$ en $k'_x dz$, die evenwijdig aan de x- en y-as zijn

gericht. De totale kracht, op ds werkende, moet dus de componenten

$$X = k'_z\,dy + k_y\,dz\,, \quad Y = k'_x\,dz + k_z\,dx\,,$$
$$Z = k'_y\,dx + k_x\,dy$$

hebben. Zal nu echter deze kracht loodrecht op ds staan, dan moet

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

zijn, of

$$(k'_x + k_x)\,dy\,dz + (k'_y + k_y)\,dz\,dx + (k'_z + k_z)\,dx\,dy = 0.$$

Dit is echter slechts dan bij alle standen van het element mogelijk, wanneer

$$k_x = -\,k'_x\,, \quad k_y = -\,k'_y\,, \quad k_z = -\,k'_z$$

is, zoodat

$$X = k'_z\,dy - k'_y\,dz\,, \quad Y = k'_x\,dz - k'_z\,dx\,,$$
$$Z = k'_y\,dx - k'_x\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wordt.

In elk punt der ruimte kan men den vector ϱ aangeven, waarvan k'_x, k'_y, k'_z de componenten zijn. Uit (4) blijkt dan, dat de kracht, door ds ondervonden, loodrecht staat op het vlak door ds en ϱ gebracht en gelijk is aan den inhoud van het parallelogram op beiden als zijden beschreven. De richting der kracht beantwoordt aan eene wenteling van ds naar ϱ.

§ 6. Wij zullen thans aantoonen, dat de vector ϱ niet anders is dan de magnetische kracht, door den stroom s' teweeggebracht, en waarvan K_x, K_y, K_z de componenten mogen zijn.

Beschouwen wij daartoe een oneindig kleinen rechthoek met de zijden dx, dy evenwijdig aan de x- en de y-as en nemen wij aan, dat de omtrek daarvan in positieve richting

door een stroom doorloopen wordt. Gemakkelijk vindt men dan voor de kracht, daarop in de richting der x-as werkende

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x}\, d x\, d y.$$

Aan den anderen kant is die werking door het in § 3 gezegde volkomen bekend. Geeft men aan den rechthoek eene oneindig kleine verschuiving ε in de richting der x-as, dan is de arbeid der electrodynamische krachten

$$\varepsilon \frac{\partial K_z}{\partial x}\, d x\, d y.$$

Dus moet

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x} = \frac{\partial K_z}{\partial x}$$

zijn. Op dezelfde wijze toont men aan, dat

$$\frac{\partial k'_z}{\partial y} = \frac{\partial K_z}{\partial y}$$

is, zoodat $k'_z - K_z$ slechts eene functie van z zijn kan. Neemt men echter in aanmerking, dat voor x of $y = \infty$ alle magnetische en electrodynamische werking moet verdwijnen, dan blijkt het, dat overal $k'_z - K_z = 0$ moet zijn. Eveneens wordt $k'_x = K_x$ en $k'_y = K_y$.

Hiermede is bewezen, dat men in de stelling der vorige § onder ϱ de magnetische kracht heeft te verstaan.

§ 7. De vraag is nu alleen nog, of op $d s$, behalve de door deze stelling bepaalde kracht nog een koppel van den in § 4 genoemden aard kan werken. Om dit te beantwoorden merken wij op, dat ook bij eene wenteling van den rechthoek der vorige § de gevonden *krachten* een arbeid verrichten, gelijk aan het aantal doorsneden krachtbuizen, dus gelijk aan de waarde, die de waarneming voor den electrodynamischen arbeid oplevert. De koppels, zoo zij al bestaan, mogen dus ook bij eene wenteling geen arbeid verrichten.

Noemt men het moment van het koppel, dat op een element dx werkt, $L\,dx$, waarbij L eene functie van x, y, z is, dan volgt uit de zoo even gevonden voorwaarde, wanneer men die toepast op eene wenteling van den rechthoek $dx\,dy$ om de x-as:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \, .$$

Eveneens is ook:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \, ,$$

en daar L in elk geval op oneindigen afstand moet verdwijnen, is overal:

$$L = 0 \, .$$

Daar deze uitkomst onafhankelijk is van de richting aan de x-as toegekend, bestaat een koppel nooit en bepaalt de stelling van § 5 de geheele krachtwerking op ds.

Uit die stelling volgt dan verder, dat bij willekeurige bewegingen der deelen van een stroomgeleider ten opzichte van elkander hetzelfde verband tusschen de krachtbuizen en den electrodynamischen arbeid bestaat, als bij de verschuivingen en wentelingen van een geleider van onveranderlijken vorm. Dit werd o. a. door proeven van Boltzmann *), v. Ettinghausen †) en Niemöller §) bevestigd.

§ 8. Wij zullen thans, een stap verder gaande, ook den werkenden stroom in elementen verdeelen, ten einde aldus de werking te leeren kennen, die ds van een element ds' ondervindt. Om voor deze gedeeltelijk onbepaalde werking de meest algemeene uitdrukking te vinden zullen wij eerst eene bijzondere onderstelling maken en vervolgens nagaan, welke krachten behalve de daarbij gevondene nog mogen

---

*) *Wiener Sitz. Ber.*, Bd. 60, p. 69.

†) Ibid., Bd. 77, p. 109.

§) Wiedemann's *Annalen*, Bd. 5, p. 433.

worden aangenomen. Van welke bijzondere werkingswet wij uitgaan, is hierbij onverschillig, daar zij toch in de einduitkomst alle zullen begrepen zijn.

Wij kiezen nu eene onderstelling uit, die na de bovenstaande ontwikkelingen wel het meest voor de hand ligt. Wij verdeelen namelijk de magnetische werking door s' uitgeoefend in deelen van de verschillende elementen ds' afkomstig en nemen aan, dat de electrodynamische en de magnetische werking van zulk een element volgens den regel van § 5 samenhangen. Gelijk men weet verkrijgt men de waargenomen magnetische werking van een gesloten stroom s', wanneer men aanneemt, dat de magnetische kracht door het element ds' uitgeoefend in een punt P op een afstand r gelegen, eene richting heeft loodrecht op het vlak (P, ds') en beantwoordende aan de wenteling van ds' naar r, en eene grootte bepaald door:

$$\frac{\sin (r, ds').\, ds'}{r^2}.$$

In overeenstemming hiermede stellen wij voor de componenten der magnetische kracht, door ds' in het punt (x, y, z) uitgeoefend, als ds' zelf aan het punt (x', y', z') geplaatst is.

$$\frac{z-z'}{r^3}\, dy' - \frac{y-y'}{r^3}\, dz', \text{ enz.}$$

en voor de componenten der electrodynamische werking van ds' op ds:

$$\left[\frac{y-y'}{r^3}\, dx' - \frac{x-x'}{r^3}\, dy\right] dy - \left[\frac{x-x'}{r^3}\, dz - \frac{z-z'}{r^3}\, dx'\right] dz, \text{ enz,}$$

of na eenige herleiding:

$$-\left[\frac{x-x'}{r^3} \cos \varepsilon + \frac{dx'}{ds'} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{ds}\right] ds\, ds', \text{ enz. . . (5)}$$

Gemakkelijk ziet men in, dat deze uitdrukkingen beantwoorden aan de wet van GRASSMANN.

§ 9. Welke ook de werking tusschen de beide stroomelementen moge zijn, men zal zich altijd kunnen voorstellen, dat zij bestaat uit de door (5) gegeven krachten en uit eenige andere werking, die uit krachten en koppels bestaan kan. Om deze »secundaire werking" te bepalen hebben wij slechts deze conditie, dat zij, zoodra s' gesloten is, verdwijnt, daar toch de krachten (5) op zich zelve van de werking van zulk een stroom geheel rekenschap geven.

Men kan nu de secundaire werking door een stroomelement ds' uitgeoefend afleiden uit die van een stroom, die van oneindigen afstand komt en in eenig punt P' met de coördinaten x', y', z' eindigt. Vooreerst kan, zoodra het element ds gegeven is, deze werking slechts afhangen van de plaats van P', daar zij voor twee stroomen, die, van oneindigen afstand komende, beide in dat punt eindigen, dezelfde moet zijn. Immers, wanneer men van den eenen dezer stroomen de richting omkeert, zullen zij samen een stroom vormen, die als gesloten beschouwd kan worden en dus geene secundaire werking uitoefent. Zoodra verder de bedoelde secundaire werking als eene functie van x', y', z' bekend is, zal men door eene eenvoudige differentiatie daarvan naar s' de secundaire werking van een willekeurig stroomelement ds', in P' geplaatst, verkrijgen. Men kan toch zulk een element $P'Q'$ beschouwen als het verschil van twee stroomen beide van oneindigen afstand komende en de een in P', de ander in Q' eindigende.

§ 10. Ten einde de secundaire werking te bepalen, die het element ds in het punt P (x, y, z) van den in P' eindigenden stroom ondervindt, kunnen wij ons voorstellen, dat deze laatste volgens het verlengde der lijn PP' loopt. Wij zullen verder aannemen, dat alle op ds werkende krachten naar het midden daarvan worden overgebracht en de aldus verkregen resulteerende kracht en het koppel nader bepalen door de hypothese, dat tusschen de spiegelbeelden van twee electrische stroomen de spiegelbeelden der krachten werkzaam zijn. Ontbindt men nu ds in de componenten

$(ds)_1$ en $(ds)_2$, respectievelijk volgens PP' en loodrecht daarop gericht, dan volgt uit deze onderstelling, dat op elke daarvan slechts eene secundaire kracht in hare eigen richting kan werken. Deze krachten zullen evenredig zijn met de lengte van $(ds)_1$ en $(ds)_2$ en verder slechts van den afstand $PP' = r$ kunnen afhangen, zoodat wij ze respectievelijk door $R\,(ds)_1$ en $R_1\,(ds)_2$ kunnen voorstellen, waarbij R en R_1 onbekende functiën van r zijn. Wij nemen deze daarbij positief, als de krachten de richtingen van $(ds)_1$ en $(ds)_2$ hebben.

Men kan nu altijd $R = R_1 + R_2$ stellen, waarbij R_2 eene nieuwe onbekende functie is. Na deze splitsing kunnen de beide krachten $R_1\,(ds)_1$ en $R_1\,(ds)_2$ op $(ds)_1$ en $(ds)_2$ werkende tot eene kracht $R_1\,ds$ in de richting van ds worden samengesteld; bovendien bestaat dan nog de kracht $R_2\,(ds)_1$ in de richting van $(ds)_1$.

Voor de componenten der gezochte secundaire kracht op ds verkrijgt men hieruit

$$\left(R_1 \frac{dx}{ds} + R_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{x - x'}{r}\right) ds, \text{ enz.}$$

§ 11. Ook bij het onderzoek van het koppel, dat ds van den in P' eindigenden stroom ondervindt, kan men van de hypothese der spiegelbeelden gebruik maken; alleen moet men daarbij in het oog houden, dat wanneer van een koppel het spiegelbeeld wordt genomen de as van dit laatste niet het spiegelbeeld der oorspronkelijke as is, maar eene richting heeft tegengesteld aan die van dat beeld. Gemakkelijk vindt men dan, dat op de component $(ds)_1$ geen koppel kan werken en op $(ds)_2$ slechts een koppel, waarvan de as loodrecht staat op het vlak (P', ds). Het moment daarvan wordt gevonden door $(ds)_2$ met eene onbekende functie van r te vermenigvuldigen; wij zullen deze K noemen en daarbij eene wenteling van ds naar r als positief beschouwen. De componenten van het koppel worden dan

$$\frac{K}{r}\left[(y - y')\frac{dz}{ds} - (z - z')\frac{dy}{ds}\right] ds, \text{ enz.}$$

§ 12. Uit de uitkomsten der beide vorige §§ vindt men door eene differentiatie naar s' de secundaire werking van ds' op ds en voegt men deze bij de werking, die wij in § 8 leerden kennen, dan vindt men voor de totale kracht, die ds van ds' ondervindt, de componenten:

$$\left[-\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon-\frac{dx'}{ds'}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s'}\left(R_1\frac{dx}{ds}+R_2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{x-x'}{r}\right)\right]ds\,ds',$$

enz.

Deze uitdrukkingen worden nog iets eenvoudiger, wanneer men in plaats van R_2 de functie R_3 invoert met behulp van de betrekking

$$\frac{R_2}{r}=\frac{dR_3}{dr},$$

of van

$$R_3=-\int_r^\infty\frac{R_2}{r}\,dr.$$

Dan worden nl. de krachtcomponenten

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3}+\frac{\partial^2 R_3}{\partial s\,\partial s'}\right)(x-x')+\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+R_3\right)}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right]ds\,ds',\text{ enz.} \quad (6)$$

Het op ds werkende koppel heeft tot componenten

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{dz}{ds}-(z-z')\frac{dy}{ds}\right]\right\}ds\,ds',\text{ enz.}\;.\;.\;.\;\; (7)$$

§ 13. Deze uitdrukkingen met de drie onbekende functiën R_1, R_3, K bepalen de meest algemeene werking, die tusschen de beide stroomelementen mag worden aangenomen. Eene vereenvoudiging verkrijgt men nog, wanneer men de conditie invoert, dat de werking en de terugwerking gelijk en tegengesteld zullen zijn. Door verwisseling van de grootheden, die wel, en van die, welke niet met een accent voor-

zien zijn, gaan (6) en (7) over in de uitdrukkingen voor de werking, door ds op ds' uitgeoefend. Zullen nu vooreerst de krachten, op de beide elementen werkende, gelijk en tegengesteld zijn, dan moet, zooals men onmiddellijk vindt,

$$R_1 = \frac{1}{r} + R_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

zijn, waardoor (6) overgaat in

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{\partial^2\left(-\frac{1}{r}+R_1\right)}{\partial s\,\partial s'}\right)(x-x') + \frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right]ds\,ds' \quad .\,.\,(8)$$

Eene verdere conditie heeft betrekking op de koppels. Zal de actie gelijk zijn aan de reactie, dan moet het systeem der beide elementen, wanneer zij vast met elkander verbonden zijn, door de inwendige krachten geene wenteling kunnen aannemen; dus moet bij overbrenging van alle krachten naar een zelfde punt geen koppel optreden. Kiest men voor dat punt het midden van ds en maakt men voor de krachten van de uitdrukkingen (8) gebruik, dan vindt men voor de componenten van het koppel

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{dz}{ds}-(z-z')\frac{dy}{ds}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{K}{r}\left[(y'-y)\frac{dz'}{ds'}-(z'-z)\frac{dy'}{ds'}\right]\right\} +$$

$$+\left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dy'}{ds'}\right)(z'-z) - \left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dz'}{ds'}\right)(y'-y),$$

of:

$$\frac{\partial\left(R_1+\frac{K}{r}\right)}{\partial s'}\left[\frac{dz}{ds}(y-y')-\frac{dy}{ds}(z-z')\right]+\frac{\partial\left(R_1+\frac{K}{r}\right)}{\partial s}\left[\frac{dz'}{ds'}(y'-y)-\frac{dy'}{ds'}(z'-z)\right],$$

enz.

Zal het koppel altijd 0 zijn, dan moet

$$K = -R_1\, r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

zijn.

De gelijkheid van actie en reactie reduceert dus de onbekende functiën tot eene enkele R_1.

§ 14. De hier verkregen uitkomsten stemmen geheel overeen met die, welke Dr. KORTEWEG voor »onvolledige'' stroomelementen verkrijgt. Door hem worden voor de werking van zulke elementen zeven onbekende functiën ingevoerd, waartusschen dan, als de gelijkheid van actie en reactie niet wordt aangenomen. vier betrekkingen worden gevonden, zoodat er even als in onze formules 3 van elkander onafhankelijke onbekende functiën blijven bestaan. Het is nu niet moeilijk, door toepassing van (6) en (7) op bijzondere gevallen de functiën van Dr. KORTEWEG in R_1, R_3 en K uit te drukken; men vindt daarbij

$$B = -\frac{dR_1}{dr} - \frac{dR_3}{dr} - r\frac{d^2R_3}{dr^2},$$

$$C = \frac{1}{r^2} + \frac{dR_3}{dr},$$

$$(D) = \frac{K}{r},$$

$$E = -\frac{dR_1}{dr},$$

$$(F) = \frac{K}{r} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{K}{r}\right),$$

$$G = \frac{1}{r^2} - \frac{dR_3}{dr},$$

$$(H) = -\frac{K}{r},$$

en deze waarden voldoen werkelijk aan de betrekkingen, die tusschen B, C, enz. bestaan moeten *).

§ 15. Volgens (6) kan men de kracht, die op het element ds werkt, beschouwen als te bestaan uit drie krachten, waarvan de eerste eene aantrekking

$$\left[\frac{\cos\varepsilon}{r^2} - r\frac{\partial^2 R_3}{\partial s\, ds'}\right] ds\, ds'$$

* Men moet daarbij in de formules van Dr. KORTEWEG $A = 1$ stellen, daar onze vergelijkingen op het electromagnetische maatstelsel betrekking hebben.

is, terwijl de tweede en de derde respectievelijk de richtingen van ds en ds' hebben en door

$$\frac{\partial R_1}{\partial s'}\, ds\, ds'$$

en

$$-\frac{\partial \left(\frac{1}{r} + R_3\right)}{\partial s}\, ds\, ds'$$

worden gegeven.

Stelt men $R_1 = 0$ en $R_3 = -\frac{1}{r}$, dan blijft alleen de aantrekking over, waarvan dan de grootte wordt

$$\left[-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] ds\, ds'.$$

Men heeft dan, wanneer men nog $K = 0$ stelt, de wet van Ampère verkregen.

Gelijk men weet werd door Stefan eene theorie opgesteld, die de theoriën van Ampère en Grassmann omvat. Koppels werden daarbij niet aangenomen, en er werd ondersteld, dat alle electrodynamische werkingen omgekeerd evenredig zijn aan de tweede macht van den afstand. Dit komt hierop neer, dat $R_1 = \frac{\alpha}{r}$, $R_3 = \frac{\beta}{r}$, $K = 0$ gesteld wordt.

Het behoeft wel nauwelijks vermeld te worden, dat men bij de opstelling der algemeene theorie even goed als de wet van Grassmann ook die van Ampère, of eenige andere als uitgangspunt had kunnen kiezen. Het onderzoek naar de secundaire werking zou geheel hetzelfde zijn gebleven.

§ 16. Stelt men zich de vraag, of de functiën R_1, R_3, K in (6) en (7) zoo bepaald kunnen worden, dat voor de onderlinge werking van twee stroomelementen eene potentiaal bestaat, dan blijkt het, dat dit niet mogelijk is, zooals men trouwens kon verwachten, wanneer men de welbekende elec-

trodynamische rotatieproeven in aanmerking neemt. Toch wordt bij eene eenigszins andere opvatting der zaak het opstellen eener potentiaaltheorie mogelijk. Men onderscheide daartoe, zooals Dr. KORTEWEG dit doet, *volledige* en *onvolledige* stroomelementen. Een element van de eerste soort vormt een afgesloten geheel; daarbij komt de stroomende electriciteit aan het eene uiteinde in rust, terwijl aan het andere uiteinde rustende electriciteit zich in beweging stelt. Bij een onvolledig element daarentegen stroomt de electriciteit aan het eene uiteinde in, aan het andere uit. Men zal een gesloten stroom naar willekeur kunnen beschouwen als te bestaan uit volledige elementen, waarvan de stroomeinden elkander opheffen, of uit onvolledige elementen; een bewegelijk deel van zulk een stroom zal echter slechts als eene som van onvolledige elementen kunnen worden beschouwd, daar er geene stroomeinden aan optreden.

Hieruit volgt, dat in de ontwikkelingen der voorgaande §§ het werkende element ds' zoowel volledig als onvolledig zijn kan, maar dat ds slechts onvolledig kan zijn, daar van de proef van AMPÈRE en v. ETTINGHAUSEN gebruik werd gemaakt. Zoodra het element, dat de werking ondervindt, volledig is, zullen werkingen mogen worden aangenomen, die niet in (6) en (7) begrepen zijn. Dr. KORTEWEG vindt dan ook in dit geval tusschen de zeven onbekende functiën slechts twee betrekkingen, zoodat er vijf van die functiën blijven bestaan; en hij toont aan, dat deze thans zoo kunnen gekozen worden, dat er eene potentiaal bestaat.

§ 17. Wanneer men de methode van §§ 9—12 heeft gevolgd, zal men thans aldus kunnen redeneeren. De werking, die het element ds' (dat men zich volledig of onvolledig kan denken) op het onvolledige element ds uitoefent, zal door (6) en (7) worden gegeven. Wordt ds volledig, dan zullen bij die werking nog slechts krachten kunnen komen, op de uiteinden ervan werkende; wij hebben dus slechts deze nog te beschouwen.

Vooreerst kan men nu uit de onderstelling, dat bij omkeering van den stroom ook de electrodynamische werking omkeert, afleiden, dat de krachten, op een stroombegin en

op een stroomeinde, in hetzelfde punt van hetzelfde element, werkende, gelijk en tegengesteld zijn. Wij hebben dus slechts de krachten op stroom*einden* te beschouwen.

Wanneer men verder de hypothese invoert, dat de werking, die een ongesloten stroom met stroomeinden ondervindt, tot 0 nadert, wanneer de lengte steeds afneemt, onverschillig, hoe sterk de stroomgeleider gekromd is, dan kan men aantoonen, dat de werking van ds' op een stroomeinde, in een punt P geplaatst, onafhankelijk moet zijn van de richting van den stroom, waartoe dat stroomeinde behoort, dus slechts van de plaats van P met betrekking tot ds' kan afhangen.

Ontbindt men nu dat element in eene component $(ds')_1$ volgens de verbindingslijn $P'P$, en een tweede $(ds')_2$ loodrecht daarop, dan volgt uit de hypothese der spiegelbeelden, dat elke van deze componenten op het stroomeinde in P slechts eene kracht in hare eigen richting kan uitoefenen.

Men zal die krachten respectievelijk door $T(ds')_1$ en $T_1(ds')_2$ kunnen voorstellen, waarbij T en T_1 onbekende functiën van r zijn. Voert men dan verder de nieuwe functie $T - T_1 = T_2$ in, dan kan men de werking ook opvatten als te bestaan uit eene kracht $T_1\, ds'$ in de richting van ds' en eene kracht $T_2\,(ds')_1$ in die van $(ds')_1$. De componenten der totale kracht worden dus

$$\left(T_1 \frac{dx'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x'-x}{r}\right) ds', \text{ enz.}$$

Brengt men nu de krachten, op de beide uiteinden van ds werkende, naar het midden van dat element over, dan ontstaat eene resulteerende kracht

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T_1 \frac{dx'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x'-x}{r}\right) ds\, ds', \text{ enz.}$$

en een koppel

$$\left\{\left(T_1 \frac{dz'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{z'-z}{r}\right)\frac{dy}{ds} - \left(T_1 \frac{dy'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{y'-y}{r}\right)\frac{dz}{ds}\right\} ds\, ds',$$

enz.

Door eindelijk deze te voegen bij de uitdrukkingen (6) en (7) verkrijgt men de meest algemeene waarden, die voor de componenten van de kracht en het koppel mogen worden aangenomen, wanneer ds een volledig element is De uitkomsten blijken wederom met die van Dr. KORTEWEG overeen te stemmen, zoodat het na zijn uitvoerig onderzoek overbodig mag heeten, verder aan te toonen, dat R_1, R_3, K, T_1 en T_2 zoo kunnen gekozen worden, dat er thans eene potentiaal bestaat.

BIJDRAGE TOT DE KENNIS

VAN

NORMAAL CYAANZUUR,

DOOR

E. MULDER.

TWEEDE GEDEELTE.

In het Eerste Gedeelte *) der Bijdrage werd medegedeeld, dat BANNOW meende verkregen te hebben een zout, isomeer met kaliumisocyanaat, en naar hem wellicht kaliumnormaalcyanaat. Onderzoekingen, met betrekking tot dit gewichtige vraagstuk door mij gedaan, waren evenwel niet in overeenstemming met deze uitspraak van BANNOW. Deze scheikundige †), die dit onderwerp gedurende vele jaren had laten rusten, is nu onlangs teruggekomen op zijn vroeger beweren, en verklaart thans zijn vermeend kaliumnormaalcyanaat te zijn kaliumisocyanaat. Wat aangaat de verbinding der formule C_2N_3H van BANNOW, waarvan in gemeld Eerste Gedeelte der Bijdrage tevens werd gewag gemaakt, zoo zegt BANNOW, dat deze niet meer moet beschouwd worden te ontstaan uit kaliumnormaalcyanaat, maar waarschijnlijk wordt gevormd bij verhitten van kaliumcyanide met paracyaan.

Daarmede is deze stof gelegen buiten den kring, waar-

*) Verslagen en Mededeelingen 2de Reeks, Deel XVI. p. 286.

†) Dt. chem. Ges. 13.2201. Deze Aflevering, uitgegeven 13 Dec. 1880, werd eerst door mij ontvangen, nadat reeds het Eerste Gedeelte der Bijdrage was aangeboden aan de K. Akademie v. Wetenschappen.

binnen ik mij wenschte te bewegen, en ik meen reden te hebben daarover verheugd te zijn.

Alvorens over te gaan tot een mededeelen der analysen van erlangde produkten en hunne eigenschappen, schijnt het wenschelijk nogmaals te blijven stilstaan bij de reactie van broomcyaan op natriumaethylaat, waarop ten slotte het geheel neêrkomt. Bij nader inzien toch bleek onder anderen, dat het van groot belang kon zijn, aanwezigheid van water in aether, alkohol, enz., in nog meerdere mate te ontgaan dan tot dusverre geschiedde; in ieder geval zou zuiverheid van materialen niet anders dan heilzaam kunnen werken. Over dit zuiveren later; in de eerste plaats een enkel woord over een proef, gedaan met het doel, vocht, vooral van den dampkring, te mijden. Deze proef bestaat in het volgen der bereidingswijze van vroeger, maar met deze wijziging, dat na inwerking van broomcyaan op natriumaethylaat en filtratie van het broomnatrium, de oplossing werd geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur, welk laatste van tijd tot tijd werd ververscht. De uitkomst scheen te zijn, dat men slechts eenig verschil waarnam in de snelheid, waarmede een kristallijn afzetsel werd gevormd, in zooverre als dit langzamer geschiedde.

Gaan we thans over tot de reactie van broomcyaan en natriumaethylaat en wat daarmede in verband staat. In de eerste plaats moet dan worden medegedeeld, dat in de bereidingswijze een kleine wijziging werd aangebracht, en op 3.8 gr. natrium werd genomen aan aether 116 gr. en aan alkohol 58 gr. (aether en alkohol als vroeger behandeld met natrium, terwijl de alkohol bleek een sterkte te hebben van ongeveer 99,5 pCt.); na oplossen van het natrium werd toegevoegd ongeveer 19 gr. broomcyaan, opgelost in 70—75 gr. aether (watervrij). Nu wordt er opgegeven *), dat Cloëz op 1 mol. natrium, dus op Na_2, nam aan aethylalkohol 5 mol., derhalve $5\,C_2H_6O$, of in gew.-d. op 3,8 gr. natrium aan aethylalkohol 19 gr.. De proef

*) *Dict. Wurtz art.* „acide cyanique.”.

leerde mij evenwel, dat 3,8 gr. natrium niet worden opgelost in een mengsel van 19 gr. aethylalkohol en 116 gr. aether, en zelfs is dit niet het geval met 22,8 gr. alkohol of Na_2 op $6\,C_2H_6O$. De oorzaak is niet toe te schrijven aan gebruik van meer aether. Maar natriumaethylaat vereenigt zich met alkohol, naar GEUTHER en SCHEITZ *), in de verhouding van $C_2H_5.ONa$ en $2\,C_2H_6O$, naar WANKLIJN †) evenwel met $3\,C_2H_6O$. Uit het volgende schijnt te blijken, dat deze verbinding die is van $C_2H_5.ONa$ en $2\,C_2H_6O$. Gaat men toch uit van 31,6 gr. alkohol, dan lossen 3,8 gr. natrium alleen daarin op, wanneer ten slotte wordt verwarmd, langzaam stijgende tot ongeveer 80^0; de verhouding in moleculen is hier die van Na_2 en $8\,C_2H_6O$. Ter vorming van C_2H_5ONa, $2\,C_2H_6O$ wordt noodwendig vereischt de verhouding van Na_2 op $6\,C_2H_6O$:

$$Na_2 + 6\,C_2H_6O = 2\,(C_2H_5ONa,\ 2\,C_2H_6O) + 2\,H.$$

Uit het medegedeelde volgt wel als waarschijnlijk, dat de verbinding die is van C_2H_5ONa, $2\,C_2H_6O$. Reeds even boven 100^0 vangt zij aan ontleed te worden, waarbij dan alkohol vrijkomt. Naar WANKLIJN houdt die aan tot ongeveer 220^0, terwijl terugblijft natriumaethylaat: C_2H_5ONa, dat zelfs tot nabij 290^0 zou kunnen gebracht worden, zonder zich te ontleden. De terugblijvende massa is kleurloos (en zeer ligt), maar wordt door toetreding van zuurstof gekleurd.

Het kon van eenig belang wezen, broomcyaan, opgelost in aether, te laten inwerken op C_2H_5ONa. Daarom werd onder afkoeling bij natriumaethylaat gedaan 9 gr. broomcyaan (op 119 gr. natrium) opgelost in 35 gr. aether, terwijl de massa, eerst goed geschud, daarna eenigen tijd aan zich zelve werd overgelaten. Na filtratie en indamping van het filtraat op een waterbad, bleef een licht geelgekleurde vloeistof terug, ongeveer 2 gr., die zich in 't algemeen ver-

---

*) *Jahresber.* 1868, 414.

†) *Ann. Ph. Ch*, 150, 200, 206 (1869); zie *Handwrt. Fehling Art.* Alkohol, S. 258.

hield als die gemaakt naar de gewone methode (de theorie eischte de vorming van ongeveer 4 gr. n. cyaanzuur aethyl).

In 't voorbijgaan zij opgemerkt, dat WANKLIJN geneigd schijnt te zijn (ten minste uitte hij zich voor eenige jaren in dien zin), dat zoogenaamd natriumaethylaat, algemeen beschouwd als C_2H_5ONa, te houden voor een lichaam van de structuur $Na-C_2H_4-OH$, in welk geval met broomcyaan zou kunnen ontstaan $NC-C_2H_4-OH$, dat wel zoo niet schijnt te wezen.

Door inwerking van broomcyaan, opgelost in aether, op C_2H_5ONa, wordt noodwendig toetreding van water meer tegengegaan dan vroeger het geval was. Een schaduwzijde dezer methode is evenwel, dat broomcyaan niet zoo goed vermag in te werken op C_2H_5ONa, een vaste stof, als op C_2H_5ONa, xC_2H_6O, opgelost in alkohol. Er werd daarom uitgezien naar andere middelen om toetreding van water zooveel mogelijk te voorkomen. Men plaatste daartoe in alle glazen toestellen, de burette niet uitgezonderd, eenige dagen vóór het gebruik, glazen buisjes, met zwavelzuur gevuld, om aanhangend water en vocht van ingesloten lucht meerendeels te verwijderen. Een andere voorzorg was, den aether, na gezuiverd te zijn met natrium op de gewone wijze, daarenboven te laten staan met vloeibaar natriumamalgama tot op het oogenblik van gebruik. Wat eindelijk den alkohol aangaat, reeds vroeger werd in 't kort medegedeeld, dat eenmalige behandeling met natrium niet toereikend bleek te zijn tot het maken van absoluten alkohol. Zoo gaf 250 gr. alkohol van 98—98,5 pCt., met niet minder dan 11--12 gr. natrium, na oplossing en verhitting met staanden afkoeler, bij overhaling, alkohol van ongeveer 99,5 pCt.; werd deze alkohol ten tweeden male op gelijke wijze behandeld met natrium, dan verkreeg men een alkohol van nagenoeg 99,8 pCt.. Daarentegen scheen werkelijk absolute alkohol te worden erlangd door verhitten van hetgeen bij gemelde bewerkingen in de retort terugbleef (bestaande uit een mengsel van C_2H_5ONa, xC_2H_6O en eenig $NaOH$) te ontleden in een oliebad en op te vangen den bij 120^0-150^0 overgaanden alkohol. Het komt mij voor, dat

deze methode, om zich absoluten alkohol te verschaffen, niet weinig voor heeft boven de tot nog toe aangewende methoden, als: herhaalde overhaling over calciumoxyde, enz., daar zij toelaat, in betrekkelijk weinig tijd absoluten alkohol in groote hoeveelheid te maken. Bij vergelijking met den gewonen dusgenaamd absoluten alkohol, is opmerkelijk, dat de alkohol, afkomstig van C_2H_5ONa, xC_2H_6O, nagenoeg geen reuk bezit, een eigenschap van zuiveren alkohol, waarop, indien ik mij niet vergis, reeds werd gewezen door Mendelejeff.

In 't vervolg zal, ter onderscheiding, de alkohol van ongeveer 99,5 pCt., verkregen door overhaling van den zoogenaamd absoluten alkohol van den handel, na daarin natrium te hebben opgelost, genoemd worden alkohol A, en die, gemaakt door ontleding van C_2H_5ONa, xC_2H_6O, worden aangeduid met alkohol B (zie vroeger). Alkohol, verkregen door dien van 99,5 pCt. andermaal te behandelen met natrium en over te halen, om van het terugblijvende bij ontleding in een oliebad op te vangen het bij 120^0—150^0 overgaande, dus naar de wijze gemaakt als vroeger met alkohol van 98—98,5 pCt., zal tevens worden bestempeld met de benaming van alkohol B, daar deze van den eersten, aldus aangeduid, niet merkbaar schijnt te verschillen.

In het Eerste Gedeelte onzer Bijdrage werd een analyse medegedeeld *) van het vloeibare product, afgezonderd door water uit het ruwe product, gemaakt met alkohol A. Er werd gevonden:

	I.	II.
koolstof	51,4	—
waterstof.	8,4	—
stikstof	—	16,4.

Dit product bevatte zonder twijfel nog alkohol. Het kon niet lang genoeg staan om behoorlijk te worden gezuiverd (zie later), maar zette betrekkelijk snel een kristallijn lichaam af. Nadat de massa schijnbaar geheel vast was geworden,

---

*) l. c. pag. 11.

deed men deze tusschen filtreerpapier (nu en dan ververscht), waarin nog veel vloeibaars werd opgenomen; vervolgens werd deze vaste stof opgelost in alkohol, en daarna bij de oplossing water toegevoegd in een betrekkelijk groote hoeveelheid, zoodat een vloeibaar afzetsel werd gevormd. Dit laatste kristalliseerde bij staan, en er ontstonden goed gevormde prisma's, die, onder een exsiccator geplaatst, een verweerd aanzien erlangden. Hierbij diene medegedeeld, dat deze bewerking geschiedde in een koude omgeving, en dit mag de reden wezen, dat zich dit verschijnsel later, in een warmer jaargetijde werkende, niet meer voordeed.

0,217 gr. dezer stof gaf 0,4008 gr. kooldioxyde en 0,147 gr. water; 0,2955 gr. stof gaf bij 769,2 ^{mm} en 22^0 aan stikstof 51 C. C. (A).

De moederloog van gemelde stof werd geplaatst onder een exsiccator en zette na vele weken een kristallijn lichaam af, wat onder een exsiccator den glans behield.

0,3807 gr. dezer stof gaf 0,7064 kooldioxyde en 0,2567 gr. water (B).

Opmerkenswaardig is, dat deze moederloog, na eerst geruimen tijd te hebben gestaan, bij verhitting troebel werd, en bij bekoeling andermaal helder, welk verschijnsel een onbepaald aantal malen kon herhaald worden, en zeker in verband staat met het lage smeltpunt der kristallijne stof in oplossing (zie later).

Van een kristallijne massa (kleurloos) eener andere bereiding, na tusschen filtreerpapier eenigen tijd te zijn geweest, werd ongeveer 3 gr. opgelost in 23 gr. alkohol en hierbij gedaan 30 gr. water, waarbij nog niets werd afgezet. Na staan onder een exsiccator, verdampte noodwendig vooral aanvankelijk de alkohol, een vloeibaar product werd afgezet, dat langzamerhand kristalliseerde. Na eenigen tijd te zijn geweest tusschen filtreerpapier, werd overgegaan tot de analyse (C).

0,3857 gr. stof gaf 0,7125 gr. kooldioxyde en 0,249 gr. water.

Op 100 gew.-d. leiden deze analysen tot een gehalte aan:

	A	B	C	$3(NC.OC_2H_5)$ vordert:
koolstof	50,4	50,6	50,6	50,7
waterstof.	7,4	7,4	7,1	7,0
stikstof	19,7	—	—	19,7 .

Het smeltpunt van A, B en C is ongeveer 29⁰, terwijl bij verhitten met potassaloog, daarna toevoeging van een zuur, cyanuurzuur wordt afgezet. Het lichaam is dus te beschouwen als een cyanuurzuur aethyl, en wel in verband met bekende feiten als *normaalcyanuurzuur aethyl.*

Het lage smeltpunt is niet bevreemdend, in zooverre als HOFMANN *) voor het smeltpunt van diaethylamidonormaalcyanuurzuur geeft 97⁰, en voor dat van normaalcyanuurzuur methyl 132⁰ (elders staat 134⁰) en van dimethylamidonormaalcyanuurzuur 212⁰. Nu is 212⁰—132⁰ = 80⁰ en 97⁰—80⁰ = 17⁰, waartoe dan het smeltpunt van normaalcyanuurzuur aethyl zou kunnen naderen. Evenwel wordt als smeltpunt van isocyanuurzuur methyl opgegeven 175⁰ en van isocyanuurzuur aethyl 95⁰, terwijl 175⁰—95⁰ = 80⁰; het smeltpunt van normaalcyanuurzuur aethyl en methyl geven een ander verschil (zie boven), want 132⁰ - 29⁰ = 103⁰, dat nog al verwijderd is van 80⁰. In ieder geval bestaat tusschen de smeltpunten van beide cyanuraten van methyl en aethyl een groot verschil, terwijl het smeltpunt der methylverbinding aanmerkelijk hooger is dan dat der overeenkomstige aethylverbinding.

Bij wijze eener voorloopige proef werd eenig n. cyanuurzuur aethyl in een reageerbuisje op een gasoven verhit, waarbij een vloeibaar lichaam werd opgevangen, dat kristalliseerde.

Het ruwe product van broomcyaan en natriumaethylaat werd bij de vorige bereidingen neêrgeslagen en gewasschen met water. Bij deze bewerking ging een kleine hoeveelheid van het lichaam van CLOËZ mede. Gemeld waschwater en praecipiteerwater zetten bij staan kristallen af.

0,2254 gr. stof gaf 0,4075 gr. kooldioxyde en 0,148 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

---

*) l. c.

koolstof	49,2
waterstof.	7,2

De stof, die tevens een smeltpunt bevat van ongeveer 29⁰, is blijkbaar in hoofdzaak n cyanuurzuur aethyl. Deze analyse wordt medegedeeld om ook hiermede te doen uitkomen, dat bij de bereidingswijze, door ons gevolgd, de verbindingen, die HOFMANN uitsluitend verkreeg met chloorcyaan en natriumaethylaat, namelijk n. monamido-(a) en diamidocyanuurzuur aethyl (b), in 't geheel niet of in kleine hoeveelheid schijnen te ontstaan, daar deze (overigens met zeer afwijkende smeltpunten, vorderen aan:

	a	b
koolstof . . . , . .	45,6	38,7
waterstof.	6,5	5,8.

Het is mij niet duidelijk, wat bij HOFMANN aanleiding kan hebben gegeven tot de vorming van deze amidoafgeleiden *), vooral daar aanwezigheid van betrekkelijk veel water (hierover later), ten minste bij het werken met broomcyaan, van dergelijke verbindingen hoogstens een geringe hoeveelheid doet ontstaan. Van urethaan, bij onze bereidingswijze gevormd, spreekt HOFMANN niet.

Gaan we thans over tot bereidingen met alkohol B, afkomstig van C_2H_5ONa, xC_2H_6O zie vroeger). Het ruwe product werd gepraecipiteerd en gewasschen met water op de wijze als dit vroeger geschiedde. Opmerkenswaardig is hierbij, dat hoegenaamd geen verschil was waar te nemen betreffende de hoeveelheid water, vereischt ter praecipitatie. Na ruim een paar maanden te hebben gestaan (het was in den zomer, onder een exsiccator met zwavelzuur, nu en dan ververscht,, waarbij zich slechts een kleine hoeveelheid eener kristallijne stof (geen n. cyanuurzuur aethyl) afzette, van welke men de vloeistof afschonk, werd geanalyseerd.

Van een zelfde bereiding gaf:

---

*) Zie Eerste Gedeelte, pag. 7.

a. 0,3577 gr. stof 0,6492 gr. kooldioxyde en 0,2312 gr. water;

b. voorzichtigheidshalve werd een tweede analyse gedaan, terwijl 0,3786 gr. stof gaf 0,6879 gr. kooldioxyde en 0,2469 gr water;

c. 0,2738 gr. stof gaf bij 19,2^0 en 755,5^{mm} aan stikstof 48,5 C C; op 100 gew -d. komt dit overeen met:

	a.	b.	c.	x (NC. O C_2H_5) eischt:
koolstof	49,5	49,5	—	50,7
waterstof. . . .	7,1	7,2	—	7,0
stikstof.	—	—	20,1	19,7.

Weinige dagen na het verrichten dezer analysen werd de temperatuur der omgeving lager, en kristallisatie trad in. Waarschijnlijk bestond deze vloeistof dus minstens uit een mengsel van $NC.OC_2H_5$ en n. cyanuurzuur aethyl, want dit laatste werd afgezet. In een barometerbuis ter bepaling van het soort.-gew. in gasvorm naar Gay-Lussac-Hofmann, ging de vloeistof niet over in damp bij verhitten met waterdamp van 100^0; evenwel was deze vloeistof geperst uit de massa, nadat deze reeds voor een goed deel in den vasten staat was overgegaan. Deze laatste proef moet dus worden herhaald.

Over gesloten koolstofhoudende ketens met zes schakels De vorming van een gesloten keten, met koolstofatomen als schakels, geschiedt gemakkelijk met zes atomen, terwijl dergelijke ketens met drie en vijf atomen koolstof onbekend zijn. De neiging als bij acetylen: $HC \equiv CH$, om onder sommige omstandigheden over te gaan in een keten met *zes* schakels, namelijk benzol, treft men ook aan bij isocyaanzuur en normaalcyaanzuur als alkylverbindingen: $O = C = N - R$ en $N \equiv C - OR$. In deze ketens kunnen de atomen koolstof of koolstof en stikstof beschouwd worden aldus vereenigd te zijn:

benzol:	normaalcyanuurzuur:	isocyanuurzuur:
C = C	N = C	N — C
| |	| |	| |
C C	C N	C N
‖ ‖	‖ ‖	| |
C — C	N — C	N — C.

Het is wel aan geen twijfel onderhevig, of stikstof nadert in dit opzicht tot koolstof, en bij theoretische beschouwingen betreffende de structuur van benzol en afgeleiden, in 't algemeen van zoogenaamd aromatische stoffen, zal men goed doen deze gesloten ketens met stikstof niet buiten rekening te laten, en evenmin pyridine, enz..

Zooals bekend, vervult waarschijnlijk pyridine een niet onbelangrijke rol bij het opbouwen in de plant van vele plantaardige stikstofhoudende bases, terwijl theïne en theobromine afgeleiden schijnen te wezen van barbituurzuur, beiden ketens met zes schakels en wel:

```
pyridine:        barbituurzuur:
 C — C             N — C
 |   |             |   |
 C   N             C   C
 ||  ||            |   |
 C — C             N — C.
```

Koolstof en stikstof kunnen, bij aanwezigheid ook van minder dan drie atomen stikstof, gemakkelijk gesloten ketens maken met minder dan zes schakels, onder anderen met vijf schakels. Zoo bevat b. v. hydantoïne:

```
 N — C
 |   |
 C   |
 |   |
 N — C.
```

Het zal wel niet toevallig wezen, dat de at.-gew. van koolstof en stikstof nagenoeg (of volkomen) tot elkander staan als 6 : 7, noch dat de affiniteitswaarden tot elkander zich verhouden als 4 : 5, of, gelet op de affiniteitswaarden van stikstof, die vooral neiging schijnen te hebben op te treden als 4 : 3.

De grondstof, die, na koolstof en stikstof, vooral aanleiding geeft tot de vorming van gesloten ketens bij koolstofhoudende stoffen, is zuurstof, terwijl de at.-gew. van koolstof, stikstof en zuurstof nagenoeg (of geheel) tot elkander staan als 6 : 7 : 8, en de affiniteitswaarden, die vooral neiging hebben op te treden, zich verhouden als 4 : 3 : 2.

Het kwam mij niet ongeschikt voor, op een en ander reeds thans voorloopig te wijzen. Dergelijke eenvoudige verhoudingen maken het daarenboven een weinig duidelijk, dat koolstof met stikstof en zuurstof (benevens waterstof) niet toevallig de aangewezen grondstoffen zijn, om zooveel duizenden verbindingen op te bouwen.

In onze nadere studie van normaalcyaanzuur en afgeleiden zullen we wellicht gelegenheid hebben, het verband tusschen gesloten koolstof- en kool-stikstofketens meer uitvoerig te behandelen.

Utrecht, 29 October 1881.

VERSLAG

OVER EENE VERHANDELING VAN

Dr. A. A. W. HUBRECHT

GETITELD:

„STUDIEN ZUR PHYLOGENIE DES NERVENSYSTEMES."

Uitgebracht in de Vergadering van 26 *November* 1881.

De Commissie, benoemd in Uwe vergadering van 29 Oct. jl., om verslag uit te brengen over een door den Heer Dr. A. A. W. HUBRECHT aangeboden bijdrage, getiteld: »Studien zur Phylogenie des Nervensystemes", heeft de eer U het volgende te berichten.

Onder de dieren, die gedurende den derden tocht van den Willem Barentz in de noordelijke poolzeeën verzameld zijn, behoort een klein ongewerveld dier, uit de afdeeling der Wormen.

Een nauwkeurig onderzoek van dit voorwerp leerde den Schrijver, dat hij hier niet alleen met eene nieuwe soort, maar zelfs met een geheel nieuw geslacht te doen had. Aan het laatste gaf hij den naam »Pseudonemator" en de soort noemde hij »nervosum."

Na eerst in algemeene trekken het dier beschreven te hebben, wijdt de Heer HUBRECHT zijne bijzondere aandacht aan het zenuwstelsel, dat zich hier in een uiterst merkwaardigen vorm voordoet en voor de vraag naar den phylogenetischen oorsprong van dat stelsel, in 't algemeen, zonder twijfel van zeer groot gewicht kan zijn. Het bedoelde zenuwstelsel toch heeft hier de gedaante van een koker, die binnen en onmiddellijk tegen de kringvezellaag gelegen is. Alleen aan het achterste lichaamseinde is de buikhelft van den koker verdwenen en bestaat nog alleen zijne rughelft.

Deze zenuwcilinder is niet overal even dik; ventraal en ventro-lateraal is hij het dunst, dáár, waar de beide dorso-laterale gedeelten in het rug-gedeelte overgaan, daarentegen het dikst. Vooral geldt dit voor het achterste lichaamseinde. De mikroskopische bouw van dit zoo eigenaardig gevormde zenuwstelsel wordt dan door den Schrijver uitvoerig en nauwkeurig toegelicht.

De volgende tweederde gedeelten zijner bijdrage wijdt de Heer Hubrecht aan beschouwingen over het zenuwstelsel bij de Nemertinen, Medusen, Actiniën, Ctenophoren, Chaetognathen, Mollusken, Echinodermen, Proneomenia, marine Dendrocoelen, enz.; en vergelijkt de verkregen uitkomsten met die, door hem bij Pseudonemator gevonden, terwijl de laatste bladzijden gewijd zijn aan de phylogenetische ontwikkeling van het zenuwstelsel. Door een elftal afbeeldingen worden de verkregen uitkomsten verduidelijkt.

Ten slotte zij nog vermeld, dat aan den Schrijver van dit nieuwe geslacht Pseudonemator slechts een enkel exemplaar ten dienste stond: het eenige, dat op den 3den tocht van den Willem Barentz verzameld werd.

Uwe Commissie adviseert volgaarne tot de opneming der verhandeling van den Heer Hubrecht in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie.

Leiden en Utrecht.

C. K. HOFFMANN.
Th. W. ENGELMANN.

VERSLAG

OVER DE MOGELIJKHEID EENER

ZELFONTBRANDING VAN LOMPEN,

in de Vergadering van 26 *November* 1881

UITGEBRACHT DOOR DE HEEREN

E. H. VON BAUMHAUER, J. W. GUNNING en A. C. OUDEMANS Jr.

In de Vergadering van de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen van 29 October 1881, werd in onze handen tot praeadvies gesteld eene missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken van 10 October 1881, N⁰. 4399, Afd. B B. met vele bijlagen, waarbij de Akademie verzocht werd, Z. E. in staat te stellen, de door den Vicepresident van den Raad van State gedane vraag, of in een lompenmagazijn door zelfontbranding brand kan ontstaan, te beantwoorden.

Uit de bijlagen blijkt dat de vraag geschiedt naar aanleiding van een besluit van Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, waarbij aan M. GOMPERTZ de oprichting eener bewaar- of bergplaats voor lompen, in een perceel op de Prins-Hendrikkade N⁰. 71 te Amsterdam, is geweigerd, van welk besluit M. GOMPERTZ bij Z. M. den Koning in hooger beroep is gekomen, waardoor deze zaak bij den Raad van State, afdeeling voor de geschillen van Bestuur, aanhangig is gemaakt.

Met de, in de gewisselde stukken behandelde, kwestie of het bedoelde pakhuis bij een ontstanen brand, wegens zijne ligging, moeilijk door de brandbluschmiddelen te bereiken

zal zijn, alsmede of lompen bij de minste aanraking met kaarslicht of vuur gemakkelijk in brand geraken, behoeft Uwe Commissie zich niet onledig te houden; de eenige vraag, die aan de Akademie ter beantwoording wordt voorgelegd, is: kan in lompen, tot eene groote massa in een pakhuis opgestapeld, zelfontbranding plaats grijpen?

Na het met groote nauwgezetheid opgemaakt verslag van de heeren G. J. Mulder, A. H. van der Boon Mesch en J. C. Rijk: *Over de oorzaken der zelfontbranding van stoffen, in schepen geladen*, hetwelk, naar aanleiding eener aanschrijving van den Minister van Binnenlandsche Zaken van 2 September 1853, werd uitgebracht in de Vergaderingen der Akademie van 26 November en van 24 December 1853, en opgenomen is in het eerste deel der Verhandelingen in 4^{0}. van 1854, behoeft Uwe Commissie niet uit te wijden over de beteekenis, die aan het woord *zelfontbranding* moet worden gegeven. Dit woord behoort in den ruimsten zin te worden opgevat, en de vraag beantwoord worden: Kunnen lompen, tot eene groote massa opeengehoopt, zonder dat er vuur bij gebracht wordt, door toetreding van lucht of vocht, of door broeiing, zoodanig verhit worden dat zij vuur vatten en tot een brand aanleiding kunnen geven?

Wat wordt er al in een lompenpakhuis bij elkander gebracht? Behalve oud gedrukt en ongedrukt papier: oude afgedragen kleedingstukken, oude tapijten en andere oude lappen, in één woord allerlei geweven en ongeweven katoenen, linnen, wollen en zijden stoffen, door langdurig gebruik met allerlei vuil en smeer bezoedeld, waarbij op de hoedanigheid dier stoffen en de daaraan klevende vreemde bestanddeelen hoegenaamd niet wordt gelet. Dit alles wordt hetzij dooreen opgestapeld of wel tot verschillende doeleinden, zooals de papierfabrikatie, de wolindustrie, enz., vooraf uitgezocht en afzonderlijk tot hoopen gebracht. Kan in zulk eene massa, hetzij zonder of met toetreding van water, eene gisting of broeiing ontstaan, zooals bij het hooi en vele andere plantendeelen, die nog in meer of minder verschen toestand in groote hoeveelheid opeengestapeld zijn? Door een ingetreden gisting wordt *hier* eene scheikundige omzetting der

bestanddeelen zelven voortgebracht en zooveel hitte ontwikkeld, dat verkoling plaats vindt en bij toetreding der lucht de massa vlam vat. Het lange gebruik en het blootstaan aan de lucht van de stoffen, die als lompen in het pakhuis komen, maken deze wijze van zelfontbranding zeer onwaarschijnlijk.

Er is echter eene geheel andere scheikundige werking, die tot de zelfontbranding der lompen aanleiding kan geven en deze reeds meermalen veroorzaakt heeft, nl. de inwerking der zuurstof van de lucht op de weefsels, wanneer zij, zooals dit bij lompen meestal plaats vindt, bezoedeld zijn met vette lichamen.

Vloeibare en vooral drogende oliën (lijnolie, hennepolie, notenolie, enz.), maar ook de niet drogende (boomolie, raapolie, koolzaadolie, enz.) nemen de zuurstof uit de lucht op; de niet drogende in den regel langzamer en voortdurender dan de drogende, die het spoedig en sterk, doch soms in langen tijd weinig of niet, en dan eensklaps zeer sterk doen.

Bij deze verbinding der zuurstof met de bestanddeelen der vette lichamen, wordt warmte ontwikkeld, die echter, wanneer genoemde stoffen aan de vrije lucht zijn blootgesteld, door de afkoeling naar buiten nauwelijks merkbaar wordt. Geschiedt zij echter in eene groote massa lompen, zoodat de plaats, waar de zuurstof-opneming en warmte-ontwikkeling plaats vinden, door de omgevende lagen tegen de afkoeling van de buitenlucht en tegen luchtstroomen beschermd wordt, dan kan de ophooping van warmte zoo groot worden, dat verkoling en gloeiing ontstaan, terwijl de gemakkelijk brandbare lompen die gloeiing voortplanten, en, wanneer deze tot de buitenste lagen genaderd is, de geheele massa ontvlamt. Het onder de lompen veelvuldig voorkomend poetskatoen, tot het reinigen van machinen gebruikt, en dus met olie doortrokken, is eene voor zelfontbranding hoogst geschikte stof.

Opmerkelijk is het dat, terwijl in het genoemde rapport der Heeren Mulder, van der Boon Mesch en Rijk, over de zelfontbranding van met olie bedeeld linnen, katoen, enz., uitvoerig gehandeld wordt, de lompen niet bij name genoemd zijn in de bij dat rapport gevoegde lange »Lijst der diverse »artikelen, welke, volgens opgave van het Ministerie van

»Koloniën, van de Nederlandsche Handelmaatschappij, van »de Kamers van Koophandel te Amsterdam, Groningen, »Leeuwarden, Middelburg, Rotterdam en Zwolle, gewoonlijk »in scheepsruimte verzonden worden, gerangschikt in afdee-»lingen, naar gelang van den graad hunner brandbaarheid."

Uwe Commissie is van oordeel, dat de door den Minister van Binnenlandsche Zaken aan de Afdeeling gestelde vraag: of in een lompenmagazijn door zelfontbranding brand *kan* ontstaan, bevestigend moet worden beantwoord.

Amsterdam, 26 September 1881.

OVER DE BEWEGINGEN,

DIE ONDER

DEN INVLOED DER ZWAARTEKRACHT,

TEN GEVOLGE VAN TEMPERATUURVERSCHILLEN, IN EENE GASMASSA OPTREDEN.

DOOR

H. A. LORENTZ.

---

§ 1. In eene vroegere verhandeling *) heb ik uit de grondbeginselen der kinetische gastheorie de bewegingsvergelijkingen van gasvormige lichamen afgeleid. Onder de vraagstukken, waarop men die vergelijkingen kan toepassen, trok reeds dadelijk een bijzonder mijne aandacht, dat nl. van de stroomingen, die door eene ongelijke temperatuurverdeeling worden teweeggebracht, en van den invloed, dien deze bewegingen op den overgang van warmte tusschen lichamen van verschillende temperatuur uitoefenen.

Bij de proeven, door verschillende natuurkundigen genomen, ter bepaling van den warmtegeleidings-coëfficiënt der gassen, bleek bij spanningen, gelijk aan ééne atmospheer of niet ver daar beneden, die invloed zeer aanzienlijk te zijn; om hem onschadelijk te maken nam men dan zijne toevlucht tot eene verdunning der gassen. Ik had nu echter de hoop,

*) LORENTZ, De bewegingsvergelijkingen der gassen en de voortplanting van het geluid volgens de kinetische gastheorie, *Versl. en Meded. der Akad. v. Wet.* 2de Reeks, Deel XV.

door de warmtestroomingen aan de berekening te onderwerpen, het mogelijk te maken, ook uit proeven bij grootere dichtheden genomen, den warmtegeleidings-coëfficiënt af te leiden; bovendien zou dan uit die proeven de coëfficiënt der inwendige wrijving moeten volgen, daar deze klaarblijkelijk op de intensiteit der warmtestroomingen van invloed moet zijn.

Toen ik met dit onderzoek begonnen was verscheen eene verhandeling van Oberbeck *) over hetzelfde onderwerp en nu onlangs werd door L. Lorenz †) eene berekening met hetzelfde doel uitgevoerd. Geen dezer natuurkundigen heeft intusschen het vraagstuk geheel opgelost. Oberbeck vindt de hoeveelheid warmte, die door de stroomingen wordt overgevoerd, in den vorm eener reeks, waarvan de eerste term met de derde macht van het temperatuurverschil evenredig is, terwijl de volgende termen nog hoogere machten daarvan bevatten. Eene oppervlakkige beschouwing van de uitkomsten der proeven van Kundt en Warburg §) en van die van Winkelmann **) leert echter reeds, dat het deel der overgevoerde warmte, dat van de stroomingen afhangt, geen term evenredig aan de derde macht van het temperatuurverschil kan bevatten en Oberbeck meent dan ook, dat bij dichtheden, die niet zeer klein zijn, de door hem opgestelde reeks zal divergeeren, en dus de werkelijkheid niet kan voorstellen.

De uitkomst, waartoe Lorenz geraakt, is in betere overeenstemming met de ervaring. Hij behandelt het bijzondere geval van de stroomingen langs eene verticaal geplaatste, verwarmde plaat en vindt voor de afkoelingssnelheid eene uitdrukking, waarin het temperatuurverschil met den exponent $\frac{5}{4}$ voorkomt, hetgeen met de uitkomst der proeven van Dulong en Petit in bevredigende overeenstemming is. Ook die van Kundt en Warburg en van Winkelmann strijden niet met

---

*) Oberbeek, *Wied. Ann.* Bd. 7, p. 271.

†) Lorenz, *Wied. Ann.* Bd. 13, p. 583.

§) Kundt en Warburg, *Wied. Ann.* Bd. 156, p. 177.

**) Winkelmann, *Wied. Ann.* Bd. 156, p. 497.

de stelling, dat de afkoelingssnelheid — voor zoover zij aan de warmtestroomingen is toe te schrijven — met eene dergelijke macht van het temperatuurverschil evenredig is. Maar men zal niet zonder nader onderzoek het resultaat, door LORENZ verkregen, op andere gevallen mogen toepassen.

Ook mij is het niet gelukt, het vraagstuk op te lossen, en de verwachting, waarmede ik de berekening begon, is niet verwezenlijkt. Ik geloof intusschen, dat het de moeite waard is, mijne beschouwingen meè te deelen, al zijn zij slechts als eene voorbereiding voor meer volledige behandeling te beschouwen.

§ 2. De bewegingsvergelijkingen der gassen zijn in hun algemeenen vorm vrij samengesteld. Men bepaalt zich dan ook gewoonlijk, b. v. bij de behandeling der geluidsverschijnselen, tot oneindig kleine verstoringen van den evenwichtstoestand. Op dezelfde wijze kan men beginnen, bij het vraagstuk, dat ons thans bezig houdt, de temperatuurverschillen en de daardoor veroorzaakte stroomingen oneindig klein te onderstellen, waardoor verschillende termen in de bewegingsvergelijkingen wegvallen. Men vindt ook dan nog eenigen invloed van de warmtestroomingen op den warmteovergang. Wel is waar valt de eigenlijke convectie weg als eene grootheid van de tweede orde, maar er ontstaat toch door de stroomingen eene wijziging in de gedaante der oppervlakken van gelijke temperatuur en dus ook in de hoeveelheid warmte, die door geleiding wordt overgebracht. De berekening leert nu echter, dat deze wijziging bij proeven, als die van KUNDT en WARBURG zeer gering is en volstrekt niet den door hen gevonden invloed der stroomingen verklaren kan. Men zal dus bij deze proeven de temperatuurverschillen niet meer als oneindig klein mogen beschouwen. Werkelijk blijkt het, dat reeds bij kleinere temperatuurverschillen, b. v. van eenige graden, verschillende termen, die eerst in de bewegingsvergelijkingen werden weggelaten, even groot of grooter worden, dan die, welke men behield. De beschouwing der bewegingsvergelijkingen leert nl., dat men, zoodra de inwendige wrijving en de warmtegeleiding der gassen in rekening gebracht moeten worden, kleine snelheden, b. v. van 1 mM. per secunde

reeds niet meer als oneindig klein mag behandelen. Maakt men nu van de uitdrukkingen, die voor eene oneindig kleine evenwichtsverstoring werden afgeleid, gebruik, om de snelheden te beoordeelen, die bij de warmtestroomingen optreden, dan blijkt het, dat die reeds bij zeer kleine temperatuurverschillen veel te groot zijn, om als oneindig klein beschouwd te mogen worden.

§ 3. Op pag. 360 der boven aangehaalde verhandeling werden de bewegingsvergelijkingen der gassen vooreerst in den volgenden algemeenen vorm afgeleid:

$$\frac{\partial (Nu)}{\partial x} + \frac{\partial (Nv)}{\partial y} + \frac{\partial (Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (a_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} -N\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial P_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_{x,y}}{\partial y} + \dfrac{\partial Q_{x,z}}{\partial z} + \dfrac{\partial (Nu)}{\partial t} = 0, \\ -N\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial Q_{x,y}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Q_{y,z}}{\partial z} + \dfrac{\partial (Nv)}{\partial t} = 0, \\ -N\dfrac{\partial \psi}{\partial z} + \dfrac{\partial Q_{x,z}}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_{y,z}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_z}{\partial z} + \dfrac{\partial (Nw)}{\partial t} = 0, \end{array}\right\} \; . \; . \; (b_1)$$

$$-mN\left(u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \\ + \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c_1)$$

Daarin stellen x, y, z de coördinaten van een punt in de ruimte, t den tijd voor, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ de versnellingen, die eene molecule door de werking der uitwendige krachten verkrijgt, m de massa eener molecule, terwijl N, u, v, w, P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{z,x}$, R, S_x, S_y, S_z grootheden zijn, die van den toestand van het gas in het punt (x, y, z) en op den tijd t afhangen. Beschouwt men een volume-element $d\tau$, dan is vooreerst $N d\tau$ het aantal der daarin aanwezige moleculen, zoodat N het aantal moleculen per ruimteeen-

heid is. Noemt men voorts de snelheid, waarmede het zwaartepunt eener molecule zich voortbeweegt, (ξ, η, ζ), haar arbeidsvermogen (nl. de som van dat der voortgaande beweging en van de inwendige energie) E', dan is, wanneer men sommeert over alle deeltjes binnen $d\tau$:

$$\Sigma\,\xi = N u\, d\tau\,,\ \Sigma\,\eta = N v\, d\tau\,,\ \Sigma\,\zeta = N w\, d\tau\,,$$
$$\Sigma\,\xi^2 = P_x\, d\tau\,,\ \Sigma\,\eta^2 = P_y\, d\tau\,,\ \Sigma\,\zeta^2 = P_z\, d\tau\,,$$
$$\Sigma\,\xi\eta = Q_{x,y} d\tau\,,\ \Sigma\,\eta\zeta = Q_{y,z} d\tau\,,\ \Sigma\,\zeta\xi = Q_{z,x}\, d\tau\,,$$
$$\Sigma\,E' = R\, d\tau\,,$$
$$\Sigma\,\xi E' = S_x\, d\tau\,,\ \Sigma\,\eta E' = S_y\, d\tau\,,\ \Sigma\,\zeta E' = S_z\, d\tau\,.$$

Men merke op, dat u, v, w de snelheden zijn, die het element $d\tau$ in de richting der coördinaatassen in zijn geheel schijnt te bezitten, de *stroomingssnelheden* van het gas, en dat R de energie per ruimte-eenheid voorstelt. De grootheden P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$. $Q_{y,z}$, $Q_{z,x}$ hangen samen met de hoeveelheden van beweging, die door vlakken loodrecht op de coördinaatassen staande door de beweging van de moleculen naar de eene zijde meer dan naar de andere worden overgebracht; evenzoo hebben de grootheden S_x, S_y, S_z betrekking op de energie, door dergelijke vlakken overgevoerd.

Wat de bewegingsvergelijkingen zelf betreft, de eerste, die der continuiteit, drukt uit, hoe door de moleculen, die door de zijvlakken in- en uittreden, het aantal deeltjes binnen een volume-element $d\tau$ verandert. De eerste der vergelijkingen (b_1) bepaalt op overeenkomstige wijze de verandering van de hoeveelheid van beweging in de richting der x-as voor de binnen $d\tau$ aanwezige moleculen. Die verandering wordt door den term $\frac{\partial (N u)}{\partial t}$ voorgesteld (vermenigvuldigd met $m\, d\tau$) en zij is een gevolg gedeeltelijk van de werking der uitwendige krachten $\left(\text{de term } - N \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$, gedeeltelijk van het in- en uittreden van moleculen door de zijvlakken van het element (waarvan de termen $\frac{\partial P_x}{\partial x}$, $\frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y}$, $\frac{\partial Q_{x,z}}{\partial z}$ afkomstig zijn).

Natuurlijk hebben de andere vergelijkingen (b_1) eene overeenkomstige beteekenis. Eindelijk drukt (c_1) uit, hoe de energie binnen het element $d\tau$ met den tijd verandert $\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)$ en wel deels door de werking der uitwendige krachten (de eerste term), deels door het in- en uittreden van moleculen door de zijvlakken $\left(\text{de termen } \frac{\partial S_x}{\partial x}, \frac{\partial S_y}{\partial y}, \frac{\partial S_z}{\partial z}\right)$.

Een meer geschikten vorm verkrijgen de vergelijkingen, wanneer men, na vermenigvuldiging van (a_1) en (b_1) met m, de dichtheid $mN = \varrho$ invoert. Stelt men bovendien de producten van P_x, enz. met m door de overeenkomstige kleine letters voor, dan verkrijgt men:

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (A_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
-\varrho\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial z} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial t} = 0,\\
-\varrho\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial t} = 0,\\
-\varrho\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial t} = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots \quad (B_1)$$

$$-\varrho\left(u\frac{\partial\psi}{\partial x} + v\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} +$$

$$+\frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (C_1)$$

§ 4. Deze vergelijkingen zijn intusschen op zich zelf voor de oplossing van vraagstukken over de beweging der gassen niet voldoende; men moet ze daartoe combineeren met die, welke p_x, enz. uitdrukken, als afhankelijk van de dichtheid, de temperatuur en de stroomingssnelheid van het gas.

Noemt men h het gemiddelde snelheidsquadraat van de warmtebeweging der gasmoleculen, welke grootheid door de

betrekking $h = e\,T$ (e constant) met de absolute temperatuur T samenhangt, verder $\vartheta(h)$ het intramoleculaire arbeidsvermogen der massaeenheid van het gas, μ den wrijvingscoëfficiënt, $\varkappa$ dien der warmtegeleiding (in arbeidseenheden uitgedrukt), ν den derden coëfficiënt, waarvan de beteekenis in mijne vroegere verhandeling werd uiteengezet, dan is (l. c., p. 392), wanneer men kortheidshalve

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = K$$

stelt,

$$p_x = \tfrac{1}{3}\varrho\, h + \varrho\, u^2 - 2\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{2}{3}\,\mu\, K, \text{ enz.} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$q_{x,y} = \varrho\, u\, v - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ enz.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$R = \tfrac{1}{2}\varrho\,(u^2 + v^2 + w^2) + \tfrac{1}{2}\varrho\,[h + 2\,\vartheta(h)] + \nu\, K, \; . \; . \; (3)$$

$$S_x = \tfrac{1}{2}\varrho\, u\,[\tfrac{5}{3}\,h + 2\,\vartheta(h) + (u^2 + v^2 + w^2)] - \frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x} -$$

$$- \mu\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] -$$

$$- 2\,\mu\, u\,\frac{\partial u}{\partial x} + (\tfrac{2}{3}\,\mu + \nu)\, u\, K, \text{ enz.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

§ 5. Wanneer de zwaartekracht op het gas werkt, en de z-as verticaal naar beneden wordt gekozen, is

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = g\,.$$

Er is dan een evenwichtstoestand van het gas mogelijk, waarbij de temperatuur overal even hoog is, dus ook h overal dezelfde waarde h_0 heeft. Dan moet nl.

$$p_x = p_y = p_z = \tfrac{1}{3}\varrho\, h_0\,,$$

$$q_{x,y} = q_{y,z} = q_{z,x} = 0\,,$$

$$R = \tfrac{1}{2}\,\varrho\,[h_0 + 2\,\vartheta\,(h_0)],$$

$$S_x = S_y = S_z = 0$$

zijn en de bewegingsvergelijkingen (A_1)—(A_3) reduceeren zich tot

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0\,, \quad -g\,\varrho + \tfrac{1}{3}\,h_0 \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0\,,$$

waaraan, wanneer men

$$\frac{3\,g}{h_0} = \varepsilon$$

stelt, voldaan wordt door

$$\varrho = D e^{\varepsilon z}\,, \qquad (5)$$

waarbij de constante D de dichtheid voorstelt van het gas voor $z = 0$.

§ 6. Beschouwen wij thans oneindig kleine afwijkingen van dezen evenwichtstoestand Noemt men dan de dichtheid

$$\varrho = D e^{\varepsilon z}\,(1 + s)\,,$$

en stelt men voor de waarde van h

$$h = h_0\,(1 + k)\,,$$

dan zijn s en k, alsmede u, v, w oneindig klein.

Men heeft dan

$$p_x = \tfrac{1}{3}\,D\,h_0\,e^{\varepsilon z}\,(1 + s + k) - 2\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{2}{3}\,\mu\,K, \text{ enz.} \qquad (6)$$

$$q_{x,y} = -\,\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ enz.} \qquad (7)$$

$$R = \tfrac{1}{2}\,D\,e^{\varepsilon z}\,\{[h_0 + 2\,\vartheta\,(h_0)] + [h_0 + 2\,\vartheta\,(h_0)]\,s + h_0[1 + 2\,\vartheta'(h_0)]\,k\} + \nu\,K \ldots (8)$$

$$S_x = \tfrac{1}{2} D e^{\varepsilon z} u \left[\tfrac{5}{3} h_0 + 2\,\vartheta(h_0)\right] - \frac{\varkappa}{e} h_0 \frac{\partial k}{\partial x}\text{, enz.} \quad \ldots \ldots (9)$$

waarbij μ, ν, $\varkappa$ als constanten zijn te beschouwen.

Bij substitutie dezer waarden in de bewegingsvergelijkingen verkrijgt men, wanneer men nog de onderstelling invoert, dat de toestand van het gas stationnair is,

$$K + \varepsilon w = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (A_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{3} D h_0 \dfrac{\partial}{\partial x}[e^{\varepsilon z}(s+k)] - \mu \Delta u - \tfrac{1}{3}\mu \dfrac{\partial K}{\partial x} = 0, \\ \tfrac{1}{3} D h_0 \dfrac{\partial}{\partial y}[e^{\varepsilon z}(s+k)] - \mu \Delta v - \tfrac{1}{3}\mu \dfrac{\partial K}{\partial y} = 0, \\ \tfrac{1}{3} D h_0 \dfrac{\partial}{\partial z}[e^{\varepsilon z}(s+k)] - \mu \Delta w - \tfrac{1}{3}\mu \dfrac{\partial K}{\partial z} - g D e^{\varepsilon z} s = 0, \end{array}\right\} \ldots (B_2)$$

$$g D e^{\varepsilon z} w + \frac{\varkappa}{e} h_0 \Delta k = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (C_2)$$

§ 7. Wij zullen ons voorstellen, dat het gas tusschen twee oppervlakken S_1 en S_2 geheel besloten is, en aannemen, dat de uitdrukkingen van § 5 betrekking hebben op den evenwichtstoestand van het gas, wanneer beide oppervlakken dezelfde aan h_0 beantwoordende temperatuur T_0 hebben.

Stellen wij ons voor, dat de gestoorde toestand, dien wij in § 6 bespraken, ontstaat doordat het oppervlak S_1 voortdurend op eene van de oorspronkelijke oneindig weinig verschillende temperatuur $T_0 (1 + q)$ wordt gehouden. Dan moeten uit (A_2) — (C_2) u, v, w, en k zoo bepaald worden, dat aan S_1 en S_2 $u = v = w = 0$ is (wij nemen nl. geene glijding van het gas langs deze oppervlakken aan), en dat k aan S_2 0 wordt, maar aan S_1 de voorgeschreven waarde q aanneemt. Eindelijk moet, wanneer de geheele hoeveelheid gas onveranderd is gebleven,

$$\iiint e^{\varepsilon z} s \, dx\, dy\, dz = 0 \ldots \ldots (10)$$

zijn, wanneer de integratie over de geheele ruimte tusschen S_1 en S_2 wordt uitgestrekt.

Wij bewijzen vooreerst, dat door deze conditiën het vraagstuk werkelijk geheel bepaald is. Stel nl., dat *twee* stellen waarden van u, v, w, s, k voldeden, dan zou ook het verschil dier waarden moeten voldoen en bij dien bewegingstoestand zou dan zoowel aan S_1 als S_2 ook $k = 0$ moeten zijn. Men kan nu bewijzen, dat dan overal $u = v = w = s = k = 0$ moet zijn.

Daartoe losse men uit de vergelijkingen (B_2) en (C_2) de grootheden Δu, Δv, Δw, Δk op, vermenigvuldige met u, v, w, $\frac{\varkappa h_0}{e\mu} k$, telle op en integreere, na nogmaals met $dx\,dy\,dz$ vermenigvuldigd te hebben, over de geheele ruimte door het gas ingenomen. Er komt dan

$$\iiint\left[u\Delta u + v\Delta v + w\Delta w + \frac{\varkappa h_0}{e\mu} k\Delta k\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{3\mu} D h_0 \iiint\left[u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[e^{\varepsilon z}(s+k)\right] dx\,dy\,dz -$$

$$- \tfrac{1}{3}\iiint\left[u\frac{\partial K}{\partial x} + v\frac{\partial K}{\partial y} + w\frac{\partial K}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz -$$

$$- \frac{gD}{\mu}\iiint e^{\varepsilon z} w\,(s+k)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Men passe nu op de drie eerste integralen de integratie bij gedeelten toe, waarbij de oppervlakte-integralen wegvallen, daar aan S_1 en S_2 $u = v = w = 0$ is. Neemt men bovendien de vergelijking (A_2) in aanmerking, dan komt er

$$- \iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{\varkappa h_0}{e\mu}\left\{\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial z}\right)^2\right\}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \tfrac{1}{3}\iiint K^2\,dx\,dy\,dz\,.$$

Brengt men hier alle termen naar het tweede lid over, dan treedt daar een som van tweede machten op; daaruit kan men besluiten, dat u, v, w, k constant moeten zijn, dus ten gevolge van de grensvoorwaarden overal $= 0$. Het is dan verder niet moeilijk uit (B_2) en (10) te bewijzen, dat ook $s = 0$ moet zijn, waarmede bewezen is, dat de vergelijkingen $(A_2) - (C_2)$ in verband met de grensvoorwaarden slechts ééne oplossing toelaten.

Is eens overal k, en dus de nieuwe temperatuurverdeeling bekend, dan wordt de hoeveelheid warmte, die het door S_1 begrensde lichaam per tijdseenheid aan het gas afstaat, bepaald door de integraal:

$$- \varkappa \frac{h_0}{e} \int \frac{\partial k}{\partial n} \, d S_1 \, , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

waarbij n de naar de zijde van het gas getrokken normaal voorstelt.

§ 8. De algemeene oplossing van $(A_2) - (C_2)$ schijnt, zelfs bij eene eenvoudige gedaante van S_1 en S_2, moeilijk te vinden.

Men kan intusschen, wanneer de dichtheid vrij klein is, dus ook de grootheid D, de veranderlijken u, v, w, k in reeksen naar de opklimmende machten van D ontwikkelen.

Wordt D zeer klein. dan naderen u, v, w tot 0, k tot de waarde k_0, die bepaald wordt door de vergelijking:

$$\triangle k_0 = 0 \, ,$$

in verband met de grensvoorwaarden. De temperatuurverdeeling is dan die, welke ontstaat, wanneer men alleen met de warmtegeleiding te doen heeft.

De reeksen voor u, v, w en k moeten dus den vorm:

$$u = u_1 D + u_2 D^2 + u_3 D^3 + \ldots \ldots \ldots$$
$$k = k_0 + k_1 D + k_2 D^2 + k_3 D^3 + \ldots .$$

hebben. Eveneens stellen wij ook:

$$s = s_0 + S_1 D + s_2 D^2 + s_3 D^3 + \ldots .$$

Door substitutie hiervan in (A_2) — (C_2) verkrijgt men, wanneer men in elke vergelijking de coëfficiënten van dezelfde macht van D in beide leden aan elkander gelijk stelt, eene reeks van vergelijkingen, waardoor u_1, u_2, enz., $k_1, k_2, \ldots, s_0, s_1, \ldots$ bepaald kunnen worden.

Ter bepaling van u_1, v_1, w_1, s_0 heeft men vooreerst:

$$K_1 + \varepsilon w_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A_3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial x}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta u_1 - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial x} = 0, \\
&\tfrac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial y}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta v_1 - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0, \\
&\tfrac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial z}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta w_1 - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial z} - g e^{\varepsilon z} s_0 = 0,
\end{aligned}\right\} \ldots (B_3)$$

waarin

$$K_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

is en k_0 bekend is. De bijkomende voorwaarden zijn aan de grenzen

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

en bovendien

$$\iiint e^{\varepsilon z} s_0 \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Wanneer k_0 reeds zoo bepaald is, dat de waarde daarvan aan S_1 de voorgeschrevene q wordt, moeten k_1, k_2, enz. aan S_1 en S_2 0 zijn. Nu volgt uit (C_2)

$$\Delta k_1 = 0,$$

zoodat overal

$$k_1 = 0$$

is; vervolgens

$$\Delta k_2 = -\frac{g e}{\varkappa h_0} e^{\varepsilon z} w_1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C_3)$$

waardoor k_2 bepaald wordt, nadat uit (A_3) en (B_3) w_1 is gevonden.

§ 9. De opgestelde vergelijkingen ondergaan nog eene aanmerkelijke vereenvoudiging, wanneer wij aannemen, dat de afmetingen der met gas gevulde ruimte klein zijn vergeleken met $\frac{h_0}{g}$. Deze onderstelling komt hierop neer, dat de snelheid, die eene molecule verkrijgt, wanneer zij zich over een afstand l van dezelfde orde als de genoemde afmetingen onder den invloed der versnelling g voortbeweegt, zeer klein is vergeleken met de moleculaire snelheid, iets wat bij proeven als die van KUNDT en WARBURG of WINKELMANN zeker het geval is.

Vooreerst kan nu in (A_3) de term εw_1 worden weggelaten. Want, daar w_1 aan de grenzen der ruimte verdwijnt, is die grootheid overal elders van dezelfde orde als $l \frac{\partial w_1}{\partial z}$, en de term zelf van de orde $l \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial z}$; daar nu $l\varepsilon$ zeer klein is, en in K_1 de term $\frac{\partial w_1}{\partial z}$ voorkomt, mag men voor (A_3) schrijven

$$K_1 = 0 \; \ldots \ldots \ldots \ldots \; (12)$$

Ook de vergelijkingen (B_3) kunnen worden vereenvoudigd. Stelt men ter afkorting

$$\frac{1}{3\mu} h_0 \, e^{\varepsilon z} \, (s_0 + k_0) = P \; , \ldots \ldots \; (13)$$

dan is vooreerst

$$\Delta u_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, \; \Delta v_1 = \frac{\partial P}{\partial y} \; \ldots \ldots \; (14)$$

Verder volgt uit de laatste der vergelijkingen (B_3)

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} \, s_0,$$

of, als men s_0 met behulp van (13) in k_0 uitdrukt,

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \varepsilon P + \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} k_0.$$

Daar nu de veranderingen van εP over de ruimte, met het gas gevuld, van de orde $\varepsilon l \dfrac{\partial P}{\partial z}$ zijn, en εl zeer klein is, mag men van die veranderingen afzien en dus

$$\varepsilon P = C \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

stellen, waarbij C eene voorloopig onbepaalde constante is. De vergelijking wordt dan

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0 - C, \ldots\ldots (16)$$

waarin ook nog $e^{\varepsilon z} = 1$ is gesteld, hetgeen geoorloofd is, wanneer men den oorsprong zoodanig kiest, dat het y z-vlak de gasmassa snijdt.

Stelt men $P - Cz = Q$, dan worden de vergelijkingen

$$\Delta u_1 = \frac{\partial Q}{\partial x}. \ \Delta v_1, = \frac{\partial Q}{\partial y}, \ldots\ldots (17)$$

$$\Delta w_1 = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0 \ldots\ldots\ldots, (18)$$

Gemakkelijk kan men aantoonen, dat door deze vergelijkingen, verbonden met (12), u_1 v_1 w_1 geheel en Q op eene additieve constante na bepaald worden. Aangezien dus Q den vorm $Q' + C'$ aanneemt, waarin Q' geheel bepaald is, wordt

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) - Cz = Q' + C'.$$

Verstaat men onder de constante C, die in (15) werd ingevoerd, de waarde van εP voor $z = 0$, dan is

$$(Q')_{(z=0)} + C' = \frac{C}{\varepsilon}$$

en

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) = Q' - Q'_{(z=0)} + \frac{C}{\varepsilon},$$

aangezien men Cz mag verwaarloozen tegenover $\frac{C}{\varepsilon}$. De constante C eindelijk wordt bepaald uit de voorwaarde dat

$$\iiint e^{\varepsilon z} s_0 \, dx \, dy \, dz = 0$$

moet zijn.

Zoodra u_1, v_1, w_1 uit (12), (17) en (18) bekend zijn, vindt men k_2 uit de vergelijking (C_3), waarvoor men mag schrijven

$$\triangle k_2 = -\frac{g \varepsilon}{\varkappa h_0} w_1 \quad \text{. . . . . (19)}$$

§ 10. Wij zullen thans de berekening van u_1, v_1, w_1, k_2 uitvoeren voor het geval dat S_1 en S_2 concentrische bollen zijn, met de stralen R_1 en R_2. Daarbij denke men zich den coördinatenoorsprong in het middelpunt en $R_1 < R_2$.

Vooreerst volgt nu uit $\triangle k_0 = 0$, verbonden met de grensvoorwaarden:

$$k_0 = q \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right),$$

waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ is.

Wij hebben nu slechts, onverschillig langs welken weg, een stel waarden voor u_1, v_1, w_1 te zoeken, dat aan (12), (17) en (18) voldoet, daar wij reeds weten, dat slechts éene oplossing dier vergelijkingen mogelijk is.

Zulk een systeem verkrijgen wij op de volgende wijze.

Stel

$$u_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}, \quad v_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}, w_1 = -\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right),$$

waarbij I eene onbekende functie van r is. Aan (12) is dan voldaan.

Uit (17) volgt dan

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial z} (\Delta I), \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial z} (\Delta I),$$

dus

$$Q = \frac{\partial}{\partial z} (\Delta I) + f(z),$$

waarbij f eene voorloopig onbekende functie is.

Uit (18) verkrijgt men verder, wanneer men de waarde van k_0 substitueert,

$$\Delta (\Delta I) = \frac{g q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r} \right) + f'(z),$$

waaruit blijkt, dat $f'(z)$ slechts eene constante kan zijn.

Men vindt dus, door samenvatting der constanten

$$\Delta (\Delta I) = \frac{g q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left(C_1 - \frac{1}{r} \right).$$

De algemeene oplossing dezer vergelijking is

$$I = \frac{g q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left[\frac{1}{120} C_1 r^4 - \frac{1}{24} r^3 + C_2 r^2 + C_3 r + \right.$$
$$\left. + C_4 + \frac{C_5}{r} \right], \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

waarbij ook C_2, C_3, C_4, C_5 voorloopig onbepaalde constanten zijn.

§ 11. Ten einde deze grootheden te bepalen, hebben wij de voorwaarde, dat aan het oppervlak der bollen, dus voor $r = R_1$ en $r = R_2$, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ moet zijn. Men kan nu de snelheden uitdrukken in $\frac{dI}{dr}$ en $\frac{d^2 I}{dr^2}$; het is

derhalve noodig, maar ook voldoende, dat deze differentiaalquotiënten voor $r = R_1$ en $r = R_2$ verdwijnen. Dit geeft vier betrekkingen tusschen de constanten C_1, C_2, C_3 en C_5, die in $\frac{dI}{dr}$ en $\frac{d_2 I}{dr^2}$ voorkomen, zoodat deze constanten juist bepaald kunnen worden. C_4 blijft onbepaald, maar deze grootheid is zonder invloed op de waarden van u_1, v_1, w_1.

Om de uitkomst in een eenvoudigen vorm te verkrijgen, gaan wij op de volgende wijze te werk. Daar $\frac{dI}{dr}$ en het differentiaalquotient ervan naar r voor $r = R_1$ en $r = R_2$ moeten verdwijnen, en $\frac{dI}{dr}$ blijken (20) eene algebraïsche rationeele functie van r is, moet zij den factor $(r - R_1)^2 (r - R_2)^2$ bevatten. Uit (20) volgt echter

$$\frac{dI}{dr} = \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left[\frac{1}{30} C_1 r^3 - \frac{1}{8} r^2 + 2 C_2 r + C_3 - \frac{C_5}{r^2} \right] \quad . . (21)$$

Klaarblijkelijk kan dus $\frac{dI}{dr}$ slechts den vorm

$$\frac{dI}{dr} = \frac{\eta}{r^2} (r - R_1)^2 (r - R_2)^2 (r + \vartheta) \quad . . . . (22)$$

hebben, waarin η en ϑ constanten zijn. Deze moeten nu zoo bepaald worden, dat (22) met (21) overeenstemt en daartoe is slechts noodig, dat bij de ontwikkeling van (21) de coëfficiënt van $\frac{1}{r}$ 0 en die van $r^2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$ wordt. Uit de eerste voorwaarde volgt

$$\vartheta = \frac{R_2 R_1}{2 (R_2 + R_1)}$$

en uit de tweede

$$\eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1 (R_2 + R_1)}{4 R_2^2 + 7 R_2 R_1 + 4 R_1^2)(R_2 - R_1)} \quad . . (23)$$

Hiermede hebben wij $\frac{dI}{dr}$, dus ook u_1, v_1, w_1 geheel bepaald. De uitkomsten stemmen volkomen overeen met die, welke OBERBECK voor de stroomingssnelheden verkrijgt, zoodat ik voor eene verdere discussie van den aard der beweging naar zijne verhandeling kan verwijzen.

§ 12. Ter bepaling van k_2 heeft men thans de uit (19) volgende vergelijking

$$\Delta k_2 = \frac{g e}{\varkappa h_0}\left(\frac{\partial^2 I}{d x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right),$$

waaraan, zoodra I_1 eenige functie van r is, die voldoet aan de vergelijking

$$\Delta I_1 = I,$$

voldaan wordt door

$$k_2 = \frac{g e}{\varkappa h_0}\left(\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2}\right).$$

Men mag echter ook stellen

$$k_2 = \frac{g e}{\varkappa h_0}\left[\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} + D_1(3z^2 - r^2) + D_2\left(3\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \right.$$
$$\left. + D_3\frac{1}{r} + D_4\right],$$

daar toch de termen met de onbekende constanten D_1, D_2, D_3, D_4 0 opleveren, wanneer er de door Δ aangewezen bewerking op wordt toegepast. Men kan nu deze constanten bepalen uit de voorwaarde, dat voor $r = R_1$ en $r = R_2$ k_2 moet verdwijnen.

§ 13. Zijn aldus k_0 en k_2 bepaald, dan kan men de beide eerste termen berekenen in de uitdrukking voor de door S_1 per tijdseenheid verloren warmte. De eerste term is blijkens (11)

$$W_1 = -\frac{\varkappa h_0}{e}\int\frac{\partial k_0}{\partial n}\, d\, S_1 = \frac{4\,\pi\,\varkappa\, h_0\, q}{e}\cdot\frac{R_2\, R_1}{R_2 - R_1}$$

en de tweede

$$W_2 = -\frac{\varkappa\, h_0}{e}\frac{D^2}{}\int\frac{\partial\, k_2}{\partial\, n}\; d\, S_1\,,$$

waarvoor men vindt

$$W_2 = \frac{1}{18}\pi\, g^2\, q\cdot\frac{D^2}{\mu}\cdot\frac{R_2^{\,2}\, R_1^{\,2}\,(R_2 - R_1)^3}{4\, R_2^{\,2} + 7\, R_2\, R_1 + 4\, R_1^{\,2}}$$

Om te beoordeelen, in hoeverre deze term van beteekenis is, heeft men slechts de verhouding

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{72}\,\frac{g^2\, D^2}{\mu\,\varkappa\, T_0}\cdot\frac{R_2\, R_1\,(R_2 - R_1)^4}{4\, R_2^{\,2} + 7\, R_2\, R_1 + 4\, R_1^{\,2}}$$

te beschouwen, waarin T_0 de aan h_0 beantwoordende absolute temperatuur is.

§ 14. Bij een der toestellen van KUNDT en WARBURG was R_1, de straal van den thermometerbol, die in een op 0^0 gehouden omhulsel afkoelde, 0,461 cM., R_2, de straal van het omhulsel zelf, 2,972 cM. Berekenen wij de waarde van $\frac{W_2}{W_1}$ voor dezen toestel in de onderstelling, dat hij bij 0^0 met lucht van 760 mM. spanning gevuld was. Dan is, wanneer wij het C. G. S. stelsel van eenheden bezigen,

$$D = 0{,}00129\,,$$

$$g = 981$$

en, daar het omhulsel op 0^0 werd gehouden,

$$T_0 = 273\,.$$

Verder is

$$\mu = 0{,}00017$$

terwijl de coëfficient der warmtegeleiding $= 0.000052$ kan worden gesteld. Die coëfficient is daarbij echter in warmte-eenheden gegeven, terwijl in onze formules $\varkappa$ in arbeidseenheden moet uitgedrukt worden. Wij hebben dus te stellen

$$\varkappa = 0{,}000052 \times 42400 \times 981.$$

Door substitutie van de meêgedeelde waarden verkrijgt men

$$\frac{W_2}{W_1} = 0{,}0003\,,$$

zoodat bij dezen toestel, bij oneindig kleine temperatuurverschillen, de invloed der warmtestroomingen, zelfs bij de drukking van één atmospheer, onmerkbaar moet zijn. Dit neemt echter niet weg, dat in andere toestellen het tegendeel het geval kan zijn. Door R_2 grooter te kiezen, wordt $\frac{W_2}{W_1}$ grooter en wanneer dezelfde thermometerbol geplaatst was in een bolvormig omhulsel met een straal van 30 cM., zou

$$\frac{W_2}{W_1} = 0{,}7$$

worden en dus de invloed der warmtestroomingen, zelfs bij oneindig kleine temperatuurverschillen, zeer goed te bemerken zijn.

§ 15. Het is thans duidelijk dat, bij proeven als die van Kundt en Warburg, de invloed der warmtestroomingen volstrekt niet kan verklaard worden indien men het temperatuurverschil als oneindig klein beschouwt. Het is dan ook gemakkelijk aan te toonen, dat de snelheden, die bij deze proeven optreden, veel te groot zijn om nog van eene oneindig kleine evenwichtsverstoring te mogen spreken.

Om een oordeel over de grootte dier snelheden te verkrijgen, heb ik bij den toestel, waarvan in de vorige § sprake was, de waarde van de snelheid $w_1 D$ berekend in een punt, dat in het horizontale vlak, door het middelpunt der bollen gebracht, op een afstand van 1 c.M. van het middelpunt

gelegen is. (Daarbij is ter vereenvoudiging $R_1 = 0, 5$ en $R_2 = 3$ gesteld). Ik vind dan ongeveer

$$w_1\, D = 0{,}04\ \frac{D\, g}{\mu}\ q,$$

dus voor het geval van lucht met eene spanning (bij 0°) van 1 atmospheer,

$$w_1\, D = 300\ q.$$

Reeds voor $q = \frac{1}{100}$, wat aan een temperatuurverschil van $2^0, 73$ beantwoordt, zou dus deze snelheid 3 c.M. per secunde worden.

In het voor deze berekening gekozen punt is de snelheid grooter dan op de meeste andere plaatsen, maar men zal toch uit het resultaat kunnen besluiten dat, reeds bij temperatuurverschillen van eenige graden, snelheden kunnen optreden, die 1 c.M. per secunde overtreffen.

§ 16. Bij vraagstukken, waar de inwendige wrijving en de warmtegeleiding buiten spel blijven, b.v. bij de gewone geluidsbeweging in eene ruimte van groote afmetingen, mag men zulke snelheden zonder bezwaar als oneindig klein beschouwen. Zoodra echter, zooals hier, alles van de inwendige wrijving en de warmtegeleiding afhangt, is dat niet meer geoorloofd. Dit blijkt uit eene vergelijking van de grootte der termen, die wij in § 6 hebben verwaarloosd, met die, welke wij hebben behouden.

Beschouwen wij b. v. de grootheid S_x, die betrekking heeft op de hoeveelheid warmte, die per tijdseenheid door een vlak loodrecht op de x-as naar de eene zijde meer gaat dan naar de andere. In de volledige uitdrukking voor S_x komen voor de term

$$\tfrac{1}{2}\ \varrho\, u\ [\tfrac{5}{3}\ h + 2\ \vartheta\ (h)],$$

die op de convectie der warmte, en de term

$$\frac{\varkappa}{e}\,\frac{\partial\, h}{\partial\, x},$$

die op de warmtegeleiding betrekking heeft. Wij hebben, na $h = h_0 (1 + k)$ gesteld te hebben, den term

$$\tfrac{1}{2} D u . \tfrac{5}{3} h_0 k$$

(wij laten eenvoudigheidshalve $\vartheta(h)$ buiten beschouwing) en daarmede de eigenlijke convectie buiten beschouwing gelaten; daarentegen den term

$$\frac{\varkappa h_0}{e} \frac{\partial k}{\partial x}$$

behouden.

Vergelijken wij deze beide termen. Wanneer ergens in de met gas gevulde ruimte $k = 0$ is en l eene lijn is van dezelfde orde als de afmetingen dier ruimte, is k van de orde $l \frac{\partial k}{\partial x}$, dus de verhouding der bovenstaande termen van de orde

$$\frac{D u l e}{\varkappa}.$$

Wil men nu dat de eerste term het tiende deel van den tweeden niet zal overtreffen, dan zal dus ongeveer

$$u < \frac{\varkappa}{10 D l e}$$

of

$$u < \frac{\varkappa T_0}{10 D l h_0}$$

moeten zijn. Voor lucht bij atmospheerische drukking en bij 0^0 C. wordt dit, als men $l = 5$ c.M. stelt,

$$u < 0{,}004 \text{ c.M. per sec.}$$

Het blijkt dus dat werkelijk kleine snelheden, ver beneden die welke bij temperatuurverschillen van eenige graden optreden, niet meer als oneindig klein beschouwd mogen worden.

De verkregen uitkomst maakt het zeer goed mogelijk dat zelfs bij de geluidstrillingen, die b.v. door eene stemvork opgewekt worden, de evenwichtsverstoring niet meer als oneindig klein mag worden opgevat, zoodra men wrijving en warmtegeleiding in rekening brengt. In hoeverre deze overweging kan bijdragen tot eene verklaring van de vertraging der geluidsgolven in nauwe buizen, zal ik later trachten te onderzoeken.

§ 17. Zoodra men de evenwichtsverstoring niet als oneindig klein mag aanmerken, wordt de oplossing van vraagstukken over de beweging der gassen zeer moeilijk. Men kan nu echter onderzoeken of het wellicht mogelijk is om, zonder die oplossing voor eenig geval uit te werken, toch aan te geven, hoe zij van verschillende omstandigheden afhangt.

Verbeelden wij ons, in eenig geval A, den bewegingstoestand van een gas, die aan de vergelijkingen (A_1), (B_1) en (C_1) en de grensvoorwaarden voldoet. Bepalen wij verder een tweeden bewegingstoestand B, voor eene andere gasmassa, op de volgende wijze. Laat bij B alle afmetingen α maal grooter zijn dan bij A, en verstaan wij onder overeenstemmende punten bij A en B die, waarvan de coördinaten zich verhouden als 1 en α. Op eene dergelijke wijze noemen wij overeenstemmende oogenblikken bij A en B die, waarvoor de tijden, sedert een vast oogenblik verloopen, tot elkander staan als 1 en β.

Eindelijk stellen wij ons voor dat, in eenig punt en op eenig oogenblik, bij B de snelheden u, v, w, γ-maal, de dichtheid δ-maal, het gemiddelde snelheidsquadraat ε -maal, en de grootheden $\mu, \frac{\varkappa}{e}$ en ν resp. η, ϑ, ζ-maal grooter zijn dan in het overeenkomstige punt en op den overeenkomstigen tijd in den toestand A. De grootheden α, β, γ, δ, ε, η, ϑ, ζ zijn daarbij constanten, en het is de vraag of men die zoo kan bepalen, dat ook de tweede bewegingstoestand mogelijk is, dus aan de bewegingsvergelijkingen voldoet.

Vooreerst blijkt nu uit (1) en (2), dat wanneer

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon}$$

en

$$\alpha = \frac{\eta}{\delta \sqrt{\varepsilon}}$$

is, p_x, p_y, p_z, $q_{x,\,y}$, $q_{y,\,z}$, $q_{z,\,x}$ in B $\delta\,\varepsilon$-maal grooter zijn dan in A.

Uit (3) volgt eveneens, wanneer

$$\vartheta(h) = C\,h$$

is (C eene voor de beide gevallen even groote constante), dat, zoodra nog

$$\zeta = \eta$$

is, R in B $\delta\,\varepsilon$-maal grooter is dan in A.

Eindelijk vindt men uit (4), dat zoodra

$$\vartheta = \eta$$

is, S_x, S_y, S_z in B

$$\delta\ \varepsilon\ \sqrt{\varepsilon}$$

-maal grooter zullen zijn dan in A.

Uit de beschouwing der bewegingsvergelijkingen kan nu verder worden afgeleid dat, wanneer de versnellingen, door de uitwendige krachten veroorzaakt, bij B dezelfde moeten zijn als bij A,

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$$

en

$$\alpha = \varepsilon,$$

moet zijn, opdat ook de toestand B aan de bewegingsvergelijkingen voldoe.

De gevonden conditiën kunnen aldus worden samengevat

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = \varepsilon, \quad \beta = \gamma = \sqrt{\varepsilon}, \\ \eta = \zeta = \vartheta, \\ \delta = \dfrac{\eta}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Is aan deze voorwaarden voldaan, dan staan de hoeveelheden warmte, die in A en B door gelijkstandige oppervlakken per tijdseenheid passeeren, tot elkander als 1 tot $\eta\,\varepsilon^2$.

§ 18. De eerste vraag is nu, of men op deze wijze proeven kan vergelijken, waarbij hetzelfde gas met verschillende dichtheden in denzelfden toestel gebracht wordt tusschen oppervlakken, die in beide gevallen dezelfde temperaturen hebben. Dan zou $\alpha = 1$ en $\varepsilon = 1$, dus ook $\beta = \gamma = 1$ moeten zijn. Daar nu, bij gelijke temperatuur, de wrijvingscoëfficient niet verandert met de dichtheid, zou ook $\eta = 1$ moeten zijn, maar dan geeft onze laatste voorwaarde ook $\delta = 1$, zoodat de bedoelde toepassing niet mogelijk is. Men kan zelfs de dichtheid niet vergrooten, al wil men te gelijkertijd ook de afmetingen van den toestel wijzigen, zoolang ten minste de temperaturen dezelfde zullen blijven. Want uit dit laatste volgt $\varepsilon = 1$, hetgeen dan weder $\alpha = 1$ en $\delta = 1$ vereischt.

Wel kan men twee proeven vergelijken, waarbij hetzelfde gas, achtereenvolgens bij verschillende temperaturen en dichtheden, in toestellen van verschillende afmetingen, maar met elkander gelijkvormig, gebracht wordt, wanneer ten minste de coëfficienten μ, $\varkappa$ en ν op dezelfde wijze van de temperatuur afhangen, zoodat $\eta = \zeta = \vartheta$ is. Staan dan de absolute temperaturen in de beide toestellen tot elkander als 1 en ε, de afmetingen eveneens en de dichtheden als μ en $\frac{\mu'}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ (waarbij μ en μ' de wrijvingscoëfficienten in de beide gevallen zijn) dan kan men door de boven meêgedeelde formules de stroomingssnelheden en de hoeveelheid overgevoerde warmte in het eene geval afleiden uit de waarden, die zij in het andere geval hebben.

Men kan ook proeven vergelijken, waarbij in verschillende toestellen verschillende gassen worden gebezigd, zoodat bij beiden dezelfde temperaturen voorkomen, ten minste, wanneer $\frac{\vartheta(h)}{h}$ bij beide gassen dezelfde waarde C heeft (m. a. w. wanneer bij beide gassen de verhouding der soortelijke warmte bij constanten druk en van die bij constant volume dezelfde

is) en wanneer de waarden van μ, $\frac{\varkappa}{e}$ en ν voor het eene gas uit die voor het andere door vermenigvuldiging met een zelfden van de temperatuur onafhankelijken factor worden verkregen (gelijk het geval is, wanneer de moleculen van beide gassen als veerkrachtige bollen beschouwd mogen worden). Die factor is dan de waarde van η, ζ en ϑ. Voor ε moet men klaarblijkelijk de omgekeerde verhouding der dichtheden van de gassen bij gelijken druk en gelijke temperatuur nemen, en de formules geven dan aan, hoe de afmetingen der toestellen en de dichtheden van het gas, waarmeê zij gevuld zijn, tot elkander moeten staan, om de beide gevallen geheel vergelijkbaar te maken.

Eindelijk ziet men gemakkelijk in dat, wanneer met twee verschillende gassen in denzelfden toestel geëxperimenteerd wordt, overeenkomstige gevallen zullen verkregen worden, wanneer men de temperaturen zoodanig regelt, dat in beide gevallen h dezelfde waarde heeft en wanneer de dichtheden evenredig met den wrijvings-coëfficient worden genomen.

§ 19. Natuurlijk kan men ook in andere vraagstukken over de beweging der gassen dergelijke beschouwingen over overeenstemmende bewegingstoestanden bezigen. Het verdient daarbij nog opmerking dat, zoodra van uitwendige krachten kan worden afgezien, de uit (B_1) volgende conditie $\alpha = \varepsilon$ wegvalt, waardoor eene ruimere toepassing van het beginsel mogelijk wordt.

Ten slotte zij het mij vergund op te merken, dat de bespreking van overeenstemmende bewegingstoestanden geheel onafhankelijk van de bewegingsvergelijkingen kan gemaakt worden, wanneer men de gasmoleculen als veerkrachtige bollen beschouwt, die geene aantrekking op elkander uitoefenen. Men kan dan op eene dergelijke wijze redeneeren als Dr. Kamerlingh Onnes bij de afleiding zijner »Algemeene vloeistoftheorie''. Wanneer nl. een gas, dus een systeem veerkrachtige bollen, zich bewegen tusschen of rondom andere lichamen, die zelven zich kunnen bewegen of in rust zijn, kan men op verschillende wijzen andere bewegingstoestanden verkrijgen. Vooreerst kan men dezelfde plaatsveranderingen in

een tijd doen plaats hebben, die een zeker aantal malen grooter of kleiner is dan in den eersten toestand. Ten tweede is een bewegingstoestand mogelijk, waarbij het bewegelijke systeem op elk oogenblik gelijkvormig is met het systeem bij den eersten bewegingstoestand. De afmetingen der moleculen en die van de ruimte, waarin zij zich bewegen, zijn daarbij alle een zeker aantal malen vergroot of verkleind, en ook de bewegingssnelheden zijn in dezelfde verhouding veranderd. Eindelijk kan men nog, als een systeem een zekeren bewegingstoestand bezit, dezelfde bewegingen toekennen aan een tweede stelsel, dat zich van het eerste onderscheidt alleen doordat alle massa's in dezelfde verhouding zijn veranderd.

Werken er uitwendige krachten, zooals bij de in het voorgaande beschouwde warmtestroomingen, dan moet men in het oog houden dat, bij den overgang van den eenen bewegingstoestand tot den anderen, die krachten in het algemeen niet dezelfde moeten blijven.

RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN

Dr. T. J. STIELTJES Jr.,

GETITELD:

OVER LAGRANGE'S INTERPOLATIEFORMULE.

Uitgebracht in de Vergadering van 26 Nov. 1881.

De Commissie, in Uwe vergadering van 29 October ll. benoemd, ten einde rapport uit te brengen omtrent de aangeboden verhandeling van den Heer T. J. STIELTJES JR: »Over LAGRANGE's interpolatieformule'', heeft de eer het volgende mede te deelen

De Schrijver stelt zich een onderzoek ten doel naar den restvorm der bekende interpolatieformule, en wel niet in de meest voorkomende gedaante eener bepaalde integraal, doch onder meer eenvoudigen vorm. En, evenals men veeltijds de rest van TAYLOR afleidt zonder van de hulpmiddelen der integraalrekening gebruik te maken, kan men hetzelfde voor den analogen restvorm der interpolatieformule verlangen. Zoodanige ontwikkeling wordt in het volgende gegeven.

Door middel eener eenvoudige hulpstelling: eene uitbreiding van het bekende theorema van ROLLE, wordt die restvorm spoedig verkregen. Schrijver wijst op de overeenkomst van het resultaat met de genoemde reeks van TAYLOR, die nog meer uitkomt bij de behandeling van het interpolatieprobleem volgens NEWTON. Hij toont, naar aanleiding van diens onderzoekingen, aan, hoe eene functie $II(x)$ te vormen, het polynomium van laagsten graad, dat aan de voorwaarden voldoet; waarbij, naar aanleiding der door NEWTON ge-

volgde methode, eene meer algemeene gedaante wordt toegelaten dan LAGRANGE bezigde.

De rest, die aan dit polynomium moet worden toegevoegd om de waarde der gezochte functie te vinden, wordt opgemaakt en zoo algemeen mogelijk voorgesteld.

Een naschrift, waarbij wordt aangetoond dat slechts ééne functie $H(x)$ aan den eisch voldoet, laat, vooral aan het slot, aan duidelijkheid te wenschen over. Eene omwerking van dit deel schijnt zeer wenschelijk.

Wat de verdiensten der verhandeling betreft, het blijkt dat zij verschillende belangrijke uitkomsten bevat, meer dan in de inleiding beloofd wordt.

Als zoodanig kan men aangeven:

1⁰ de rest van de interpolatieformule van LAGRANGE (N⁰. 3);

2⁰ de algemeene definitieformule voor het n^e differentiaalquotient (N⁰. 4);

3⁰ den meer algemeenen vorm, aan het vraagstuk gegeven in het tweede gedeelte van N⁰. 5, en de rest voor dit geval (N⁰. 7);

4⁰ de algemeene formule voor den restvorm, in N⁰. 8 ontwikkeld, waaraan zich nog kan aansluiten de uitbreiding van het theorema van ROLLE, gegeven in N⁰. 2 en later in N⁰. 6.

In het algemeen kan gezegd worden, dat de verhandeling van het interpolatieprobleem eene heldere oplossing geeft. Zij getuigt van oorspronkelijkheid en gemakkelijkheid van behandeling.

De Commissie stelt daarom voor, de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen, nadat de Schrijver van enkele opmerkingen van meer ondergeschikt belang zal hebben kennis genomen.

Amsterdam, 26 November 1881.

De Commissie voornoemd:
C. H. C. GRINWIS.
CH. M. SCHOLS.

RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN

Dr. H. HAGA,

GETITELD:

BEPALING VAN DE TEMPERATUURSVERANDERINGEN BIJ SPANNEN EN ONTSPANNEN VAN METAALDRADEN,

EN VAN HET

MECHANISCH EQUIVALENT DER WARMTE.

Uitgebracht in de Vergadering van 26 November 1881.



In deze verhandeling heeft de Schrijver zich ten doel gesteld een reeks van proefnemingen mede te deelen, door hem genomen om te onderzoeken in hoeverre, bij spannen en ontspannen van metaaldraden. een formule der mechanische warmtetheorie bevestigd gevonden wordt, welke de grootte aangeeft der temperatuursverandering, als een stof isentropisch en op omkeerbare wijze een drukverandering ondergaat.

Reeds door JOULE was een dergelijk onderzoek ingesteld, maar op een wijze, die niet alle bedenkingen buitensluit — terwijl later EDLUND door zijne proeven tot het besluit meende te moeten komen, dat de voortgebrachte temperatuursverandering slechts ongeveer 0,62 van die bedraagt, welke volgens de formule zou moeten ontstaan.

Men heeft, de juistheid van EDLUND's uitkomsten aannemende, gezocht naar de mogelijke oorzaak dezer afwijking. In de formule komt o. a. voor: de specifieke warmte van het metaal bij standvastigen druk, en de uitzettingscoëfficiënt.

Maar ofschoon deze grootheden afhangen van den meerderen of minderen graad van spanning van den draad, en dus de bij gewone omstandigheden bepaalde waarde dezer grootheden niet volkomen gelijk zal zijn aan de veranderlijke waarde, welke in de formule zal moeten gebezigd worden, zijn er gronden te over bij te brengen om aan te nemen, dat daardoor zulk een groot verschil niet kan worden verklaard.

Daarom heeft de Heer HAGA het wenschelijk geacht, door nieuwe proeven te trachten de zaak tot klaarheid te brengen.

De temperatuursverandering der sterker of minder sterk gespannen draden werd door hem, evenals door JOULE en EDLUND, thermoëlectrisch bepaald. De sterkte der thermostroomen werd gemeten door een THOMSON'schen galvanometer met kleinen weerstand, en wel werd de terugwerpingsmethode gebezigd. Daar de voorwaarden, waaronder deze methode onveranderd kan toegepast worden, niet geheel vervuld waren, moest de grootte der door het temperatuurverschil teweeggebrachte afwijking, op andere wijze dan zulks bij deze methode gewoonlijk geschiedt, uit de waarnemingen worden opgemaakt. De daarvoor benoodigde formules zijn door Dr. KAMERLINGH ONNES berekend.

De waarnemingen van den Schrijver loopen over staaldraad en nieuwzilverdraad. Van beide stoffen zijn ook de uitzettingscoëfficiënt in gespannen toestand en de specifieke warmte bepaald geworden.

De overeenstemming der verschillende uitkomsten toont, dat de waarnemingen zeer nauwkeurig en de gevolgde methoden aanbevelenswaard zijn.

En de slotsom der waarnemingen is, dat er behoorlijke overeenstemming is tusschen de temperatuursveranderingen, welke door haar geleverd en die welke uit de formule worden berekend.

Wij hebben de overtuiging gekregen, dat deze waarnemingen een belangrijke arbeid mogen genoemd worden, en adviseeren de Akademie, deze verhandeling van Dr. HAGA voor hare werken aan te nemen.

Toch willen wij een enkele opmerking niet terughouden.

De formule, welke Dr. HAGA heeft geverifieerd, geldt alleen als de toestandsverandering isentropisch en omkeerbaar is, d. w. z. als, bij verlaging van temperatuur beneden de omgeving, door den draad geen warmte van buiten wordt opgenomen, en als de verandering van spanning zoodanig geschiedt, dat de draad elk oogenblik kan geacht worden in een toestand van evenwicht te verkeeren. De eerste voorwaarde is des te beter vervuld, naarmate de verandering der spanning korter duurt — de tweede daarentegen, naarmate die verandering langzamer geschiedt. Bij de proeven van den Schrijver duurde deze verandering der spanning ongeveer 2 sekunden. Ofschoon wij ons overtuigd houden dat, bij de omstandigheden der proeven, beide voorwaarden in voldoende mate vervuld waren, zou toch een opzettelijke bespreking van dit punt en een onderzoek, binnen welke grenzen de waargenomen temperatuursveranderingen onafhankelijk zijn van den tijdduur der verschuiving van de spannende gewichten, niet ongewenscht zijn geweest.

Wij zouden gaarne zien, dat, in geval de Akademie aan de conclusie van dit rapport hare goedkeuring schenkt, den Heer HAGA afschrift van dit rapport toegezonden worde. Misschien geeft hem dit nog aanleiding, enkele woorden omtrent dit onderwerp aan zijne verhandeling toe te voegen.

Amsterdam, November 1881.

J. D. VAN DER WAALS.
D. J. KORTEWEG.

BEPALING

VAN DE

TEMPERATUURSVERANDERINGEN BIJ SPANNEN EN ONTSPANNEN VAN METAALDRADEN,

EN VAN HET

MECHANISCH AEQUIVALENT DER WARMTE.

DOOR

H. HAGA.

Uit het principe van CARNOT leidde in 1851 THOMSON de grootte der temperatuursveranderingen af, die op moeten treden wanneer de drukking op een lichaam plotseling gewijzigd wordt of wanneer — in een bizonder geval — een vast cilindervormig lichaam in de richting der as eene drukking of uitrekking ondervindt.

Is in dit geval

P de verandering van drukking op een vast lichaam, waarvan
α de uitzettingscoëfficiënt,
c de soortelijke warmte,
w het gewicht der lengte-eenheid is,
zoo is bij eene temperatuur τ de temperatuursverandering

$$\vartheta = -\frac{(273 + \tau)\,\alpha\,P}{A\,w\,c}$$

waarin A het mechanisch aequivalent der warmte voorstelt.

Reeds voordat JOULE de formule van THOMSON voor water en walvischtraan bevestigd vond, deed hij proeven met vaste lichamen: metalen, houtsoorten, caoutchouc *).

---

*) *Proceedings R. Soc.* vol. 8, pg. 355, 1857. *Phil. Trans.* 1859, deel 149.

De metalen werden als cilinders gebruikt van 3 d.M. lang en 6 m.M. diameter; het boveneinde was stevig bevestigd en het benedeneinde verbonden aan een hefboom, op welks uiteinde gewichten geplaatst konden worden. Om de temperatuursveranderingen te meten, werden op tegenovergelegen zijden der staaf een dun ijzer- en koperdraadje gebonden, of in een klein gaatje, door het midden der staaf geboord, de beide draadjes gezamenlijk doorgestoken. De andere uiteinden stonden met een gevoeligen galvanometer in verbinding. Om den uitslag in graden CELSIUS te meten, ging JOULE aldus te werk *): »Immediately after each experiment on the effect of tension, the thermometric value of the deflection was ascertained by immersing the bar to within one third of an inch of the junction in water of different temperatures. The deflections thus produced were about two thirds occasioned by the same changes of temperature when the junction was completely immersed. The diminishing effect in the former case is owing for the most part to the conduction of heat from the air by the thermo-electric wires. The experiments on tension were liable to be affected in the same way, but they were not subject to the loss arising from the conduction of heat from the surface of the bath to the junction. The error intervening from this latter circumstance could not be great and was moreover in all probability almost exactly neutralised by a small error in the tension experiments, arising from the escape of $\frac{1}{14}$ of the thermal effect from the quarter inch bars during the 40 sec., occupied by the swing of the needle."

M. i. zijn deze bepalingen niet vrij voor bedenkingen †); en te verklaren is het dat, al werd de formule van THOMSON in het algemeen bevestigd, eenig verschil bleef bestaan tusschen de waargenomen en berekende temperatuursveranderingen. Bij de uitrekkings-proeven waren de waargenomen veranderingen allen *grooter* dan die, welke berekend waren met

---

*) *Phil. Trans.* 1859, pg. 98.

†) Vergelijk: VERDET, *Théorie mécanique de la chaleur*, pg. 220—224.

$A = 425$; het mechanisch aequivalent zou dus uit deze proeven *kleiner* gevonden zijn dan 425.

Bij de proeven waarbij de metalen werden samengedrukt — soms door eene hydraulische pers — vielen de berekende waarden soms te groot, soms te klein uit, maar vrij aanzienlijke verschillen waren nog voorhanden *).

Verdet ziet den grond der afwijkingen in de onnauwkeurige waarde van den uitzettingscoëfficiënt, die afhankelijk kan zijn van de spanning.

In 1865 heeft Edlund over hetzelfde onderwerp proeven genomen †); verschillende metaaldraden werden gespannen en ontspannen; een thermoëlement, uit 2 metalen bestaande, diende voor de bepaling der temperatuursveranderingen, waartoe de draden tusschen de beide metalen geklemd werden. Edlund vond, bij 6 verschillende metalen, dat de relatieve waarden der temperatuursveranderingen zich wel door de formule van Thomson lieten voorstellen, maar dat dit met de absolute waarden niet het geval was. Uit de waargenomen temperatuursverandering bij staaldraad werd gevonden

$$A = 682.7 .$$

Deze uitkomst wil Edlund door inwendigen arbeid verklaren.

Rühlmann komt hiertegen op §); trouwens, inwendige arbeid kan de goede verklaring niet zijn, daar Thomson zijne formule uit een kringproces afgeleid heeft, waar men onafhankelijk is van inwendigen arbeid. Verder gaat Rühlmann na den invloed van eene onjuiste waarde van den uitzettingscoëfficiënt; nu hebben echter proeven van Dahlander **) bewezen dat bij metalen α toeneemt bij vermeerdering der spanning; eene grootere waarde van α zou A nog grooter maken. Eindelijk geeft Rühlmann de redenen op waarom het

*) Vergelijk o. a. Rühlmann, *Handbuch der mech. Wärmetheorie* I. pg. 521.

†) Pogg. *Ann.* Bd. 126, pg. 539.

§) l. c. pg. 529.

**) Pogg. *Ann.* Bd. 145, pg. 147.

niet waarschijnlijk is dat de soortelijke warmte van metalen in gespannen eene andere is als in ongespannen toestand, en is van meening dat alleen nieuwe proeven de vraag kunnen beslissen of de metalen zich aan de mechanische warmtetheorie onttrekken. Te dien einde heb ik, evenals EDLUND, metaaldraden gekozen, de temperatuursveranderingen bij spannen en ontspannen gemeten, en tevens van dezelfde draden den uitzettingscoëfficiënt in gespannen toestand en de soortelijke warmte bepaald.

I. TEMPERATUURSVERANDERINGEN BIJ SPANNEN EN ONTSPANNEN.

a. Methode.

De toestel, waardoor de draden gespannen konden worden, is in Fig. 1 afgebeeld: het houten blok en het koperen stuk werden in de tafel vastgeschroefd; in het koperen stuk bevonden zich stalen schroeven, wier kegelvormige uiteinden de horizontale as vormden, waarom de hefboom draaibaar was; de korte (10,5 c.M.) vertikaal geplaatste arm was een klem, waarin een ebonieten cilinder, welks as doorboord was, bevestigd werd; door deze opening en door eene gleuf in het houten blok ging de draad, die door twee op hem gesoldeerde koperen blokjes voldoende bevestigd kon worden.

De horizontale plaatsing van den draad was gekozen om eene gelijkmatige temperatuur te kunnen verkrijgen, hetgeen door een dak van watten, dat aan alle zijden op de tafel rustte, volkomen bereikt werd.

Door nu gewichten langs den langen (60 c.M.) hefboomsarm te verschuiven, werd de spanning veranderd; de grootte der verschuiving, kon geregeld worden door op den arm een koperen klem vast te schroeven. De gewichten werden dan van deze klem tot het uiteinde, of omgekeerd, verschoven, zoodat de draad tevens strak bleef.

De temperatuursveranderingen, die bij het spannen en ontspannen plaats grepen, moesten gemeten worden. Daartoe

werd een zeer dun draadje van een metaal, dat een groot thermo-electrisch verschil met den hoofddraad had, 2-maal om dezen gewonden; op deze contactplaats ontstond dus temperatuursverandering, die een thermostroom zal opwekken, indien men een der uiteinden van den hoofddraad met het dunne draadje verbindt, en welks sterkte bepaald kan worden door een galvanometer in den keten te voegen (Fig. 2). Om uit de afwijking (p) van den galvanometer de temperatuursverandering (ϑ) te vinden, moeten 2 grootheden bepaald worden:

1⁰. r de weerstand van den geheelen keten; dan is $p \times r$ de afwijking, in geval de weerstand 1 Siemens bedragen had.

2⁰. E de afwijking die, in geval de weerstand 1 S. ware, een temperatuursverschil van 1^0 C. in de contactplaats zou veroorzaken; dan is:

$$\vartheta = \frac{p \times r}{E}.$$

De galvanometer was een van Thomson, met kleinen weerstand; door het plaatsen van magneten werd de astasie verhoogd, zoodat de slingertijd (T) ongeveer 6 sec. bedroeg; daardoor was het mogelijk voor de bepaling van r de terugwerpingsmethode te gebruiken. Een kleine magneet-inductor werd in de geleiding gevoegd, alsmede een weerstandsbank; bij de terugwerpingsmethode kunnen de groote en kleine boog a en b met groote nauwkeurigheid bepaald worden; het logarithmisch decrement λ $\left(e^{\lambda} = \frac{a}{b}\right)$ en daarmede

$$\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \, e^{-\frac{\lambda}{\pi} bg\, tg \frac{\lambda}{\pi}}$$

kunnen berekend worden; nu is deze uitdrukking evenredig met de intensiteit van de inductiestroomen, door de beweging

van den magneet opgewekt *); bepaalt men dus a en b, als de weerstand $= r$ is, en daarna, door bijvoeging van 1 S., bij een weerstand $= r + 1$, dan is, door in beide gevallen bovenstaande uitdrukking te berekenen, de verhouding der weerstanden, en dus r, in SIEMENS-eenheden bekend. Wilde men echter a en b met eene nauwkeurigheid van minder dan $\frac{1}{2}$ pCt. kennen, zoo moest de objectieve aflezing, die gewoonlijk bij THOMSON's galvanometer gebruikt wordt, door eene subjectieve vervangen worden; zonder het holle spiegeltje door een vlak te vervangen, kon men dit bereiken door een kleinen kijker (11 c.M. lang) te gebruiken, bestaande uit objectief ($f = 12,3$ c.M., opening 4,5 c.M.) en oculair ($f = 25,8$ c.M.), tusschen welke een cocondraad gespannen was; het kijkertje werd iets verder van den galvanometer geplaatst dan eene in m.M. verdeelde glazen schaal, wier beeld men scherp kon waarnemen, zoodat de aflezing tot op $^1/_{10}$ m.M. volkomen zeker was.

Ter bepaling van E (zie fig. 3) werd het dunne draadje op den hoofddraad gesoldeerd, en vooreerst deze zoowel als de overige contactplaatsen: hoofddraad en dun draadje, met de geleiddraden naar den galvanometer, door ze in een groot glas water van de kamertemperatuur te plaatsen, op dezelfde temperatuur (τ) gehouden; de weerstand (R) van den keten werd bepaald; daarna werd de contactplaats: hoofddraad — dun draadje, door smeltend ijs omgeven; ten einde de afwijkingen binnen de grenzen der schaal te houden, werd een bepaald aantal (S) S-eenheden ingevoegd.

Is de afwijking in dit geval u, zoo is

$$E = \frac{u\ (S + R)}{\tau}$$

Deze bepaling van E levert dus geen bezwaar op; anders is het met de eerst besproken grootheid: de afwijking p. Uit den eersten uitslag kan men n.l. wel met het logarith-

---

*) Zie WEBER: *Maassbestimmungen* ook WIEDEMANN II, 1, pag. 250.

misch decrement den blijvenden uitslag afleiden voor *constante* stroomen, maar de in ons geval optredende thermostroom is dit niet door twee oorzaken:

Vooreerst geschiedt de verschuiving der gewichten niet plotseling, en even lang als deze verschuiving duurt, verandert de evenwichtsstand, en vervolgens zal door geleiding en straling, zoodra er temperatuursverandering plaats grijpt, deze weder verminderen. Hierdoor en door den vrij korten slingertijd, schommelt de naald een paar maal heen en weer, en keert dan langzaam tot den oorspronkelijken stand terug. Men kan nog de drie eerste omkeerpunten x_1, x_2 en x_3 nauwkeurig waarnemen, benevens den evenwichtsstand op bepaalde oogenblikken gedurende het langzaam terugkeeren. Uit deze waarnemingen kan men p bepalen op de volgende wijze, mij door Dr. H. KAMERLINGH ONNES aan de hand gedaan:

Het verschuiven der gewichten liep steeds in minder dan 2 sec. af; de schommeltijd van den magneet was ongeveer 6 sec.; heeft dus de magneet den eersten uitslag bereikt, zoo zal daarna zijne beweging volkomen voorgesteld worden door de differentiaalvergelijking, door EDLUND opgesteld *):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -mx + q\frac{v}{wc} - 2n\frac{dx}{dt},$$

waarin m de richtkracht, $2n$ de kracht van demping bij snelheid $= 1$, q de kracht, die een thermostroom als $\frac{v}{wc} = 1$ is op den magneet uitoefent, voorstellen, allen gedeeld door het traagheidsmoment. Hierbij is v de hoeveelheid opgewekte warmte in den draad, welks gewicht w en soortelijke warmte c is, zoodat $\frac{v}{wc}$ de temperatuursverandering voorstelt. De verandering van v, door geleiding en uitstraling, kan met de temperatuursverandering zelve evenredig gesteld worden, dus:

---

*) l. c. pag. 546.

$$d\,v = -\,a\,\frac{v}{w\,c}\,d\,t$$

waardoor :

$$v = v_0\,e^{-\frac{a\,t}{w\,c}}.$$

Deze waarde in de differentiaal-vergelijking stellende en integreerende, krijgt men:

$$x = \frac{C}{h^2 - 2\,hn + m}\left(e^{-ht} + \frac{h-n}{l}\sin l\,t\,e^{-nt} - \cos l\,t\,e^{-nt}\right)$$

waarin $C = \frac{q\,v_0}{w\,c}$ $l = \sqrt{m - n^2}$ en $h = \frac{a}{w\,c}$.

Hieruit vindt men voor de omkeertijden:

$$\sin l\,T\,e^{-n\,T} = \frac{h\,l}{m - h\,n}\left(e^{-h\,T} - \cos l\,T\,e^{-n\,T}\right)$$

en voor de omkeerpunten:

$$x = \frac{C}{m - h\,n}\left(e^{-h\,T} - \cos l\,T\,e^{-n\,T}\right).$$

Nu is h — de temperatuursafname (+ of —) in 1 sec. als het temperatuursverschil 1^0 C. bedraagt — zeer klein, bij mijne proeven 0.01, zoodat h^2 verwaarloosd mag worden.

Stel nu dat voor $h = 0$ de omkeertijden T_0, $2\,T_0$ enz. gevonden zijn uit de vergelijking $\sin l\,T_0\,e^{-n\,T_0} = 0$.

Voor de eerste omkeering zou dan $\cos lT_0 = -1$
» » tweede » » » $= +1$
enz.

Komt nu (daar h niet $= 0$) bij T_0 $d\,T_1$
$2\,T_0$ $d\,T_2$
enz.

en voldoen T_1, T_2 enz. aan de vergelijking dan moet ook:

$$\frac{d \sin l T_1 e^{-n T_1}}{d T_1} d T_1 = \frac{h l}{m - h n} (1 - \cos l T_1 e^{-n T_1})$$

evenzoo voor T_2 enz. of:

$$d T_1 = - \frac{h}{m - h n} (1 + e^{-n T_1}) \; e^{n T_1}$$

$$d T_2 = \frac{h}{m - h n} \; (1 - e^{-n T_2}) \; e^{n T_2}$$

$$d T_3 = - \frac{h}{m - h n} (1 + e^{-n T_3}) \; e^{n T_3}$$

Met deze waarde van T_1 gaat

$$x = \frac{C}{m - hn} \; (e^{-h T_0} - \cos l \, T_0 \, e^{-n T_0})$$

over in

$$x + \frac{d x}{d T_1} \, d T_1;$$

evenzoo met T_2 en T_3, waardoor men na herleiding voor de omkeerpunten verkrijgt:

$$x_1 = \frac{C}{m} \left\{ (1 + e^{-n T_1}) \left(1 + \frac{2 n h}{m} \right) - (1 - e^{-h T_1}) \right\}$$

$$x_2 = \frac{C}{m} \left\{ (1 - e^{-n T_2}) \left(1 + \frac{2 n h}{m} \right) - (1 - e^{-h T_2}) \right\}$$

$$x_3 = \frac{C}{m} \left\{ (1 + e^{-n T_3}) \left(1 + \frac{2 n h}{m} \right) - (1 - e^{-h T_3}) \right\}$$

De omkeerpunten voor $h = 0$ X_1, X_2 en X_3 noemende:

$$X_2 - X_1 = \left\{ (x_2 - x_1) + (e^{-h T_1} - e^{-h T_2}) \frac{C}{m} \right\} \left(1 - \frac{2 n h}{m} \right)$$

$$X_3 - X_1 = \left\{(x_3 - x_1) + (e^{-hT_1} - e^{-hT_3})\frac{C}{m}\right\}\left(1 - \frac{2nh}{m}\right)$$

Zijn dus h, C, m, n, en T bekend, zoo kan men berekenen hoeveel bij $x_2 - x_1$ en $x_3 - x_1$ gevoegd moet worden om $X_2 - X_1$ en $X_3 - X_1$ te verkrijgen. Uit deze kan men berekenen hoe ver de evenwichtsstand (X) van x_1 verwijderd is op het oogenblik van den eersten uitslag. Deze evenwichtsstand moet dan nog twee verbeteringen ondergaan:

1° Voor de afkoeling (+ of —) gedurende T_1.

2° Wegens den tijd t' dat het spannen en ontspannen duurt.

Is de evenwichtsstand op elk oogenblik x_e dan is bij gelijkmatige snelheid van uitrekking (+ of —) en bij afkoeling (+ of —) volgens geometrische wet:

$$\frac{d\,x_e}{d\,t} = s - h\,x_e$$

waarin $s = \frac{p}{t'}$, daar p de afwijking voorstelde; integreerende:

$$x_e = \frac{p}{h\,t'} + \text{const}\ e^{-ht}$$

voor $t = 0$ is $x_e = 0$ dus const $= -\frac{p}{h\,t'}$ zoodat

$$x_e \text{ na } t' \text{ sec} = \frac{p}{h\,t'}\,(1 - e^{-ht'})$$

en

$$\text{na } t \ sec = \frac{p}{h\,t}\,(1 - e^{-ht})$$

of

$$= \frac{p}{h\,t'}\,(1 - e^{-ht'})\,e^{-h(t-t')}$$

dus bij het eerste omkeeren van den magneet

$$X = \frac{p}{h\,t'}(1 - e^{-h\,t'})\,e^{-h\,(T_1 - t')}$$

of

$$X = p\left(1 - \frac{h\,t'}{2}\right)(1 + h\,t')\,e^{-h\,T_1}$$

of ook:

$$X = p\left(1 + \frac{h\,t'}{2}\right)e^{-h\,T_1}$$

dus:

$$p = X\left(1 - \frac{h\,t'}{2}\right)e^{h\,T_1}$$

Als eerste benadering kan $T_1 = T_0 + \frac{t'}{2}$ gesteld worden zoodat ten slotte:

$$p = X\,e^{h\,T}$$

Evenzoo zijn in de uitdrukkingen voor $X_2 - X_1$ en $X_3 - X_1$, in plaats van T_1, T_2 en T_3 respective T, $2\,T$, $3\,T$, — de gewone slingertijd — gebruikt.

Blijven ter bepaling over: h, C en T, daar m en n uit het logarithmisch decrement λ en T te berekenen zijn:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{m - n^2}} \qquad \lambda = n\,T.$$

Om h te bepalen, werden gedurende het langzaam terugkeeren tot den oorspronkelijken stand op bepaalde oogenblikken aflezingen gedaan; heeft men op de tijden t_1 en t_2 de afwijkingen x' en x'' waargenomen, zoo is

$$x' = C\,e^{-h\,(t_1 - t)} \qquad x'' = C\,e^{-h\,(t_2 - t)},$$

waarin t het oogenblik der eerste omkeering is. Hieruit vindt men:

$$h = \frac{\log x' - \log x''}{(t_2 - t_1)\log e}$$

C of $\frac{C}{m}$ vindt men uit de uitdrukkingen voor x_2 en x_1; door aftrekking verkrijgt men:

$$\frac{C}{m} = \frac{x_1 - x_2}{\left(1 + \frac{2\,n\,h}{m}\right)(e^{-n\,T_1} + e^{-n\,T_2}) + (e^{-h\,T_1} - e^{-h\,T_2})}.$$

T eindelijk werd op bekende wijze gevonden: de terugwerpingsmethode kon hiervoor dienen, door op een bepaald oogenblik den inductiestoot te geven, eenige malen terug te werpen en het oogenblik te bepalen waarop de magneet door den evenwichtsstand gaat. Uit het aantal malen, dat teruggeworpen is, vindt men gemakkelijk T.

b. Proeven.

1. Staaldraad.

De gebezigde staaldraad had een diameter van 1.6 m.M.; als dun draadje werd eerst nieuw-zilverdraad met een diameter van 0.105 m.M. gebruikt en hiermede op 2 dagen proeven genomen; vooral op den tweeden dag veranderde de weerstand nog al bij spannen en ontspannen ten gevolge der stugheid van het nieuwzilver; daarom werd een platinadraadje (diameter 0.08 m.M.) gekozen, waarmede, niettegenstaande het kleinere thermoëlectrisch verschil, toch beter onderling overeenkomende resultaten verkregen werden.

Als voorbeeld diene de volgende proef, de eerste van 26 Sept. 1880:

1°. Rustpunt galvanometer: 103.8

Door verschuiven der gewichten werd de draad gespannen; er ontstond afkoeling en als omkeerpunten werden waargenomen:

x_1	171.0	waaruit:	eerste uitslag:	67.2
x_2	138.3		$x_2 - x_1$	32.7
x_3	147.7		$x_3 - x_1$	23.3

2°. Gedurende het langzaam terugkeeren waren:

125.0 . . . 120.0 . . . 116.0 de evenwichtsstanden resp.
70^s. . . . $95^s.5$ . . . 121^s. na het bereiken van den eersten uitslag.

3°. Met de terugwerpingsmethode werd gevonden:

$$a = 169.8$$
$$b = 71.1$$

en na invoegen van 1 S.

$$a = 88.6$$
$$b = 40.3$$

4°. de slingertijd was: $6^s.44$.

Hieruit werden berekend:

Uit 2° en de gelijksoortige op denzelfden dag

$$h = 0.0114$$

Uit 3° $\quad r = 1.067$ S.

Met de waarde van λ:

$$log\ m = 9.40663$$
$$log\ n = 9.12552$$

en nu:

$$e^{-n T_1} = 0.4227 \qquad e^{-h T_1} = 0.9291$$
$$e^{-n T_2} = 0.1787 \qquad e^{-h T_2} = 0.8633$$
$$\frac{2 h n}{m} = 0.01 \qquad e^{-h T_3} = 0.8021$$

waaruit:

$$log \frac{C}{m} = 1.6856$$

$$X_2 - X_1 = 29.2 \qquad X_3 - X_1 = 17.0,$$

gevende als afstanden van X tot x_1 op het oogenblik van den eersten uitslag resp. *)

20.5 $\qquad$ 20.6

*) Hierbij werd de reeds bekende waarde van λ gebruikt.

zoodat:

$$X = 67.2 - 20.55 = 46.65.$$

Door deze waarde met $e^{hT} = 1.076$ te vermenigvuldigen:

$$p = 50.20$$

gereduceerd tot weerstand = 1 S.

$$p \times r = 53.55.$$

Door proeven, den volgenden dag, werd E, de uitslag dien een temperatuursverschil der contactplaats van 1° C. bij weerstand 1 S. geeft = 528 gevonden dus:

$$\vartheta = \frac{53.55}{528} = 0^0.1042$$

de waargenomen temperatuursverlaging.

Na deze eerste proef werden de gewichten teruggeschoven, waardoor de draad dus ontspannen werd en zulks werd eenige malen herhaald. Van de proeven en de uit deze berekende waarden zijn de voornaamste data in de onderstaande tabellen te vinden:

TABEL I.

SPANNEND GEW. 21.715 KILO. **26 Sept. 1880.** TEMPERATUUR 17°.1.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	$a.$	$b.$	1 Siemens ingevoegd.	
							$a.$	$b.$
1	Spannen	67.2	32.7	23.3	169.2	71.0	88.6	40.3
2	Ontspannen	68.1	32.7	23.8	167.8	70.6		
3	Spannen	66.8	32.4	22.9	166.7	70.3	87.6	40.2
4	Ontspannen	67.3	32.7	24.0	164.4	69.5	86.6	39.7
5	Spannen	65.0	31.6	22.2	165.0	69.9		
6	Ontspannen	66.5	32.3	23.8	163.15	69.65		
7	Spann n	64.4	31.8	20.4	163.15	69.65		
8	Ontspannen	66.0	32.5	23.9	162.1	69.2		

waaruit met behulp der reeds opgegeven waarden berekend werd:

TABEL 2.

Nommer.	$log \frac{C}{m}$.	X_2-X_1 en afstand van X tot x_1.		X_3-X_1 en afstand van X tot x_1.		$p = Xe^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.68563	29.2	20.5	17.0	20.6	50.2	1.096	0.1042
2	1.68563	29.2	20.5	17.5	21.0	50.9	1.089	0.1050
3	1.68163	28.9	20.3	16.6	20.3	50.0	1.104	0.1046
4	1.68563	29.2	20.5	17.7	21.1	50.0	1.110	0.1050
5	1.67077	28.2	19.8	16.1	19.7	48.8	1.102	0.1018
6	1.68028	28.8	20.2	17.5	20.9	49.4	1.114	0.1043
7	1.67851	28.4	20.0	14.3	18.5	48.6	1.114	0.1026
8	1.68296	29.0	20.4	17.6	21.0	48.7	1.117	0.1030
							Gem.	0.1038

Het nieuwzilverdraadje werd iets verschoven; het spannend gewicht bleef hetzelfde.

TABEL 3.

27 Sept. 1880. TEMPERATUUR 17°.0.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	x_2-x_1.	x_3-x_1.	a.	b.	1 Siemens ingevoegd.	
							a.	b.
1	Spannen	65.7	30.7	21.0	159.4	67.7	85.3	39 0
2	Ontspannen	64 0	30.2	21.1	152.8	65.4	83.3	38 3
3	Spannen	56.7	26.4	17.4	145.3	62.8		
4	Ontspannen	64.6	30.2	21.7	156.1	66.7		
5	Spannen	57 3	26.4	17.7	150.0	64.4		
6	Ontspannen	65.8	30.7	21.8	157.8	67 4		

$$h = 0.0093 \qquad T = 6^s.44$$

waaruit:

$$e^{-nT_1} = 0.4281 \qquad e^{-hT_1} = 0.9418$$
$$e^{-nT_2} = 0.1833 \qquad e^{-hT_2} = 0.8870$$
$$\frac{2hn}{m} = 0.0096 \qquad e^{-hT_3} = 0.8353$$
$$\log n = 9.11904 \qquad \log m = 9.40575$$

Hiermede:

TABEL 4.

Nommer.	$\log \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$X_3 - X_1$ en afstand van X tot x.		$p = Xe^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.65971	27.9	19.55	15.95	19.55	49.0	1.15	0.1065
2	1.65258	27.5	19.25	16.15	19.55	47.35	1.20	0.1072
3	1.59417	24.0	16.8	13.05	16.35	42.6	1.26	0.1016
4	1.65258	27.5	19.25	16.75	19.95	47.8	1.73	0.1061
5	1.59417	24.0	16.8	13.35	16.55	43.1	1.22	0.1012
6	1.65971	27.9	19.55	16.75	20.1	48.85	1.16	0.1069
							Gem.	0.1049

Daarna werd op de bovenvermelde wijze E bepaald; de weerstand $R = 4.08$ S.

TABEL 5.

Bijgevoegde weerstand S.	Temperatuur van het water τ.	Dubbele uitslag $2u$.	Dubbele uitslag voor 1 S. per 1° C.
150	17.6	121.45	1063.3
170	17.5	107.2	1066.4
270	17.4	66.9	1054
130	17.3	135.15	1047
110	17.2	158.6	1052

Gem. 1056 dus $E = 528$.

In plaats van het nieuwzilverdraadje werd nu het dunne platinadraadje genomen.

TABEL 6.

30 Sept. 1880. TEMPERATUUR 16°.7

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	$x_2 - x_1$.	$x_3 - x_1$.	a.	b.	1 Siemens ingevoegd.	
							a.	b.
1	Spannen	48.2	22.4	16.4	166.5	68.3	76.1	35.3
2	Ontspannen	48.4	22.4	16.7	166.4	68.7		
3	Spannen	46.5	21.8	16.0	165.5	68.4		
4	Ontspannen	48.4	22.8	17.0	166.1	68.6		
5	Spannen	46.7	21.8	16.0	165.1	68.1		
6	Ontspannen	48.2	22.6	17.0	166.0	68.3	76.3	35.5

$$h = 0.0117 \qquad T = 6^s.55$$
$$\log n = 9.13101 \qquad \log m = 9.39503$$
$$e^{-nT_1} = 0.4125 \qquad e^{-hT_1} = 0.9202$$
$$e^{-nT_2} = 0.1701 \qquad e^{-hT_2} = 0.8467$$
$$\frac{2\,h\,n}{m} = 0.014 \qquad e^{-hT_3} = 0.7791$$

TABEL 7.

Nommer.	$\log \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$X_3 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$p = X e^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.52839	19.65	13.9	11.5	13.85	37.3	0.843	0.1066
2	1.52839	19.65	13.9	11.8	14.1	37.4	0.843	0.1069
3	1.51660	19.15	13.55	11.2	13.5	35.85	0.852	0.1036
4	1.53607	20.0	14.15	12.0	14.35	37 1	0.843	0.1060
5	1.51660	19.15	13.55	11.2	13.5	36.05	0.852	0.1041
6	1.53225	19.85	14.05	12.05	14.35	36.95	0.843	0.1056
							Gem.	0.1055

Voor de bepaling van E vond men $R = 3.17$ S.

TABEL 8.

1 October 1880.

Bijgevoegde weerstand S.	Temperatuur van het water τ.	Dubbele uitslag $2u$.	Dubbele uitslag voor 1 S. per 1° C.
150	16.15	62.9	596.6
125	16.1	74.0	589.1
100	16.05	91.6	588.8
80	16.0	112.7	585.8
		$2E$	590.0
			$E = 295.0$

Samenstellende:

datum	ϑ
26 Sept.	0.1038
27 Sept.	0.1049
30 Sept.	0.1055

Gemiddeld $\vartheta = 0.1046$.

2. Nieuwzilverdraad.

De gebezigde nieuwzilverdraad had een diameter van 1.5 m.M.; als dun draadje werd weder platinadraad (0.08 m.M. diameter) gekozen. De proeven werden op dezelfde wijze als met staaldraad genomen; alleen werd de waarde van E direkt vóór of na de proeven bepaald; daartoe werd van andere stukken van denzelfden nieuwzilver- en platina draad een keten gevormd, en na afloop der proeven vergeleken met den keten uit de gebruikte draden zelven gevormd. Zoo werd gevonden:

	E.
14 Sept. op 3 verschillende tijden: gemiddelde	201.0
15 Sept. direkt na de proeven	204.55
terwijl 17 Sept. met keten van 14 en 15 Sept.	200.15
met keten uit gebruikte draden	202.3

waardoor dus:

$$14 \text{ Sept. } E = 201.0 \; \frac{202.3}{200.15} = 203.2$$

$$15 \text{ Sept. } E = 204.55 \; \frac{202.3}{200.15} = 206.8$$

TABEL 9.

SPANNEND GEW. 17.134 KILO. **14 Sept. 1881.** TEMPERATUUR 16.4.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	x_2-x_1.	x_3-x_1.	*a.*	*b.*	1 Siemens ingevoegd.	
							a.	*b.*
1	Spannen	46.5	19.3	14.1	192.3	78.45	87.4	39.9
2	Ontspannen	44.9	19.7	13.8	189.8	78.0		
3	Spannen	45.2	19.1	13.4	190.95	78.25		
4	Ontspannen	44.8	19.8	13.5	191.15	78.1	87.0	39.9
5	Spannen	45.7	19.1	13.7	191.2	78.2		
6	Ontspannen	44.6	19.7	13.5	190.95	78.0		
7	Spannen	46.0	19.5	13.7	193.2	79.1	87.9	40.6
8	Ontspannen	44.8	19.8	13.8	192.65	78.9	88.4	40.45
9	Spannen	45.5	18.6	13.2	194.1	79.3		
10	Ontspannen	45.2	19.9	13.7	192.9	78.8		

$h = 0.0088 \quad T = 6^s.35$

$log\ n = 9.14834 \quad log\ m = 9.42254$

$e^{-nT_1} = 0.4092 \quad e^{-hT_1} = 0.9458$

$e^{-nT_2} = 0.1675 \quad e^{-hT_2} = 0.8945$ voor N⁰. 1 tot N⁰. 6

$\frac{2hn}{m} = 0.009 \quad e^{-hT_3} = 0.8460$

waaruit:

TABEL 10.

Nommer.	$log \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$X_3 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$p = Xe^{hT}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.4841	17.6	12.5	10.95	12.9	35.75	0.826	0.1453
2	1.4930	17.95	12.75	10.6	12 75	34.0	0.846	0.1416
3	1.4795	17.4	12.35	10.3	12.35	34.75	0.836	0.1429
4	1.4952	18.05	12.8	10.25	12.5	34.0	0.836	0.1398
5	1.4795	17.4	12.35	10.6	12.6	35.15	0.836	0.1446
6	1.4930	17.95	12.75	10.3	12.5	33.85	0.836	0.1392
7	1.4898	17.8	12.65	10.6	12.7	35.1	0.838	0.1447
8	1.4965	18.1	12.85	10.6	12.8	33.65	0.838	0.1387
9	1.4693	17.0	12.05	10.25	12.25	35.1	0.828	0.1431
10	1.4987	18.2	12.9	10.55	12.75	34.1	0.838	0.1406
							Gem.	0.1421

Het Platinadraadje werd verschoven.

TABEL 11.

15 Sept. 1881. TEMPERATUUR 16°.0.

Nommer.	Aard der proef.	Eerste uitslag.	$x_2 - x_1$.	$x_3 - x_1$.	a.	b.	1 Siemens ingevoegd.	
							a.	b.
1	Spannen	46.7	19.1	13.9	196.5	80.3	88.75	40.7
2	Ontspannen	45.55	19.95	13.85	195.55	80.3		
3	Spannen	45.45	18.45	13.45	195.0	80.1		
4	Ontspannen	45.15	19.65	13.25	195.1	80.0	88.6	40.85

$$h = 0.00845 \qquad T = 6^s.35$$

$$\left.\begin{array}{r} \log n \\ \log m \\ e^{-nT_1} \\ e^{-nT_2} \end{array}\right\} = 14 \text{ Sept.} \quad \left.\begin{array}{l} e^{-hT_1} = 0.9478 \\ e^{-hT_2} = 0.8983 \\ e^{-hT_3} = 0.8513 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{ook voor} \\ \text{N}^0.\ 7 - \text{N}^0.\ 10 \\ 14 \text{ Sept.} \end{array}$$

$$\frac{2hn}{m} = 0.009$$

hiermede:

TABEL 12.

Nommer.	$\log \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$X_3 - X_1$ en afstand van X tot x_1.		$p = Xe^{h'P}$.	Weerstand r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.4808	17.45	12.4	10.9	12.8	35.95	0.819	0.1423
2	1.4998	18.25	12.95	10.7	12.9	34.35	0.829	0.1377
3	1.4658	16.85	11.95	10.55	12.45	34.45	0.829	0.1382
4	1.4932	17.95	12.75	10.15	12.4	34.3	0.829	0.1375
							Gem.	0.1389

Samenstellende vindt men dus voor de temperatuursverandering uit de proeven van

14 Sept.	0.1421
15 Sept.	0.1389
Gemiddeld $\vartheta =$	0.1405

Met denzelfden nieuwzilverdraad is nog onderzocht of de temperatuursverandering evenredig is met het spannend gewicht. Op 3 verschillende dagen zijn deze proeven genomen; de verandering in gevoeligheid werd in rekening gebracht en verkregen:

15, 16 en 17 Juni 1881.

Spannend gewicht.	ϑ gemiddeld uit 8 proeven.	ϑ per Kilo.
13.05 Kilo	0.1063	0.00814
21.30 〃	0.1725	0.00812

Daar de uitzettingscoëfficiënt voor deze beide spanningen dezelfde bleek (zie later), is de evenredigheid van ϑ met P bewezen.

Tevens kan deze overeenstemming als bewijs dienen dat de draad gerekend kan worden steeds in een toestand van evenwicht te verkeeren, hetgeen reeds waarschijnlijk was, daar de tijd, gedurende welken de toestandsverandering plaats greep, zeer groot is ten opzichte van den tijd, dat eene trilling zich door den draad voortplant. Door de kleine waarde van h kan de afwijking van eene volkomen adiabatische verandering als onmerkbaar beschouwd worden, zoodat de THOMSON'sche formule, voor adiabatische, omkeerbare processen geldig, mag toegepast worden.

Door afzonderlijke proeven is voorts bewezen, dat bij de gebruikte contactplaatsen: staal-nieuwzilver, staal-platina, nieuwzilver-platina, evenredigheid bestaat tusschen de thermoëlectromotorische kracht en de temperatuur binnen de gebruikte grenzen: ijs — water van de temperatuur der omgeving — aetherdamp — stoom. Ook werd geen verschil gevonden tusschen de waarde van E, wanneer de hoofddraad gespannen was of niet, evenmin als, na het losmaken der contactplaatsen, de draden sterk verwarmd en opnieuw gesoldeerd werden, zoodat noch tegen de wijze waarop E bepaald, noch waarop ze in rekening is gebracht, bedenkingen gemaakt kunnen worden.

II. UITZETTINGSCOËFFICIËNTEN DER DRADEN IN GESPANNEN TOESTAND.

In denzelfden toestel als bij de bepaling der temperatuursveranderingen, werden de draden gespannen.

Om den draad op twee verschillende constante temperaturen te kunnen brengen, bevond hij zich in den as van eene koperen buis, die door eene wijdere omgeven was; de tusschenruimte kon óf door stroomend water uit de waterlei-

ding, óf door stoom doorspoeld worden, waardoor de lucht in de binnenste buis en de draad de temperatuur van het water of van den stoom aannamen; de uiteinden der binnenste buis waren gesloten door kurkjes, die over den draad gemakkelijk verschoven konden worden; de buitenste buis was nog omgeven door eene dikke kurklaag, om warmteverlies door uitstraling te voorkomen. Op 5 c.M. van de beide uiteinden waren op de binnenste buis een paar zijbuisjes gesoldeerd, die door een paar plaatjes spiegelglas gesloten waren en waardoor de draad te zien was. Op den draad werden nu, met eene uiterst fijne naald, streepjes getrokken en op deze werden twee microscopen gericht, met micrometerschroef voorzien.

Ten einde uit de gemeten verplaatsing der streepjes tot den uitzettingscoëfficiënt te besluiten, moesten de microscopen zoo opgesteld worden dat hun afstand niet veranderde of deze verandering in rekening te brengen was.

Bij de bepaling van α van staaldraad, werden de microscopen op houten blokken bevestigd, die op eene stevige steenen tafel waren vastgegipst; door watten en hout was de tafel beschut tegen temperatuursverandering. Bij nieuwzilverdraad werden de houten blokken op een koperen buis, die op koperen voeten steunde, gestoken en in een grooten bak met water geplaatst, zoodat alleen de microscopen er boven uitkwamen; de grootste verandering in temperatuur van het water tusschen 2 proeven was $0^0.1$.

Beide methoden bleken zeer voldoende. Als spanning werd de gemiddelde genomen tusschen die bij gespannen en die bij ongespannen toestand.

In December 1880 werd bepaald de

Uitzettingscoëfficiënt van staaldraad.

Spanning = 19 kilo.
Afstand der beide streepjes op den draad: 330.7 m.M.
1287 verdeelingen van den schroefkoptrommel gaven eene verplaatsing van 1 m.M.

Temperatuurs-verschil.	Verlenging in schroefkopdeelen.	Uitzettings-coëfficiënt.
86°.8	428.4	0.00001159
86°.4	425.0	1156
86°.65	425.5	1154

$\alpha = 0.00001156$

In October 1881 werd bepaald:

Uitzettingscoëfficiënt van nieuwzilverdraad

Spanning = 16 kilo
Afstand der beide streepjes op den draad 324 m.M.
Bij het eene microscoop 10 schroefgangen = 0.9293 m.M.
» » andere » » = 0.9689 »
(de trommel was in 100 deelen verdeeld)

$\alpha = 0.00001739$
1725
1731
1741

$\alpha = 0.00001734$

Dezelfde waarde werd gevonden bij spanningen van 12 en 20 kilo. *)

III. Soortelijke warmte.

Ter bepaling der soortelijke warmte kon de mengingsmethode gebruikt worden, daar de draden in zeer kleine stukjes verdeeld werden, waardoor de calorimeter binnen ½ minuut

*) c. f. Joule, *Proceedings, R. Soc.* VIII, pg. 564, Rühlmann, pg. 526.

de maximumtemperatuur aannam, hetgeen correctie-termen onnoodig maakte. *)

De calorimeter van uiterst dun koperblik was op 3 kurken wiggen binnen een wijder bakje geplaatst; de roertoestel was een stuk kopergaas aan 2 dunne koperdraden bevestigd.

Ten einde vrij te zijn van de nadeelen, aan het gebruik van een thermometer bij calorimetrische proeven verbonden (warmtecapaciteit, traagheid van aanwijzing, het bezwaar eene goede plaats te geven in den calorimeter), werd van eene thermonaald gebruik gemaakt, uit een dun nieuwzilver- en platina-draadje gevormd, wier soldeerplaats vlak onder den roerder geplaatst werd en met dezen op en neer ging. De beide andere uiteinden der draadjes waren aan de geleiddraden naar den galvanometer van THOMSON gesoldeerd en deze soldeerplaatsen bevonden zich in een groot glas met water, dat voortdurend rondgeroerd werd. De galvanometer werd zoo gesteld dat de slingertijd ongeveer 2 seconden bedroeg; toch gaf eene temperatuursverandering van 1^0 C. bij de soldeerplaats nieuwzilver—platina, eene afwijking van ongeveer 14 schaaldeelen, zoodat $\frac{1}{140}$ graad af te lezen was. Om dit aantal juist te bepalen werd, direkt na de calorimetrische proef, de soldeerplaats in smeltend ijs geplaatst; de afwijkingen vielen nog binnen de schaal, zoodat men den weerstand niet behoefde te kennen.

Uit afzonderlijke proeven bleek dat de thermoëlectromotorische kracht niet geheel evenredig was met het temperatuursverschil, maar een weinig sterker toenam dan het temperatuursverschil. Dit is in rekening gebracht.

Als verwarmingstoestel der stukjes draad werd dezelfde toestel gebruikt als bij de bepalingen der uitzettingscoëfficiënten; een zeer dun reageerbuisje werd in de binnenste buis gestoken en, nadat de stoom minstens 20 minuten gecirculeerd had, werden de stukjes in den calorimeter geworpen, terwijl de stoom steeds bleef doorstroomen.

---

*) c. f. MÜLLER-PFAUNDLER, II, 2, pg. 297,

Als voorbeeld diene de volgende proef met

staaldraad

28 Maart 1881.

Calorimeter met water	95.979	Gram
Calorimeter	16.101	»
	79.878	Gram
Correctie op luchtledig	85	»
Waterwaarde calorimeter.	2.057	»
Waterwaarde.	82.020	Gram.

12.462 Gram staal van $100^0.2$ in den calorimeter, welks temperatuur $11^0.55$ was, veroorzaakten eene afwijking van 21.3 schaaldeel.

Een temperatuursverschil van 1^0 veroorzaakte eene afwijking van 13.96 schaaldeel:

hierdoor $\frac{21.3}{13.96}$ de temperatuursverhooging en

$$c = 0.1133.$$

Op nog 3 andere dagen werd gevonden:

$c = 0.1139$ [$\frac{1}{2}$ gewicht]
0.1131
0.1120

$c = 0.1130$ staaldraad.

Voor nieuwzilver werd gevonden:

$c = 0.09611$
09624
09625
09621

$c = 0.0962$ nieuwzilverdraad.

IV. Berekening van het mechanisch aequivalent der warmte.

Om na te gaan in hoever de mechanische warmtetheorie rekenschap geeft van de gevonden temperatuursveranderingen, zullen we door middel van de formule van Thomson het mechanisch aequivalent berekenen.

$$\vartheta = -\frac{(273 + \tau).\ \alpha.\ P}{A.\ w.\ c}$$

a. *Uit de proeven met staaldraad.*

$$\vartheta = 0^0.1047\ C.$$
$$\tau = 17^0.0$$
$$\alpha = 0.00001156$$
$$P = 21.715 \text{ Kilo}$$

300 m.M. wogen 4.2159 gram dus:

$$w = 0.014053 \text{ kilo}$$
$$c = 0.1130$$

waaruit

$$\underline{A = 437.8}$$

b. *Uit de proeven met nieuwzilverdraad.*

$$\vartheta = 0^0.1405\ C$$
$$\tau = 16^0.2\ C$$
$$\alpha = 0.00001734$$
$$P = 17.134 \text{ kilo}$$

263.25 m.M. wogen 3.909 gram dus:

$$w = 0.014849 \text{ kilo}$$
$$c = 0.0962$$

waaruit

$$\underline{A = 428.1}$$

Daar Edlund door zijne proeven heeft aangetoond dat de *verhouding* der temperatuursveranderingen, bij verschillende metaaldraden, door de formule van Thomson werd weergegeven, was het voldoende voor slechts één metaal te onderzoeken of de *absolute* waarde zelve volgens die formule kon worden berekend.

Uit bovenstaande proeven, zoowel met staaldraad als met nieuwzilverdraad, geloof ik dat zulks het geval is en dus tot de gevolgtrekking gerechtigd te zijn:

De mechanische warmtetheorie geeft volkomen rekenschap van de temperatuursveranderingen, ontstaande door het spannen en ontspannen van metaaldraden.

Het is mij een aangename plicht hier mijn dank te betuigen aan Prof. Bosscha, directeur der Polytechnische School, zoowel voor de groote bereidwilligheid, waarmee mij de toegang tot het physisch kabinet verleend werd, als voor de belangstelling bij dit onderzoek betoond — en aan Prof. van de Sande Bakhuyzen, directeur der Leidsche Sterrenwacht, voor het ten gebruike afstaan der beide aflezingsmicroscopen ter bepaling der uitzettingscoëfficiënten.

Delft, October 1881.

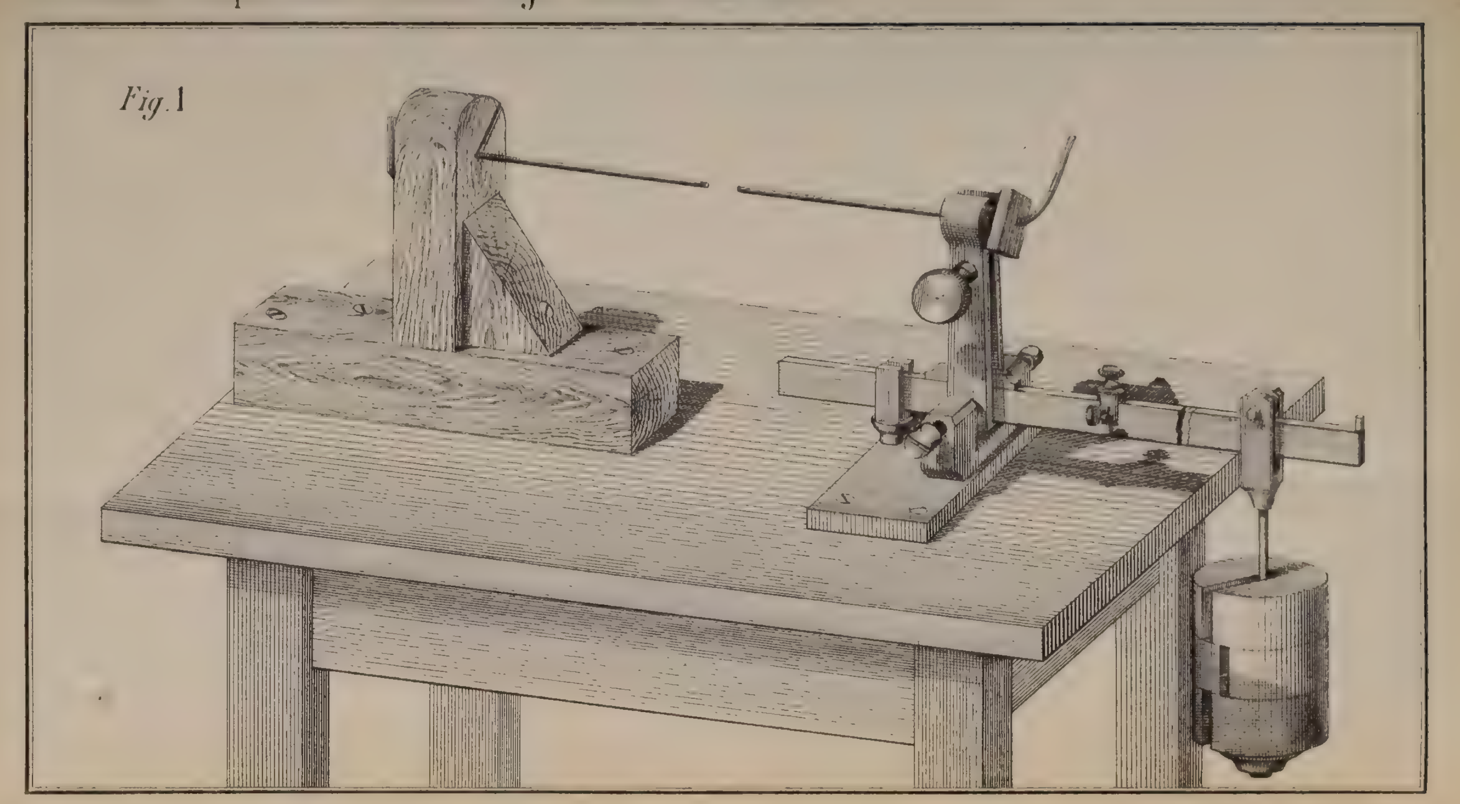


Fig. 1



H. HAGA. Temperatuursveranderingen van metaaldraden.

Fig. 2

Hoofddraad

Galvanometer

Commutator

Weerstands bank

Magneet inductor

Fig. 3.

Weerstandsbank

Galvanometer

Commutator

dun draadje

Hoofddraad

Magneet inductor



OVER LAGRANGE'S INTERPOLATIE-FORMULE.

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

1. De gewoonlijk aldus genoemde formule leert de geheele rationale functie van x, van den $n - 1^{\text{sten}}$ graad hoogstens, die voor de n bijzondere waarden $x = x_1$, $x = x_2$, .. $x = x_n$ met een willekeurige functie $f(x)$ in waarde overeenkomt, onder den volgenden vorm kennen:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p)$$

waarin:

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

en $\varphi'(x)$ als gewoonlijk, de afgeleide functie van $\varphi(x)$ voorstelt.

Is de functie $f(x)$ zelf geheel rationaal, van niet hoogeren dan de $n - 1^{\text{ste}}$ graad dan is *identisch*:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p).$$

In het algemeen echter moet deze formule aangevuld worden door een *rest*, evenals dit bij het theorema van Taylor het geval is.

In het 84ste deel van het Journal für die reine und angewandte Mathematik, heeft Hermite (pag. 70 e. v. v.) den

volledigen analytischen vorm van deze rest als een bepaald integraal gegeven en wel onder twee verschillende gedaanten; als grensgevallen ligt in deze formulen ook de rest van de reeks van TAYLOR opgesloten.

Evenals men onmiddellijk uit het bepaalde integraal, dat de volledige rest van de reeks van TAYLOR voorstelt, den LAGRANGE'schen *) restvorm kan afleiden, kan men ook een analogen restvorm voor de interpolatie-formule van LAGRANGE uit het veelvoudige integraal afleiden, waaronder HERMITE de rest voorstelt. Maar, evenals men veeltijds deze vereenvoudigde rest bij de reeks van TAYLOR afleidt zonder van de hulpmiddelen der integraal-rekening gebruik te maken, kan men hetzelfde ook voor den analogen restvorm van de interpolatie-formule verlangen. Eene zoodanige ontwikkeling wordt in het volgende gegeven.

Ik bemerk nog dat, hoewel de hier verkregen restvorm gemakkelijk uit HERMITE's formule afgeleid kan worden, deze toch niet dezen vereenvoudigden restvorm gegeven heeft. Het is hiertoe noodig een elementaire eigenschap van bepaalde enkelvoudige integralen tot veelvoudige integralen uit te breiden, wat echter geen bezwaar ontmoet.

De te bewijzen formule kan aldus geschreven worden:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p) + \frac{\varphi(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n} f^{(n)}(\xi)\,.\,.\,.\,.\,(1)$$

waarin ξ eene waarde heeft, gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen x, x_1, $x_2 \,.\,.\, x_n$.

Hierbij moet ondersteld worden dat de functie $f(z)$ evenals $f'(z)$ $f''(z)\,.\,.\,f^{n-1}(z)$ eindig en continue zijn voor alle waarden, van z, gelegen tusschen x, x_1, $x_2\,.\,.\,x_n$ en dat voor deze zelfde waarden van z $f^{n-1}(z)$ een *eindig* en *bepaald* differentiaalquotient $f^n(z)$ heeft.

De formule (1) neemt een meer eleganten vorm aan wanneer men er $f^n(\xi)$ uit afzondert; men overtuigt zich gemakkelijk dat ze alsdan deze gedaante aanneemt:

---

*) *Théorie des functions analytiques.* In de 1ste editie van 1797 pag. 49.

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)}+\frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{\varphi'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}=\frac{1}{1.2.3\ldots n}f^n(\xi)\ldots(2)$$

waarin:

$$\varphi(z)=(z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n).$$

Men herkent hierin een uitbreiding van de voor $n=1$ ontstaande elementaire formule $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi)$.

---

2. Het bewijs van de formule (1) berust nu op de volgende hulpstelling:

»Wanneer de functie $G(z)$ voor de $n+1$ verschillende waarden $z=x$, $z=x_1\ldots z=x_n$ de waarde nul aanneemt, dan neemt het n^{de} differentiaal-quotiënt $G^n(z)$ de waarde nul aan voor een waarde $z=\xi$ gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen x, $x_1\ldots x_n$."

Ondersteld wordt hierbij dat $G(z)$, $G'(z)\ldots G^{n-1}(z)$ eindig en continue zijn voor alle waarden van z gelegen tusschen x, $x_1\ldots x_n$, en dat voor dezelfde waarden van z, $G^{n-1}(z)$ een *eindig* en *bepaald* differentiaal quotiënt $G^n(z)$ heeft.

Voor $n=1$ is dit een bekend theorema, waaromtrent het voldoende is te verwijzen naar DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, pag. 70.

Het bewijs van dit theorema, evenals dat van eenige nauw verwante, zooals het in de nog meest gangbare leerboeken voorkomt, bijv. SERRET, *Cours de calcul differential*, bevat een leemte die eerst aangevuld werd door eenige onderzoekingen van WEIERSTRASS, men zie DINI, pag. 43, 51. WEIERSTRASS zelf schijnt van deze onderzoekingen omtrent de grondslagen der functieleer, niets gepubliceerd te hebben.

Het is vooral noodig op te merken dat in dit eenvoudigste geval $n=1$ de grootheid ξ tusschen x en x_1 ligt, en *verschillend* zoowel van x als van x_1 aangenomen mag worden.

Het bewijs van de hulpstelling in het algemeene geval

volgt nu onmiddellijk uit de waarheid in het eenvoudigste geval $n = 1$. Is nam. $n = 2$ dus:

$$G(x) = 0 \qquad G(x_1) = 0 \qquad G(x_2) = 0$$

dan kan men onderstellen:

$$x < x_1 < x_2$$

en men heeft dan:

$$G'(\xi_1) = 0 \qquad x < \xi_1 < x_1$$
$$G'(\xi_2) = 0 \qquad x_1 < \xi_2 < x_2$$

en hieruit dan nog eens het theorema voor $n = 1$ toe te passen:

$$G''(\xi) = 0 \qquad \xi_1 < \xi < \xi_2.$$

Men kan op deze wijze voortgaan, en het blijkt dan tevens dat, in het algemeene geval, ξ ondersteld mag worden niet gelijk te zijn: noch aan het grootste, noch aan het kleinste der getallen $x\ x_1 \ldots x_n$. De voorwaarden van continuiteit en differentieerbaarheid, die men aan de functie $G(z)$ en de afgeleide functies moet stellen, volgen zonder moeite uit die welke voor het geval $n = 1$ gesteld moeten worden.

---

3. Het bewijs van de formule (1) kan nu aldus gevoerd worden.

Ter bekorting moge het interpolatie-polynomium van Lagrange door $F(x)$ aangeduid worden:

$$F(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p). \;\ldots\ldots \quad (3)$$

Onder de waarden $x_1, x_2 \ldots x_n$ komen geen twee gelijke voor, en daar de functiën $F(x)$ en $f(x)$ voor $x = x_1$, $x = x_2 \ldots x = x_2$, dezelfde waarden aannemen, en het ons te doen is om in het algemeen een beknopten vorm van het

verschil $f(x) - F(x)$ te vinden, zoo kunnen wij hierbij zonder nadeel de onderstelling maken dat de waarde x niet samenvalt met een der waarden $x_1\ x_2 \ldots x_n$.

Dit aangenomen, zij:

$$f(x) = F(x) + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) R \ldots (4)$$

De waarde van R is dan hierdoor volkomen bepaald. Terwijl nu verder, voor een oogenblik, $x\ x_1\ x_2 \ldots x_n$ als constanten gedacht worden en z een nieuwe veranderlijke is, beschouwen wij de functie:

$$G(z) = -f(z) + F(z) + (z - x_1)(z - x_2) \ldots (z - x_n) R \ldots (5)$$

waarin dus R de door (4) volkomen bepaalde, van z onafhankelijke waarde heeft.

Blijkbaar is nu, niet alleen:

$$G(x) = 0$$

maar ook:

$$G(x_1) = 0 \qquad G(x_2) = 0 \ldots \qquad G(x_n) = 0$$

waaruit dus volgens de hulpstelling van Art. 2 volgt:

$$G^n(\xi) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

waarin ξ een waarde heeft gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen $x\ x_1 \ldots x_n$. Maar daar $F(z)$ hoogstens van den $n - 1^{\text{sten}}$ graad in z is, zoo valt bij de n-voudige differentiatie van (5) $F(z)$ weg, en is:

$$G^n(z) = -f^n(z) + 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \,.\, R$$

wegens (6) volgt nu:

$$R = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} f^n(\xi)$$

en dit in (4) gesubstitueerd:

$$f(x) = F(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\,..\,(x - x_n)}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n} f^n(\xi)$$

waarmede het bewijs van de formule (1) geleverd is.

---

4. Wanneer men, in de nu ook bewezen formule (2), de steeds ongelijke getallen $x, x_1, x_2 \,..\, x_n$ allen tot eenzelfde limiet X laat convergeeren, dan volgt:

$$Lim. \left\{\frac{f(x)}{\varphi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \,..\, + \frac{f(x_n)}{\varphi'(x_n)}\right\} = \frac{1}{1\,.\,2\,..\,n} f^n(X) \,..\, (7)$$

Behalve de onderstellingen die voor de geldigheid der formulen (1) en (2) gemaakt moeten worden, moet bij deze laatste formule *bovendien* nog $f^n(x)$ voor $x = X$ *continue* zijn, daar men anders niet kan besluiten dat $f^n(\xi)$ bij convergentie van ξ tot X, tot de limiet $f^n(X)$ convergeert.

Deze formule (7) die dus in het geval dat $f^n(x)$ voor $x = X$ continue is, een directe algemeene definitie van het n^{de} differentiaal-quotiënt van een functie $f(x)$ geeft, schijnt nog niet in de hier gegeven algemeenheid bewezen te zijn. Wel komt zij voor in het uitstekende werk van LIPSCHITSCH »*Differential- und Integralrechnung*", pag. 204 Form. 20, maar bij het dáár voorkomende bewijs moet men onderstellen dat $x\, x_1\, x_2 \,..\, x_n$ bij hunne convergentie tot de limiet X, behalve dat zij steeds ongelijk blijven. nog aan andere condities moeten voldoen, die hier overbodig blijken. Zie t. a. p. pag. 203 regel 6 v. o. En verder is daar het bestaan van een eindig en continue $n + 1^{ste}$ differentiaal-quotiënt aangenomen. Ook deze conditie ligt stellig in het geheel niet in den aard der zaak, en nadat WEIERSTRASS *continue* functies heeft leeren kennen die *niet* differentiëerbaar zijn, zou niets gemakkelijk zijn dan functiën op te stellen, voor welke de formule (7) geldig is, maar waarbij van geen $n + 1^{ste}$ differentiaal-quotiënt sprake kan zijn. *)

---

*) Men zie het *Journ. für Mathem.* Bd. 79, pag. 29 en vv., ook Bd. 90 pag. 221.

5. De overeenkomst van de formule (1) met het theorema van TAYLOR valt nog meer in het oog, wanneer men het polynomium $F(x)$ niet voorstelt onder de elegante en symmetrieke gedaante, door LAGRANGE gegeven, maar onder den vorm dien NEWTON in het 3[de] Boek der Principia bij gelegenheid van zijne behandeling van het kometen-probleem geeft.

De formule (1) neemt dan namenlijk deze gedaante aan:

$$f(x) = A_1 + A_2(x - x_1) + A_3(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$
$$+ A_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(\xi) \quad \ldots \quad (8)$$

Hierin is:

$$A_1 = f(x_1) \qquad A_2 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

en algemeen:

$$\left.\begin{array}{l} A_p = \dfrac{f(x_1)}{\varphi'_p(x_1)} + \dfrac{f(x_2)}{\varphi'_p(x_2)} + \ldots + \dfrac{f(x_p)}{\varphi'_p(x_p)} \\ \varphi_p(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_p) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

NEWTON geeft niet explicite deze algemeene uitdrukking voor A_p, maar wel de volgende rekenvoorschriften om achtereenvolgens A_1, $A_2 \ldots$ te berekenen:

$$A_1 = f(x_1) \quad A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_2 - x_1} \quad A_3 = \frac{B_2 - A_2}{x_3 - x_1} \quad A_4 = \frac{B_3 - A_3}{x_4 - x_1}$$

$$B_1 = f(x_2) \quad B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_3 - x_2} \quad B_3 = \frac{C_2 - B_2}{x_4 - x_2} \ldots$$

$$C_1 = f(x_3) \quad C_2 = \frac{D_1 - C_1}{x_4 - x_3} \ldots$$

$$D_1 = f(x_4) \ldots$$

Stelt men deze grootheden zooals zij achtereenvolgens gevonden worden, aldus te zamen:

$$\left.\begin{array}{cccc} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ B_1 & & A_3 & \\ & B_2 & & A_4 \\ C_1 & & B_3 & \\ & C_2 & & \\ D_1 & & & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dan komt deze berekening geheel overeen met die van de gewone interpolatie in het geval dat x_1 x_2 x_3 .. een rekenkunstige reeks vormen, met deze geringe wijziging dat de 1ste, 2de, 3de .. rijen van verschillen hier respectieve door de factoren $1 . (x_2 - x_1)$, $1 . 2 . (x_2 - x_1)^2$, $1 . 2 . 3 . (x_2 - x_1)^3$ .. gedeeld voorkomen.

Volgens de formule (2) is:

$$A_p = \frac{1}{1 . 2 . 3 .. (p-1)} f^{p-1} (\xi_p)$$

waarin ξ_p een waarde heeft gelegen tusschen het grootste en kleinste der getallen x_1 x_2 .. x_p. Laat men dus in de formule (8) x_1 x_2 .. x_n tot eenzelfde limiet convergeeren, dan ontstaat onmiddellijk de formule van Taylor met den restvorm van Lagrange.

---

6. De Newton'sche vorm van het interpolatie-polynomium:

$$F(x) = A_1 + A_2 (x - x_1 + A_3 (x - x_1)(x - x_2) .. + \\ + A_n (x - x_1)(x - x_2) .. (x - x_{n-1})$$

heeft boven dien van Lagrange ook nog dit voordeel, dat hij onmiddellijk doet zien welken vorm $F(x)$ aanneemt wanneer er onder de grootheden:

$$x_1 \; x_2 \; .. \; x_n$$

meerdere tot eenzelfde limiet convergeeren of gelijk gesteld worden.

Convergeeren namenlijk $x_1\, x_2 \,.\,.\, x_p$ tot de limiet X dan is volgens (9) en (7):

$$lim.\, A_p = \frac{1}{1\,.\,.\,2\,(p-1)}\, f^{(p-1)}\,(X). \;.\;.\;.\;.\;.\; (11)$$

en daar alle in het tableau (10) voorkomende grootheden op dezelfde wijze als A_p .. samengesteld zijn, zoo kan men ook onmiddellijk in dit geval het geheele tableau (10) vormen. Men ziet namenlijk gemakkelijk dat men hierbij, om onbepaalde uitdrukkingen $\frac{0}{0}$ te ontgaan, slechts die grootheden $x_1\, x_2 \,.\,.\, x_n$ die ten slotte gelijk gesteld worden, onmiddellijk op elkaar behoeft te laten volgen. Men heeft dan verder de formule (11) en Newton's voorschriften te volgen om het geheele tableau te verkrijgen. Werden dus bijv. $x_1\, x_2 \,.\,.\, x_p$ allen $= X$, dan moet men in dit geval bekend onderstellen:

$$f(X),\; f'(X) \,.\,. \qquad f^{p-1}\,(X).$$

Hierin schijnt dan ook de meest geschikte methode te bestaan, om het polynomium van den laagst mogelijken graad $H(x)$ te vormen, dat aan deze voorwaarden voldoet:

$$\left.\begin{array}{l} H(x_1) = f(x_1),\; H'(x_1) = f'(x_1) \,.\,.\, H^{\alpha_1 - 1}\,(x_1) = f^{\alpha_1 - 1}\,(x_1) \\ H(x_2) = f(x_2),\; H'(x_2) = f'(x_2) \,.\,.\, H^{\alpha_2 - 1}\,(x_2) = f^{\alpha_2 - 1}\,(x_1) \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ H(x_n) = f(x_n),\; H'(x_n) = f'(x_n) \,.\,.\, H^{\alpha_n - 1}\,(x_n) = f^{\alpha_n - 1}\,(x_n) \end{array}\right\} \ldots (12)$$

welk polymonium $H(x)$ hoogstens van den $k-1^{\text{sten}}$ graad is:

$$k = \alpha_1 + \alpha_2 + \,.\,.\, + \alpha_n.$$

Men verkrijgt op de boven beschreven wijze dit polynomium $H(x)$ onder dezen vorm:

$$H(x)=A+B(x-x_1)+C(x-x_1)^2..+L(x-x_1)^\alpha+M(x-x_1)^\alpha (x-x_2)+..$$

$$+..R(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}..(x-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}}(x-x_n)\alpha_n-1$$

waarin de constanten $A. B, C..R$ onmiddellijk aan het tableau (10) ontleend kunnen worden.

7. Voor het verschil $f(x)-H(x)$ bestaat weder een eenvoudige uitdrukking, en daar hierin een verdere uitbreiding ligt van de formule 1), zoo moge de hierop betrekking hebbende ontwikkeling nog in 't kort geschetst worden. Het zal, na het voorgaande. overbodig zijn de condities. waaraan men $f(x)$ te onderwerpen heeft. hierbij in extenso te vermelden.

In de eerste plaats dan is het noodig de hulpstelling van Art. 2 aldus uit te breiden:

Voldoet eene fuctie $G(z)$ aan de condities

$$\begin{array}{llll} G(x)=0 & G'(x)=0 & G''(x)=0\,.. & G^{\alpha-1}(x)=0 \\ G(y)=0 & G'(y)=0 & .. & G^{\beta-1}(y)=0 \\ G(z)=0 & G'(z)=0 & .. & G^{\gamma-1}(z)=0 \\ \;..... & & & \end{array}$$

waarvan het aantal

$$\alpha+\beta+\gamma\,.=n$$

bedraagt, dan is

$$G^{n-1}(\xi)=0$$

waarin ξ gelegen is tusschen de grootste en kleinste der ongelijke waarden $x, y, z...$

Na hetgeen in Art. 2 gezegd is, schijnt het niet noodig, bij het bewijs hiervan lang stil te staan. Men kan eerst het geval dat het grootste der getallen $\alpha, \beta, \gamma...$ twee is. beschouwen, en vervolgens voor dit grootste onder die getallen 3, 4, 5... aannemen.

---

8. Zij nu $H(x)$ het polynomium van den $k-1^{sten}$ graad hoogstens dat aan de condities (12) voldoet, en

$$f(x) = H(x) + (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n} R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

dan is, x verschillend van $x_1, x_2 \ldots x_n$ ondersteld, de waarde van R hierdoor volkomen bepaald. Beschouwt men nu verder de functie

$$G(z) = -f(z) + H(z) + (z-x_1)^{\alpha}(z-x_2)^{\alpha_2}\ldots(z-x_n)^{\alpha_n} R$$

dan is blijkbaar niet alleen

$$G(x) = 0$$

maar ook

$$\begin{array}{lll}
G(x_1) = 0 & G'(x_1) = 0 \quad \ldots & G^{\alpha_1-1}(x_1) = 0 \\
G(x_2) = 0 & G'(x_2) = 0 \quad \ldots & G^{\alpha_2-1}(x_2) = 0 \\
\quad \ldots\ldots & & \\
G(x_n) = 0 & G'(x_n) = 0 & G^{\alpha_n-1}(x_n) = 0
\end{array}$$

en derhalve

$$G^k(\xi) = 0$$

maar, daar $H(z)$ hoogstens van den $k-1^{\text{sten}}$ graad is

$$G^k(z) = -f^k(z) + 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots k \, . \, R$$

en ten slotte

$$\left.\begin{array}{l}
R = \dfrac{1}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots k} f^k(\xi) \\[2ex]
f(x) = H(x) + \dfrac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots k} f^k(\xi)
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

Hierin ligt ξ tusschen het grootste en kleinste der getallen $x, x_1, x_2 \ldots x_n$.

In deze formule liggen zoowel de reeks van Taylor als de formule van Lagrange, door een restterm aangevuld, als bijzondere gevallen opgesloten.

In de aangehaalde verhandeling stelt Hermite ook voor dit geval het verschil $f(x) - H(x)$ met behulp van bepaalde integralen voor.

9. Het algemeenste resultaat dat door de, in het voorgaande ontwikkelde, methode verkregen kan worden, schijnt het volgende te zijn.

Laten $f(x)$ en $H(x)$ dezelfde beteekenis behouden als in Art. 6—8, verder $f_1(x)$ een nieuwe functie van x zijn en $H_1(x)$ die rationale functie van x van den $k - 1^{sten}$ graad hoogstens, die aan de condities (12) voldoet, wanneer men daarin de functie $f(x)$ door $f_1(x)$ vervangt. Zij nu

$$f(x) = H(x) + R\,(f_1(x) - H_1(x))\,. \; . \; . \; . \quad (15)$$

Zal de waarde van R hierdoor op ondubbelzinnige wijze bepaald zijn, dan moet x niet alleen van $x_1\, x_2 \,. \,. \, x_n$ verschillen, maar bovendien mag niet $f_1(x) - H_1(x) = 0$ worden.

Dit nu onderstellende, zij:

$$G(z) = f(z) - H(z) - R\,(f_1(z) - H_1(z))$$

dan is niet alleen:

$$G(x) = 0$$

maar ook:

$$G(x_1) = 0 \qquad G'(x_1) = 0 \qquad G^{\alpha_1 - 1}(x_1) = 0$$

$$. \qquad . \; . \; . \; . \; .$$

$$G(x_n) = 0 \qquad G'(x_n) = 0 \qquad G^{\alpha_n - 1}(x_n) = 0$$

en dus, volgens Art. 7:

$$G^k(\xi) = 0$$

maar daar $H^k(z)$ en $H_1{}^k(z)$ identisch nul zijn:

$$G^k(z) = f^k(z) - R\,f_1{}^k(z)$$

en derhalve:

$$R = \frac{f^k(\xi)}{f_1{}^k(\xi)}$$

of wel:

$$f(x) = H(x) + \left(f_1(x) - H_1(x)\right)\frac{f^k(\xi)}{f_1^{\,k}(\xi)} \quad \ldots \ldots (16)$$

Deze algemeene formule gaat onmiddellijk in de formule (14) over, wanneer men aanneemt:

$$f_1(x) = x^k.$$

Dan is namenlijk:

$$f_1^{\,k}(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\, k$$

en zooals dadelijk te zien:

$$f_1(x) - H_1(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_1)^{\alpha_2} \,.\; (x - x_n)^{\alpha_n}$$

Leiden, October 1881.

NASCHRIFT.

Dat er altijd ééne en niet meer dan ééne functie $H(x)$ bestaat die aan de condities (12) voldoet en hoogstens van den $k-1^{\text{sten}}$ graad in x is, kan onmiddellijk aldus aangetoond worden.

Zij:

$$H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 + a_{k-1} x^{k-1}$$

dan heeft men ter bepaling van de k onbekenden $a_0, a_1, a_2 \,.\,.\, a_{k-1}$ de volgende k lineaire vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{r}
a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \ldots \qquad + x_1^{k-1} a_{k-1} = f(x_1) \\
1 a_1 + 2 x_1 a_2 + \ldots \qquad + (k-1) x_1^{k-2} a_{k-1} = f'(x_1) \\
1.2.a_2 + \ldots \quad + (k-1)(k-2) x_1^{k-3} a_{k-1} = f''(x_1) \\
\ldots \quad \ldots \\
(\alpha_1 - 1)!\, a_{\alpha_1 - 1} + \ldots + (k-1)(k-2) \ldots (k - \alpha_1 + 1) x_1^{k-\alpha_1} a_{k-1} = \\
= f^{\alpha_1 - 1}(x_1) \\
a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 + \ldots \qquad + x_2^{k-1} a_{k-1} = f(x_2) \\
1.a_1 + 2 x_2 a_2 + \ldots \qquad + (k-1) x_2^{k-2} a_{k-1} = f'(x_2) \\
\ldots \quad \ldots
\end{array}\right\} \ldots A$$

De te bewijzen stelling bestaat nu daarin, dat aan dit stelsel vergelijkingen steeds door één en door niet meer dan één stelsel van waarden voor $a_0\, a_1 \, .. \, a_{k-1}$ voldaan kan worden.

Vooreerst is nu te bemerken dat het systeem (A) nooit meer dan éene oplossing kan toelaten, want waren er bijv. twee oplossingen, dan zoude men dus twee verschillende functies $G(x)$ en $H(x)$ hebben die beide aan de voorwaarden, in (12) uitgedrukt, voldoen en die beide van den $k-1^{\text{sten}}$ graad hoogstens zijn. Dit nu is onmogelijk, want uit die vergelijkingen (12) zou volgen dat het verschil:

$$G(x) - H(x)$$

algebraïsch deelbaar is door de uitdrukking van den k^{den} graad:

$$(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} .. (x - x_n)^{\alpha_n}.$$

In de tweede plaats is het evident dat aan (A) door de waarden:

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \, .. \quad a_{k-1} = 0$$

voldaan wordt zoodra de tweede leden der vergelijkingen gelijk nul gesteld worden, en na het bovenstaande is dit ook de *eenige* oplossing in dat geval.

Uit de theorie der lineaire vergelijkingen volgt nu onmiddellijk dat de determinante van het stelsel vergelijkingen (A) niet $=$ nul is, want uit die theorie is bekend dat zoodra deze determinante $=$ nul is, aan de vergelijkingen (A), nadat daarin voor de tweede leden overal de waarde nul genomen is, voldaan kan worden door een stelsel waarden $a_0\, a_1 \, .. \, a_{k-1}$ die *niet* allen gelijk nul zijn, wat in strijd zoude zijn met het boven bewezene.

Uit het niet gelijk nul zijn van de determinante van het stelsel vergelijkingen (A), volgt nu onmiddellijk dat aan dit stelsel, bij willekeurige waarden der tweede leden, steeds door een *enkel stelsel* van waarden $a_0\, a_1 \, .. \, a_{k-1}$ voldaan kan worden.

Men kan overigens de waarde van die determinante gemakkelijk aangeven.

Door namelijk van deze bekende formule uit te gaan:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & .. & a^{k-1} \\ 1 & b & b^2 & .. & b^{k-1} \\ 1 & c & c^2 & .. & c^{k-1} \\ & & & & \\ 1 & p & p^2 & & p^{k-1} \\ 1 & q & q^2 & & q^{k-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (b-a)(c-a)(d-a)\,..\,(q-a) \\ \times\ (c-b)(d-b)\,..\,(q-b) \\ \times\ (d-c)\,..\,(q-c) \\ ... \\ \times\ (q-p) \end{array}$$

waarin ten slotte de α_1 eerste der grootheden a, b, c . . p, q tot de limiet x_1, de α_2 volgende tot de limiet x_2 enz. zullen convergeeren; de horizontale rijen op passende wijze te transformeeren, waarbij men te deelen heeft door de factoren die ten slotte gelijk nul worden, en bij den grensovergang van de formule (7) gebruik te maken, verkrijgt men de navolgende waarde voor determinante van het stelsel vergelijkingen (A):

$$\begin{array}{ll} 0!\,1!\,2!.\ (\alpha_1-1)! & (x_2-x_1)^{\alpha_1\alpha_2}(x_3-x_1)^{\alpha_1\alpha_3}\dots(x_n-x_1)^{\alpha_1\alpha_n} \\ 0!\,1!\,2!..(\alpha_2-1)! & (x_3-x_2)^{\alpha_2\alpha_3}\dots(x_n-x_2)^{\alpha_2\alpha_n} \\ 0!\,1!\,2!\ \ (\alpha_3-1)! & \dots \\ & \dots \\ 0!\,1!\,2!\ \ (\alpha_n-1)! & (x_n-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}\alpha_n} \end{array}$$

De geheele bewerking blijkt genoegzaam uit het volgende bijzondere geval $k = 5$, $n = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} \times (b-a)(c-a)(c-b)(e-d)$$

waarin

$$t_r = \frac{a^r}{a-b} + \frac{b^r}{b-a}$$

$$u_r = \frac{a^r}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^r}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^r}{(c-a)(c-b)}$$

$$v_r = \frac{d^r}{d-e} + \frac{e^r}{e-d} \qquad r = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Derhalve:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = (d-a)(d-b)(d-c) \times (e-a)(e-b)(e-c)$$

en voor:

$$lim.\ a = lim.\ b = lim.\ c - x_1$$

$$lim.\ e = lim.\ d = x_2$$

volgt nu met behulp van de formule (7):

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & 1 & 2\,x_1 & 3\,x_1^2 & 4\,x_1^3 \\ 0 & 0 & 2 & 2.3\,x_1 & 3.4\,x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 0 & 1 & 2\,x_2 & 3\,x_2^2 & 4\,x_2^3 \end{vmatrix} = 2\,(x_2 - x_1)^6$$

VERSLAG

OVER DE

INRICHTING VAN BLIKSEMAFLEIDERS

OP

RIJKSGEBOUWEN TE MEDEMBLIK.

DOOR

J. BOSSCHA, J. D. VAN DER WAALS, C. H. C. GRINWIS.

De ondergeteekenden ontvingen bij missive van 10 December ll., N⁰. 87, van het bestuur der Natuurkundige Afdeeling de opdracht, in de vergadering van heden advies uit te brengen over een ontwerp van den aanleg van bliksemafleiders op de Rijksgebouwen te Medemblik, welke tot een krankzinnigengesticht worden verbouwd.

Het advies moet strekken ter beantwoording van eene vraag van den Minister van Binnenlandsche Zaken, die bij zijnen brief van 7 December ll., N⁰. 2826 Afdeeling Kunsten en Wetenschappen, aan de Koninklijke Akademie toezond het bestek der verbouwingen met de daarbij behoorende teekeningen, een brief van den heer A. FÜNCKLER te Haarlem, het door eene teekening toegelichte plan van aanleg der bliksemafleiders inhoudende, en een advies van den architect A. F. VAN WIJNGAARDE, hetwelk den Minister van Binnenlandsche Zaken den aanleg volgens het voorstel van den heer FÜNCKLER aanbeveelt.

Uit den brief van den heer FÜNCKLER blijkt, dat zich thans op de gemelde gebouwen nog eenige afleiders van oude constructie bevinden. Volgens den heer FÜNCKLER zijn zij meerendeels defect en is hunne samenstelling af te keuren.

Zij bestaan namelijk uit smalle dunne looden reepen. Ofschoon de ondergeteekenden niet in de gelegenheid waren deze afleiders te bezichtigen, is hetgeen de heer FÜNCKLER daaromtrent mededeelt voldoende om ze onvoorwaardelijk af te keuren.

De heer FÜNCKLER stelt voor, de oude afleiders allen op te ruimen en te vervangen door 20 nieuwe, elk bestaande uit eene roodkoperen opvangstang met platina punt, eene ijzeren stang en eene geleiding naar den grond van roodkopertouw van 36 in elkander gedraaide draden. In den grond zou elke afleider eindigen in een vierkante roodkoperen plaat, die in het water wordt geleid, 't zij in eene aanwezige gracht, wel of sloot, 't zij in daarvoor gegraven kleine putten. De kosten van aanleg zouden bedragen *f* 1638. – .

Neemt men in aanmerking dat de bestemming van het gebouw eene afdoende bescherming tegen bliksemgevaar noodzakelijk maakt, dan is het voorstel van den heer FÜNCKLER geenszins overdreven te noemen. De lengte toch der gezamenlijke gebouwen bedraagt bijna 400 meter. Zij beslaan eene oppervlakte van meer dan 0.7 hectare. Het plan van aanleg kan ook, wanneer elk der afleiders goed vervaardigd is, als waarschijnlijk voldoende aangemerkt worden. Eindelijk zijn de kosten laag te noemen. Zij zullen ongeveer 25 cents per M^2 bedragen, wat ongeveer overeenstemt met de laagste opgaven, welke Prof. F. NEESEN in zijn artikel over de Electrische Tentoonstelling te Parijs (*Electrotechnische Zeitschrift*, November-Heft van 1881 bladz. 462) mededeelt.

Toch achten de ondergeteekenden een doelmatiger inrichting, welke waarschijnlijk in onkosten niet veel van die van den heer FÜNCKLER verschillen zal, wenschelijk. Zeer veel grootere veiligheid dan door enkele afleiders te bereiken is. verkrijgt men wanneer door ijzeren stangen van niet minder dan 12 millimeter middellijn, die over de nokken der daken loopen, het geheele gebouw als door een net- of raamwerk van goede, met de aarde verbondene, geleiders is ingesloten. Men verkrijgt zoodanig stelsel wanneer men de afleiders. door den heer FÜNCKLER ontworpen, onderling verbindt, wat

nog om eene andere reden verkieslijk is Bij het inslaan namelijk van den bliksem in eene der vangstangen, vindt door deze verbinding de electriciteit meer dan één weg om zich door afleider en grondplaat in de aarde te ontladen. Eene toepassing van dit stelsel op de Rijksgebouwen te Medemblik zou evenwel nog eenige andere wijzigingen medebrengen.

Blijkens de doorsnede der gebouwen, voorgesteld op de plaat N⁰. 5, behoorende bij het bestek, zijn het hoofdgebouw, de beide frontgebouwen en de beide vleugelgebouwen allen van dubbele daken voorzien.

De heer FÜNCKLER schijnt de afleiders alleen te willen plaatsen op de nokken der buitenste daken. Het zal noodig zijn de ijzeren geleiders, die de afleiders verbinden, over *al* de nokken te plaatsen en die van het buitenste en binnenste dak aan de einden door stangen, evenwijdig aan de diepte van het gebouw, onderling te verbinden.

Het doelmatigst zal zijn, voor elk der vijf groote gebouwen en voor de twee kleine hoekgebouwen aan het einde van het oostelijk en westelijk frontgebouw, op die wijze een *afzonderlijk* stelsel van ijzeren geleiders met vangstangen en grondleiding aan te brengen.

Op het *hoofdgebouw* moet de nokgeleiding over de volle lengte doorloopen, aan de uiteinden moeten de — waarschijnlijk ijzeren — versieringen der schoorsteenen daarmede in goed verband gebracht worden; twee afleiders: één aan de west-, één aan de oostzijde, moeten over de hoekkepers en langs de hoeken der buitenmuren naar de grondleiding gaan. Een derde afleider met grondleiding moet in het midden van het hoofdgebouw worden aangebracht.

De vangstangen op het hoofdgebouw kunnen zich bepalen tot drie, op de plaatsen door den heer FÜNCKLER aangewezen.

Wegens het opnemen der schoorsteenversieringen in het geleidend verband, zouden de beide buitenste vangstangen ongeveer vier meter meer naar het midden van het gebouw kunnen geplaatst worden.

De oostelijke en westelijke frontgebouwen moeten even-

eens door een raam van ijzeren stangen over de nokken gedekt zijn. Drie afleiders op elk dier gebouwen kunnen hier volstaan, te weten: *twee* aan de uiteinden der gebouwen over de hoekkepers en langs de hoeken der muren aan de buitenzijde, en *éen* in het midden van het gebouw, aansluitende aan de ijzeren stangen van den binnensten nok en aan de achterzijde van het gebouw naar de grondleiding voerende. Vangstangen moeten geplaatst worden dáár, waar de eigenlijke afleider zich aansluit aan het geleidende raam dat het dak bedekt, derhalve aan de uiteinden van de gebouwen op het buitenste dak, en in het midden van het gebouw op het binnenste dak.

De twee kleinere hoekgebouwen aan de uiteinden der oostelijke en westelijke frontgebouwen kunnen van éene vangstang en van eenen afleider voorzien worden. De vangstang kan geplaatst worden volgens de aanwijzing van den heer Fünckler, de afleiders moeten daarentegen langs de buitenhoeken van het gebouw naar beneden gaan.

Een raamwerk van stangen over het dak mag hier niet gemist worden.

De beide vleugelgebouwen moeten op dezelfde wijze beschermd worden als de oostelijke en westelijke frontgebouwen.

Zij verkrijgen elk drie afleiders, met daarboven geplaatste vangstangen, op dezelfde wijze geplaatst als bij de frontgebouwen.

Wegens de lagere ligging van den nok der vleugelgebouwen en de onmiddellijke nabijheid der hoogere hoekgebouwen, kunnen de vangstangen op de buitendaken, aan de zijden dier hoekgebouwen, geplaatst worden zooals door den heer Fünckler werd aangeduid, op eenigen afstand van den nok. De afleiders aan dit gedeelte moeten evenwel over de hoekkepers naar beneden worden gevoerd.

Volgens ons voorstel zouden derhalve noodig zijn 17 afleiders en 17 vangstangen.

Het schijnt ons niet noodig de afleiders uit kostbaar koperdraad te doen bestaan. Kabels van gegalvaniseerd ijzer kunnen voldoende geacht worden. De ijzerdoorsnede dezer kabels moet minstens een c.M^2 inhoud hebben. Daarentegen

dient bijzondere zorg besteed te worden aan de grondleiding. Er moet bepaald worden dat elke grondplaat minstens 1 M^2 groot moet zijn en uit roodkoper moet bestaan. Zooveel mogelijk moeten de grondplaten, in het water der omringende grachten, behoorlijk tegen aanvaring of diefstal beschermd, uitkomen.

Het schijnt ons nuttig dat aan het koperen uiteinde van elke vangstang een 3 millimeter dikke koperdraad blijvend worde bevestigd. De koperdraad moet om de stang in éene winding rondloopen en beneden om de stang door rondbuiging worden vastgemaakt.

Hij is bestemd dienst te doen bij de beproeving der bliksemafleiders.

Delft, *Amsterdam*, *Utrecht*, 24 December 1881.

RAPPORT OVER DE VERHANDELING

VAN DEN HEER

Dr. M. W. BEYERINCK,

GETITELD :

„BEOBACHTUNGEN UEBER DIE ERSTEN ENTWICKELUNGSPHASEN EINIGER CYNIPIDENGALLEN".

Uitgebracht in de Vergadering der Afdeeling Natuurkunde der Kon. Akad. v. Wet. van 24 December 1881.

De verhandeling van den Heer BEYERINCK, getiteld: »Beobachtungen über die ersten Entwickelungsphasen einiger Cynipidengallen", aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ter opneming in hare werken aangeboden, en waaromtrent de ondergeteekenden in de vorige vergadering zijn uitgenoodigd advies te geven, is een uitgebreid, in het Hoogduitsch geschreven stuk van meer dan 300 folio bladzijden tekst, met een 35tal gedeeltelijk gekleurde platen voorzien. Zij behandelt de onder den naam van galnoten of gallen bekende uitwassen en misvormingen, door galwespen te weeg gebracht, welke bij eiken en andere planten voorkomen, en waarvan de nauwkeurige kennis alleen te verkrijgen is door zelfstandige studie en wetenschappelijk onderzoek, zoowel van de levenswijze en den lichaamsbouw van het insect, dat de galnoot heeft veroorzaakt, als van de ontwikkeling en structuur van het vervormde plantendeel.

Het onderwerp behoort alzoo, wanneer beide gedeelten der vraag tot hun recht komen, zoowel tot het gebied der entomologie als tot dat der botanie. Zoodanige gelijktijdige studie nu van twee verschillende, ieder zeer uitgebreide, wetenschappen wordt, tenzij daartoe, gelijk in casu, eene bijzon-

dere aanleiding bestaat, bij denzelfden natuuronderzoeker slechts zelden aangetroffen. Voor het zuiver entomologische gedeelte der verhandeling acht de eerste ondergeteekende zich dan ook geen bevoegd beoordeelaar, en op zijn verzoek heeft de tweede ondergeteekende, die voor zich dit bezwaar niet maakte, de redactie van dit onderdeel van ons Rapport op zich genomen.

De bijzonderheden van den inhoud der verhandeling te vermelden, mag overbodig heeten, na de uitvoerige mededeeling daarvan door den tweeden ondergeteekende, bij de aanbieding van het stuk in onze vergadering gedaan. Wel willen wij echter doen uitkomen, dat de schrijver de klippen eener eenzijdige, hetzij botanische, hetzij entomologische behandeling van het onderwerp (waarop de meeste vroegere onderzoekers vervallen zijn), heeft vermeden, en dat hij reeds daardoor in staat is geweest om sommige tot dusverre duistere punten tot klaarheid te brengen.

De methode van zijn onderzoek is de tegenwoordig algemeen als juist erkende, om zich niet bij den volwassen toestand van het orgaan te bepalen, maar om de geheele ontwikkeling uit den jongsten waarneembaren toestand na te speuren. Daartoe heeft hij zoowel de in de vrije natuur voorkomende wespen en gallen opgezocht, en waar het kon gefixeerd, als door eigen culturen, op vernuftige en eenvoudige wijze, de vorming en ontwikkeling der gallen, door bepaalde diersoorten te weeg gebracht, stap voor stap nagegaan.

Een der voornaamste verdiensten van de verhandeling des Heeren Beyerinck is namelijk gelegen in de volledige beschrijving van de ontwikkelingsgeschiedenis der gallen, van het oogenblik af waarop de eieren gelegd worden. Voor zulk een behandeling van zijn onderwerp was het natuurlijk noodzakelijk, over een zeer rijk materiaal te beschikken, en wel vooral van de allerjongste toestanden, welke uit den aard der zaak het moeilijkst te vinden zijn. Vroegere onderzoekers, zooals Lacaze-Duthiers eu Prillieux, kenden deze eerste ontwikkelings-stadiën niet, en het is grootendeels daaraan toe te schrijven, dat voor hen de belangrijkste

vragen over de oorzaken der galvorming onoplosbaar bleven.

Het lag in den aard der zaak, dat slechts eene nauwkeurige kennis van de levenswijze der galwespen, en vooral van de gewoonten, die zij bij het leggen der eieren volgen, de middelen aan de hand kon doen om de galvormingen in haar jongste toestanden te leeren vinden.

In de allereerste plaats moet hier het tot voor weinige jaren voor galwespen onbekende verschijnsel der generatie-wisseling genoemd worden. De vormen, door Linnaeus en anderen als afzonderlijke soorten beschreven, werden nog algemeen als zoodanig beschouwd, toen in het jaar 1873 Bassett de waarneming deed, dat galwespen, uit bepaalde galvormen te voorschijn gekomen, door het leggen van eieren in eikenknoppen of op andere deelen van den eik, aanleiding geven tot het ontstaan van andere gallen, waaruit zich later wespen met andere soortelijke kenmerken dan die van het moederdier ontwikkelen. De juistheid van Bassett's waarneming werd door Beyerinck voor een inlandsche soort bevestigd gevonden, toen hij zag dat de gallen, door Teras terminalis veroorzaakt, volkomen gelijk waren aan die van Biorrhiza aptera, en dat dit dier op zijn beurt weer als het moederdier der terminalis-gallen beschouwd moet worden. Nadat deze waarnemingen gedaan waren, verscheen een uitvoerige verhandeling van Adler over de generatie-wisseling der galwespen, waaruit bleek dat bijna alle zoogenoemde soorten twee aan twee slechts generatiën eener zelfde soort zijn. Voor een aantal der door Adler beschreven gevallen levert de onderzoeking van Beyerinck een zeer gewenschte bevestiging.

Het groote belang van de kennis van dit feit voor de studie van de ontwikkelingsgeschiedenis der gallen springt gemakkelijk in het oog, wanneer men bedenkt, dat men, om den aanvang der vorming van een bepaalde galsoort te bestudeeren, de knoppen opzoeken moet, waarin door een dier, uit een geheel anderen vorm voortgekomen, eieren gelegd zijn. Wil men dus in den tuin de ontwikkeling der gallen nagaan, dan moet men daartoe alzoo vooraf galwespen van een andere soort verzamelen. Zoolang men niet weet, welke

soorten bij elkander behooren, is dus het onderzoek uiterst onzeker, zoo niet onmogelijk.

De generatie-wisseling der meeste galwespen is van dien aard, dat men eene voorjaars- en eene najaarsvorming van gallen kan onderscheiden; uit de voorjaarsgallen plegen mannelijke en vrouwelijke individuen te voorschijn te komen, die in Juni of Juli op het jonge eikenloof of in de zomerknoppen eieren leggen (de vroegere geslachten Andricus, Spathegaster). Uit de najaarsgallen pleegt een ongeslachtelijke generatie (de vroegere geslachten Neuroterus, Dryophanta, Aphilothrix partim) te komen, die de rustende knoppen aanboort, en daartoe van een veel sterker ontwikkeld legboor-apparaat voorzien is. De betrekking tusschen den bouw van de legboor en de organen, waarin de eieren gelegd worden, is in alle behandelde soorten door den Heer Beyerinck met zorg bestudeerd, terwijl de anatomische bijzonderheden van de legboor, met de daarbij behoorende organen, in vele gevallen door teekeningen weergegeven zijn.

Uit het medegedeelde blijkt, dat de studie van de generatie-wisseling, de levenswijze en den lichaamsbouw der galwespen, door den Heer Beyerinck is dienstbaar gemaakt aan het onderzoek van de ontwikkelingsgeschiedenis der gallen. Doch hieruit mag geenszins afgeleid worden, dat deze punten slechts terloops of als bijzaak behandeld zijn. Integendeel, de verhandeling ontleent een niet onbelangrijk deel harer wetenschappelijke waarde juist aan de talrijke waarnemingen, die door den Heer Beyerinck op dit tot nu toe nog zoo weinig beoefende gebied verzameld en beschreven zijn. Daarenboven stelt de uitvoerige behandeling van dit gedeelte van zijn stuk anderen, die zijne waarnemingen mochten wenschen te herhalen, in staat dit te doen, zonder eerst zelf alle daaraan verbonden bezwaren te behoeven te overwinnen. De methode van het onderzoek mogen wij dus, ook voor de oplossing van latere vragen, van nu af als gegeven beschouwen.

En wat nu het onderzoek naar de vorming en de anatomische structuur der gallen zelve betreft, ook hieraan is

groote zorg besteed. Van ongeveer 50 inlandsche vormen van Cynipidengallen, door den Heer BEYERINCK in de laatste vijf jaren levend onderzocht, heeft hij steeds kunnen bepalen, waar en hoe het ei gelegd werd, waaraan zij hun ontstaan te danken hadden, en welke plantaardige weefsels voor hunne vorming gebruikt werden. Het belangrijkst zijn echter de gevallen, waarin hij de galvorming van den aanvang bespied, de ontwikkeling daarvan trap voor trap gevolgd, en in afzonderlijke hoofdstukken, naar de soorten der bladwespen betiteld, beschreven heeft.

Op de gedetailleerde beschrijving van het geheele proces der eilegging volgt dan een uitvoerig onderzoek van het jeugdige plantenweefsel (meristeem van het vegetatiepunt, of van het blad in knoptoestand, of phloëem van wortel of stengel in procambialen staat), dat met het dierlijk voorwerp in aanraking is gekomen. Wel blijft ook voor den schrijver de eigenlijke oorzaak verborgen van de merkwaardige wijzigingen in celdeeling, wandverdikking en differentieering der elementen, welke onder den invloed van het insect, en bij elke species in eigen vorm ontstaan, maar uit zijn onderzoek blijkt alvast de onjuistheid van sommige vroegere meeningen. Hij toont aan, dat de genoemde verandering geen gevolg is van verwonding, maar uitgaat van de groeiende en nog in de eischaal besloten larve; dat zij op één punt begint en, van daar allengs zich uitbreidende, een eigen vormingsweefsel, door hem *galplasteem* genoemd, doet ontstaan; dat die werking der larve niet eene momentane, maar eene langdurige moet zijn, want zoo de larve sterft kan de gal hare volledige ontwikkeling niet bereiken.

Merkwaardig is evenzoo de beschrijving der verdere ontwikkeling van dat galplasteem, hetwelk door om- en overwalling de zoogenaamde larvenkamer vormt, en later zich differentieert in verschillende cellenlagen, reeds door LACAZE-DUTHIERS ontdekt, welke tot voedsel en beschutting voor de larve dienen.

In één woord, in de verhandeling van den Heer BEYERINCK zien wij het resultaat van een grondig, wetenschappelijk onderzoek, dat, al zij het ook niet gesloten, en al zouden

wij ook niet alle uitspraken en voorstellingen geheel willen onderschrijven, toch naar onze meening de kennis van een belangrijk en moeilijk onderwerp eene schrede voorwaarts brengt en tot nieuwe onderzoekingen den weg baant. Wij aarzelen dan ook niet, om aan de Afdeeling voor te stellen, de genoemde Verhandeling in de werken in 4^0 der Akademie op te nemen.

Wat aangaat het van het Bestuur der Afdeeling ontvangen verzoek, om, met het oog op de financieele krachten der Akademie, uit de vele platen, die de verhandeling vergezellen, eene keus te doen en diegene buiten te sluiten, welke, zonder aan de duidelijkheid van den tekst te kort te doen, gemist kunnen worden, zoo komt het ons bezwaarlijk voor, om uit de figuren, die toch door den Schrijver niet zonder reden zijn bijgevoegd, een greep te doen. Wij zouden daardoor allicht schade toebrengen aan de duidelijkheid der voorstelling, en wij zouden het ook betreuren, zoo de gekleurde figuren, welke niet alleen de natuur getrouw weergeven of onbekende zaken afbeelden, maar zelfs eene artistieke waarde hebben, alleen om financieele redenen achterwege bleven. Maar wij geven het Bestuur der Afdeeling in overweging om ons te machtigen, in overleg met den Schrijver na te gaan, of niet wellicht een paar platen desnoods geheel weggelaten, en onderscheiden figuren minstens op de helft verkleind konden worden, zonder in duidelijkheid te verliezen, waardoor dan de drukkosten belangrijk verminderd zullen worden.

N. W. P. RAUWENHOFF.
HUGO DE VRIES.







DE OEVERAFSCHUIVINGEN IN ZEELAND

EN HAAR VERBAND MET DEN

AARD DER GRONDLAGEN

DOOR

G. VAN DIESEN.

De oevers langs de Zeeuwsche stroomen vertoonen een verschijnsel, waarvan de gevolgen soms zoo noodlottig zijn, dat een ernstig nagaan van de oorzaak en het opsporen van middelen van bedwang veler hoofden al vóór tijden hebben bezig gehouden.

Het verschijnsel, dat met den naam van *oeverafschuivingen* kan worden bestempeld, heeft van ouds velerlei namen gehad, naarmate van den omvang, de wijze van afschuiving, de soort van afgeschoven grond en de plaats; zooals: grondbraak, val, grondval, slikval, dijkval enz. Laatstgenoemde naam duidt de afschuiving aan in haar meest gevreesden vorm, waarbij zij zich tot een dijk uitstrekt, die gedeeltelijk mede wordt verzwolgen. zoodat de polder, die door den dijk wordt beschermd, met den eerstvolgenden vloed kan worden overstroomd, kan »vloeijen".

De oeverafschuivingen nemen aan de stroomen in en nabij Zeeland afmetingen en vormen aan, die in andere deelen van Nederland niet bekend zijn. Dit, zoowel als het veeltijds nog onverwachts voorkomen der afschuiving, maakt het wenschelijk, dat niet alleen in materieel opzigt de aandacht op het verschijnsel blijve gevestigd, maar dat ook de wetenschap er nader kennis van neme.

Voldoende kennis van het wezen der afschuivingen in Zeeland wordt nog gemist; is althans niet in zoodanig algemeen bezit als het belang der oeververdediging zou vorderen. De kennis der middelen van verdediging is meer vooruitgegaan dan die van de wegen des vijands, waartegen die middelen worden aangewend.

In het belangrijke in 1862 uitgegeven Verslag van den Raad van den Waterstaat voor de oeververdediging in Zeeland, benoemd in 1860, worden wel vele wenken gegeven en verbeteringen aanbevolen, die sedert bij de oeververdediging met vrucht zijn nagekomen, maar van vermeerderde kennis in deze eeuw omtrent het wezen der oeverafschuivingen geeft dat verslag geen blijken. Het verschijnsel wordt op blz. 16 van dat Verslag door den Raad nog aangeduid door de volgende bewoordingen van het op 20 September 1771 door het Zeeuwsch Genootschap der wetenschappen bekroond antwoord van B. Nebbens op de uitgeschreven prijsvraag naar de redenen, middelen van voorkoming en van herstel der oeverafschuivingen.

»Het zijn die schadelijke en meesttijds zonder eenige »voorteekens, onverwagte en schielijke wegvallingen van ge»heele vakken in de voor de zee liggende gronden of weij»landen, 't zij schorren, onbegroeide slikken of zandgron»den, waarmede dikwijls de zeedijken in het taلu, ja tot »in de kruin en somwijlen geheel in een oogenblik, met »derzelver zate en voorschreven voorgrond wegvallen, breken »en hunne plaats in meerdere of mindere diepte veranderen, »zoodat de polders en landen, voor of omtrent welke zoo»danige vallen gebeuren, in meerder of minder gevaar van »overstrooming gebragt worden en zelfs somwijlen daardoor »geheel komen te inunderen."

Op de juistheid dezer beschrijving van het verschijnsel is trouwens niets af te dingen.

Als bijzondere omstandigheden, waaronder de vallen plaats hebben, noemt Nebbens de volgende op.

1°. Zij geschieden meestijds zonder voorteekens, doorgaans onverwachts en op 't schielijkst.

2°. Alles wat ondermijnd of tot den val geschikt is

valt niet eensklaps weg, maar dikwijls met stukken en brokken, het eene voor en het andere na.

3⁰. De kolken of grondgaten door de vallen gevormd hebben meerendeels steile oevers of kanten, onregelmatige figuren en ook een ongelijken grondslag.

4⁰. Die kolken zijn doorgaans voorzien van een of meer uitgangen of geuten, naar de diepte en het digtst bijgelegen kanaal of vaarwater gaande en in dezelve uitkomende.

5⁰. De grondbraken geschieden veelal bij lage ebben in stil weder met aflandige winden en gierstroom.

6⁰. Zij hebben meest plaats waar sterke stroomen of tijen langs en op den wal henen schieten of daar draaijingen en malingen van het tije of zoogenaamd neer gaan.

7⁰. Daar veel val van water, namelijk hooge vloeden en lage ebben plaats hebben, gelijk ook daar meer eb dan vloed gaat.

8⁰. Waar steile oevers en diepe kanalen of vaarwaters plaats hebben.

9⁰. Waar de gronden met doorgaande lagen vaste derry, klei of andere vaste stoffen en daaronder losse derrij, spier, kwijlzand, schulpzand of andere losse stoffen zamengesteld zijn.

10⁰. Vallen of grondbraken gebeuren zelden waar zware zeeën of slag van water op den wal en de oevers staat.

In de opgaven der oorzaken van een val bepaalde Nebbens zich tot algemeene trekken, zooals de ongelijksoortigheid der grondslagen, de meer of mindere beweegbaarheid en vloeibaarheid dier lagen. Ook kende hij aan onderaardsche wateraderen of wellen, »holten of wulven", ontstaan door de wegstrooming van losse stoffen onder »vast zamenhangende lagen, die bleven hangen" invloed toe, en vooral aan de verdieping, die door de vloed- en ebstroomen nabij den oever werd gebragt.

Bij gemis aan verzameling van naauwkeurige opgaven kwam de opsporing der oorzaken niet verder, nadat die verhandeling te gelijk met twee andere van B. Renou en van C. de Kanter in het Derde Deel van de Verhandelingen van het Zeeuwsch genootschap het licht had gezien.

Ofschoon slechts in grove trekken door Nebbens aange-

geven worden de bijzonderheden, die volgens zijne opgave met de afschuivingen gepaard gaan, grootendeels ook nu nog aangetroffen. Bij eene wetenschappelijke behandeling der zaak zal van dienst kunnen wezen de opgaaf van de wateren, waaraan in zijn tijd de afschuivingen zich *niet* en die waaraan zij zich *wel* vertoonden *).

---

*) Nebbens zegt dat geene afschuivingen voorkomen in:

het Goese diep;

Welsingen;

aan de Zuid-Watering sedert 1745 (dus, zegt hij, sedert 25 à 26 jaar) niet meer;

en aan den Westkappelschen Zeedijk.

Het eerstgenoemde diep en dat langs Welsingen, destijds geene belangrijke vaarwaters, liggen thans grootendeels als aangeslibt land binnendijks.

In vroegere tijden dan die Nebbens op het oog heeft, namelijk in het begin der 15de ceuw, hebben blijkens de „stadsrekeningen van Middelburg van 1365 tot 1449" door H. M. Kesteloo, opgenomen in het Archief van het Zeeuwsche genootsshap, Deel V, 2de stuk, blz. 251, toch afschuivingen in den oever bezuiden Arnemuiden plaats gehad.

De Zuidwatering werd ontzet door de verplaatsing van den Zuidelijken mond van het Sloe oostwaarts. Zij is door de afneming van de Kaloot thans weder meer blootgesteld aan uitschuring.

Voor den Westkappelschen dijk ligt een onderzeesch breed strand.

Of aan het Oostgat, dat er langs loopt, nimmer afschuivingen onder water plaats grijpen is niet bekend. De peilingen strekken zich zoo ver niet uit.

In het algemeen kan men ook met A. Caland in de noot op blz. 143 van zijn „Handleiding tot de kennis der dijksbouw en zeeweringkunde" aannemen, dat aan de stranden aan zee vallen of oeverafschuivingen weinig voorkomen.

Dit is waarschijnlijk, zooals daar ook gezegd wordt, hieraan toe te schrijven, dat de stroomen, in de ruime zee zich vrijer bewegende, minder diepe geulen en minder steile glooijingen vormen dan waar zij tusschen oevers gedrongen zich bewegen.

Dat die gunstige omstandigheid zich ook bij „oude oevers" zou voordoen, zooals in dezelfde noot van genoemd werk wordt gezegd is minder gegrond en wordt ook door de ondervinding tegengesproken.

Als oevers, die in zijn tijd door de afschuivingen werden geteisterd, noemt Nebbens die van de eilanden Schouwen, Duiveland, Zuid- en Noordbeveland en de Noordzijde van Walcheren Hij wijst nader als punten aan:

Burgt;

de Zuidhoek bij Zierikzee;

het Zijpe;

Ten einde het wezen der afschuivingen nader te leeren kennen is het wenschelijk, dat van iedere afschuiving de bijzonderheden naauwkeurig worden nagegaan, aangeteekend en met die van andere afschuivingen worden verzameld op eene wijze, die vergelijking gemakkelijk maakt.

Mijn werkkring in Zeeland gaf mij de gelegenheid met zoodanige verzameling van gegevens een aanvang te doen maken.

De daardoor vervaardigde lijst van 90 vallen is hierbij gevoegd (Bijlage I). Zij is op verre na niet volmaakt, doch beantwoordt althans eenige vragen en zal, indien zij wordt bijgehouden en op peilingen gegrond is, waaraan de noodige zorg wordt besteed, meer en meer tot opheldering van menige nog duister gebleven omstandigheid kunnen bijdragen. Het is aan te bevelen daartoe o. a., een opgaaf van de grootste steilte er aan toe te voegen.

Diepte, gevormd vóór een oever, tengevolge van de uitschuring door sterke stroomen van eb en vloed, ofschoon niet volstrekt vereischt, bevordert ontegenzeggelijk de afschuivingen. Over groote uitgestrektheid langs den oever behoeft de diepte, voor de afschuiving gevorderd, niet altijd te zijn uitgeschuurd. Bij de aanzienlijke afschuiving van 1856 aan den Wilhelminapolder was slechts plaatselijk de diepte voor den wal gevormd of genaderd. Ditzelfde is bij den grooten val van 11 Augustus 1881 voor den Oud Noordbevelandpolder waargenomen.

Ouwelecq of West-Orizand;
Oud-Noordbeveland;
Ellewoutsdijk;
en de oever tusschen de stad Veere en 't fort den Haak.

Burgt mag thans als in rust worden beschouwd, ofschoon in 1878 of 1879, blijkens de jaarlijksche peiling, onder water nog een grondverplaatsing moet zijn geschied. Bij den Zuidhoek van Schouwen evenals aan de geheele Zuidkust van dien polder heerscht nog geen volmaakte rust, evenmin als aan het Zijpe en bij het fort den Haak. De polder van Ouwelecq is sedert een eeuw de prooi der golven. Van Ellewoutsdijk is voor het tegenwoordige het gevaar gekeerd. De oever voor Oud-Noordbeveland, die een halve eeuw in rust gelaten werd, wordt in den laatsten tijd opnieuw aangevallen.

Zijn de opgaven vertrouwbaar dan zouden afschuivingen ook wel bij eene flauwe helling hebben plaats gegrepen. Zeker is het dat zij soms wegblijven ter plaatse, waar zij op grond van waargenomen steile hellingen, konden verwacht worden.

Ontbreekt althans van het eerste, zoo dat waar is, nog eene aannemelijke verklaring, merkwaardig is de vorm van het gat, dat door de afschuiving veeltijds in den oever zich afteekent. De vorm is namelijk niet altijd die van een flaauw gebogen cirkelsegment met de koorde aan de zijde van den stroom, welken vorm men bij eene afschuiving gewoonlijk mag verwachten, maar veelal die van een landwaarts inspringend en zich verbreedend, oploopend gat met eene betrekkelijk naauwe opening aan de rivierzijde.

Het gat, waaruit de grond is weggeschoven, dringt zich zelfs wel zijdelings achter een zinkstuk of achter een op andere wijze bekleed of bezwaard gedeelte van den bodem.

Om een juiste kennis te verkrijgen van de grondverplaatsing zou men in het bezit moeten zijn van naauwkeurige peilingen digt bij elkander en over groote uitgestrektheid verrigt, zoowel kort vóór als kort na den val. Zoodanige volkomen opneming is nog niet gedaan en is ook moeijelijk.

De bekleeding van den bodem houdt, waar zij zwaar genoeg is belast, de voortschrijding van een val dikwerf tegen en ontneemt dan daaraan den regelmatigen komvorm. Evenzoo doen vaak dijken en dammen; vermoedelijk door de zamendrukking van den grond onder hun gewigt. Voornamelijk doen zij dit waar de grootste diepte van de afschuiving niet digt bij den dijk is, maar deze alleen door het achterste ondiepe gedeelte van den val wordt aangeraakt.

De kanten van het gat, zoover zij boven water zigtbaar zijn, gaan gewoonlijk steil naar beneden; de bodem onder water ligt, behoudens ongelijkheden door afgeschoven stukken gevormd, onder eene helling buitenwaarts. Hebben de peilingen, voor dat de val plaats greep, zich ver genoeg buitenwaarts uitgestrekt, dan kan den eersten tijd de afgeschoven grond in de diepte worden weergevonden.

Het wel eens geuit vermoeden dat de verzinking loodregt

geschiedt wordt door geen waarneming gesteund, en is welligt ontstaan door dat men tengevolge van onvoldoende peiling, den weggeschoven grond in de diepte niet terugvond.

Het steile beloop van den boven water zigtbaren kant der afschuiving, de groote verdieping, die gepeild wordt in het beloop der afschuiving en de onvolledige wijze, waarop het dwarsprofiel van de afschuiving veelal wordt geteekend, kunnen mede tot dat vermoeden aanleiding hebben gegeven.

Op de profillen eener afschuiving ziet men meestal als grenspunt aangegeven het punt, waar voor en na den val dezelfde diepte gepeild werd, ofschoon het mogelijk en veelal zelfs zeer waarschijnlijk is, dat het vlak van afschuiving lager ligt.

Aannemelijk is de meening dat de afschuiving meestal aanvangt bij eb en wel te eerder naarmate deze, zooals in springtijen lager afloopt dan gewoonlijk

Onder dien invloed kan de afschuiving ook op een ander tijdstip van het getij intreden, zoo als laatstelijk het geval was met den belangrijken val bij Glasjesnol aan den Oud Noordbevelandpolder. Deze had wel plaats in het springtij (11 Augustus 1881) maar nog twee uur voor L. W. toen het water nog een meter moest dalen, en wordt toegeschreven, door den ingenieur H. E. de Bruijn, aan den bijzonder hoogen vloed, die was voorafgegaan.

Daar de afschuiving, ofschoon gewoonlijk plotseling en schielijk geschiedende, eenigen tijd noodig heeft, indien zij, zooals somtijds het geval is, brokswijze van de diepte bovenwaarts zich uitbreidt, zoo kan het gebeuren, dat de vloed reeds eenigen tijd is ingetreden op het oogenblik, dat men het verschijnsel bovenwater waarneemt.

Men meent wel den aanvang eener afschuiving nog voor zij zigtbaar was door een geluid als het rommelen van den donder gepaard met dreuning te hebben waargenomen. Deze en andere verschijnselen bevestigen de meening, dat de afschuiving niet altijd over den geheelen omvang van de wegschuivende massa in eens zich uitstrekt, maar ook wel brokswijze beginnende bij het laagste gedeelte, kan plaats grijpen.

Het onderzoek, aangewend om bekend te worden met het gevaar dat een oever liep van door afschuiving te worden vernield, bestond tot nog toe in *peilingen*, *grondboringen* en *duikingen*.

De *peilingen* zijn van de oudste dagteekening. Door de zorg der besturen van de polders geschieden zij eens of meermalen 's jaars, naarmate van de grootte of van de nadering der diepte voor den wal.

Diepten van 40 en 50 Meter zijn in Zeeland geene zeldzaamheid. De krachtige in- en uitstrooming van de zee veroorzaakt voor een aangevallen oever soms verdiepingen van 6 à 10 Meter tusschen de tijdstippen van twee peilingen, die om het jaar of om het halfjaar gedaan worden.

Wil men de peiling tot de grootste diepte uitstrekken dan moet men zich meestal ver van den wal verwijderen, hetgeen ten nadeele kan zijn van de naauwkeurigheid, daar het dan moeijelijk is de draad of lijn, waarmede men den afstand uit den wal meet, strak en in de goede rigting te houden. Het peilen door de polderbesturen geschiedde dus veelal niet tot de grootste diepte, maar tot den afstand uit de laagwaterlijn, waartoe de meetdraad strekte.

De nadering der geul of van de grootste diepte werd dan niet altijd waargenomen, en hieraan is misschien het onverwachte van menige afschuiving toe te schrijven, waarvan men melding vindt gemaakt.

Aan aansporing der polderbesturen tot het uitstrekken der peiling tot in en liefst voorbij de grootste diepte heeft het den laatsten tijd niet ontbroken. Daar men meer en meer gevolg geeft aan de aanbeveling, om den afstand uit den wal door middel van hoekmeting te verifieeren, mag men op den duur eene verzameling van meer naauwkeurige gegevens dan de vroegere te gemoet zien.

In de laatste jaren zijn ook *grondboringen* verrigt tot nasporing of in de hoedanigheid der grondlagen welligt kan gevonden worden eenig verband met het voorkomen van afschuivingen. Dit onderzoek naar de gesteldheid van den bodem was reeds aanbevolen door den Raad van den wa-

terstaat voor de oeververdediging in Zeeland, benoemd in 1860 (§ 128 van het Verslag).

De bedoelde boringen zijn gedaan voor polders, wier oevers door afschuivingen te lijden hadden, namelijk voor den:

Bruinisse polder;
Scherpenisse polder;
Vliete polder;
Oostbeveland polder;
den polder Breede Watering bewesten Yerseke;
Borssele polder;
Hoofdplaat polder;
Nieuwe Neuzen polder;
Margaretha polder;
Kleine Huissens polder,
en Eendragt polder.

Tot voortzetting van het wetenschappelijk onderzoek zou het wenschelijk zijn, dat aan enkele polders nog meer en dat ook nog aan andere oevers boringen geschiedden en de opgeboorde stoffen op dezelfde wijze wierden onderzocht.

Eene aanvankelijke uitkomst van het onderzoek, dat van de opgeboorde grondsoorten met naauwkeurigheid door Dr. F. SEELHEIM plaats had, en waarvan een Verslag onder den titel: *De grondboringen in Zeeland*, in 1879, in de Verhandelingen der Akademie is opgenomen, is deze, dat inzonderheid hetgeen hij noemt het diluviale zand, hetwelk veel werd aangetroffen, zich tot afschuiving gemakkelijk leent, daar dat zand weinig zamenhang heeft, gemakkelijk beweegbaar en voor water doordringbaar is.

Eene naauwkeurige vergelijking van de diepte, waarover eene afschuiving plaats had, met de waargenomen hoedanigheden en dikte der grondlagen kan, zooals nader zal worden aangetoond, zamenvalling van omstandigheden doen ontdekken, die tot eenige verklaring kan leiden.

De *derde* wijze van onderzoek van den onderzeeschen bodem, namelijk door iemand, uitgerust met helm en duikerpak, in het water te doen nederdalen, is door het bestuur van den polder van Schouwen in het werk gesteld en later ook door

enkele andere polderbesturen nagevolgd. Dit onderzoek moest zich natuurlijk bepalen tot de oppervlakte van den bodem en tot het vernemen van de mondelinge mededeelingen, die men van de bevinding des duikers verkreeg.

Het hoofddoel daarbij was na te gaan of de bodem nog bekleed was met het rijshout en den steen, die er in vroegere jaren op gebragt waren, en of men dus den bodem als nog genoegzaam beschermd tegen wegschuring mogt beschouwen.

Voor het leeren kennen van den aard, het wezen en de nadering van eene oeverafschuiving zijn van de drie middelen ongetwijfeld met zorg uitgevoerde peilingen der diepte, vergeleken met de uitkomst van de grondboringen, de meest geschikte.

Voor eene zoodanige vergelijking heb ik de aan het einde dezer verhandeling geplaatste tabel (Bijlage II) zamengesteld uit de opgaven van Dr. SEELHEIM en bekende diepten, en heb ik daaraan toegevoegd hetgeen omtrent belangrijkheid van oeverafschuivingen in de nabijheid der boringen mij bekend was.

Eene inzage van die tabel, van bijlage I en van de profillen in de Verhandeling van Dr. SEELHEIM kan, naar het mij voorkomt, reeds tot enkele gevolgtrekkingen leiden, die door voortgezette verzameling van waarnemingen later meer uitgebreid moeten worden.

In de *eerste* plaats blijkt dat *groote* diepte der geul in de nabijheid van den oever wel een belangrijke faktor is in den toestand, die eene oeverafschuiving veroorzaakt, maar niet een onmisbare en ook niet de eenige faktor.

Al dadelijk moet ik doen opmerken dat de uitdrukking »groote diepte" in betrekkelijken zin moet worden verstaan, omdat in vergelijking met die, welke in de stroomen en vaarwaters elders in Nederland voorkomen, de diepten, waarvan hier sprake is, *alle* groot mogen genoemd worden.

Dat ook bij diepten, die in Zeeland niet tot de aanzienlijke behooren, afschuiving van den oever kan plaats vinden, blijkt o. a. bij de oevers voor den Elisabeth polder en den Nieuwen Neuzen polder aan den Brakman, voor den

Hoofdplaat polder en den Eendragt polder aan de Westerschelde en voor den Anna polder aan de Zandkreek.

De diepte voor den eerstgenoemden polder bedroeg hoogstens 13.50 M. beneden L. W., en niettemin werden de oever en de dijk van dien in 1866 bedijkten polder van 1868 tot 1870 door aanhoudende afschuivingen zeer verontrustend bedreigd. Deze afschuivingen, waarvan het ontstaan welligt is toe te schrijven aan de vernaauwing van den mond van den Brakman, door de genoemde bedijking, zijn in de laatste jaren gevolgd door vele afschuivingen aan de overzijde, namelijk aan het gedeelte van den oever voor den Nieuwen Neuzen polder, dat aan den Brakman gelegen is, waar bij diepten van 15 M. beneden L. W. en minder, in vrij belangrijke afmetingen, het verschijnsel plaats vond. Aan den Hoofdplaatpolder deden zich bij geringe diepten, tot van 10 à 12 M. beneden L. W., verscheidene afschuivingen voor.

De oever van Eendragtpolder onderging 27 Februarij 1876 eene afschuiving van vrij aanzienlijken omvang, nadat kort te voren op 220 M. uit de L. W. lijn eene diepte van 22.50 M. onder L. W. of van 24.55 M. beneden A. P. en dus een zeer flaauw beloop, althans bij vergelijking der uiterste punten, was gevonden.

Bij den Anna polder, voor welken eene diepte van 25.53 M. A. P. was gepeild, viel den 12 Januarij 1878 eene belangrijke afschuiving voor, die geheel het karakter bezat, dat aan afschuivingen in diluviaal zand eigen schijnt te zijn; van welke grondsoort de aanwezigheid bij den Anna polder mag worden ondersteld uit de boring bij de Vliete en Oostbeveland polders (zie profil 5). Vóór den soortgelijken val van 1866 aan den Anna polder was eene diepte van slechts 17.93 M. beneden A. P. waargenomen.

Zijn groote diepten alzoo niet onmisbaar, evenmin kan men zeggen, dat zij eene afschuiving veroorzaken overal waar zij voorkomen. Een voorbeeld daarvan levert het gedeelte van den oever voor Borssele, waar de boringen 28, 29, 30, 31 en 32 gedaan zijn, en waar eene diepte zelfs van ruim 50 M. beneden A. P. wordt gevonden, zonder dat er afschuivingen voorkomen.

Een ander sterk sprekend voorbeeld is dat van den oever voor Ellewoutsdijk, die vroeger zeer geteisterd werd, maar afschuivingen van eenige beteekenis sedert vele jaren hebben opgehouden zich voor te doen, ofschoon daar vroeger weinig en in den laatsten tijd in het geheel geene verdedigingswerken werden gemaakt, nog in 1860 eene diepte van 36 tot 41 M. onder A. P. stond (zie Verslag van den Raad van oeververdediging bl. 58) en thans nog eene diepte van 32 M. beneden A. P. wordt gevonden, blijkens het profil N^{0}. 2 van Dr. SEELHEIM's verhandeling.

De tegenwoordige rust aan den oever voor Ellewoutsdijk is vooral merkwaardig, indien men met Dr. SEELHEIM (zie de profilen 2 en 6) mag aannemen, dat de geul eene belangrijke dikte diluviaal zand doorsnijdt. Het langzaam verondiepen der geul en het flaauwer worden der glooijngen onder water, door de afwending van den hoofdstroom, moeten dan als verklaring gelden, zoolang boring bij dezen oever geen ander licht verspreidt.

Een *tweede* gevolgtrekking, die men uit de vergelijking van de uitkomst der boringen met het voorkomen van vallen kan maken is deze, dat de kans van afschuiving zeer vergroot schijnt te worden naarmate de laag van diluviaal zand over groote dikten doorsneden en vooral, wanneer zij met den bovenkant hoog gelegen is.

Bij de oevers van de Vliete-, Oud Noordbeveland-, Oostbeveland- en Wilhelminapolders, waar de grootst bekende afschuivingen werden ondervonden, geven de boringen en dieptepeilingen ook de grootste doorsneden dikten der diluviale zandlagen aan, namelijk dikten van 33.50 M., 36.25 M. en 35 M., gepaard met eene hooge ligging van het bovenvlak.

Dit bovenvlak bereikt bij den Vlietepolder bij een der boorpunten zelfs de hoogte van 1.03 M. — A. P. en bij den Oostbeveland polder die van — 3.20.

De afschuivingen bij deze polders hebben den eigenaardigen landwaarts zich verbreedenden en inspringenden vorm, die haar zoo gevaarlijk maakt.

Bij den Stavenissepolder wordt de diluviale zandlaag mede

over aanzienlijke dikte doorsneden, en hebben vooral in vroegere jaren belangrijke oeverafschuivingen plaats gehad; echter vindt men er geene omschreven van zoo grooten omvang als bij de zoo even genoemde polders, hetgeen welligt aan de mindere hoogte van den bovenkant van het diluviale zand, dat niet hooger dan — 6.63 M. is aangetroffen, mag worden toegeschreven. De zorgvuldige onderzeesche verdediging van den oever heeft ongetwijfeld bovendien veel bijgedragen tot het wegblijven der afschuivingen, die in de laatste jaren weinig voorkwamen.

De aanzienlijke dijk- en oeverval van 16 December 1876 aan den Nieuwen Neuzenpolder viel voor ter plaatse, waar boring N⁰. 14 het dikste gedeelte der door de geul geheel doorsneden en met den bovenkant vrij hoog gelegen diluviale zandlaag heeft doen kennen.

De grootste oeverafschuiving, tijdens mijn verblijf in Zeeland, is die van October 1874, bewesten de Noordnol, tusschen de peilraaijen LIV en LXII van den Borssele polder, in de onmiddellijke nabijheid der boringen N⁰. 24 en N⁰. 25 *). Welke diepte de geul bereikt had op het tijdstip dier afschuiving is niet bekend, dewijl voor den breeden vooroever destijds geene peilingen gedaan werden. De afschuiving moet dezelfde geaardheid gehad hebben als eene, die in 1864, in de raaijen LIII en LIV, dus beoosten de eerstgenoemde, is voorgekomen. De laag diluviaal zand bereikt bij den oever voor Borssele niet de diepte, die genoemde laag bij de Vliete-, Oostbeveland-, en andere polders, aan groote afschuivingen onderhevig, bereikt. Daarentegen komt die laag, ter plaatse van de afschuivingen van 1864 en 1874 nagenoeg aan de oppervlakte, en wordt dus in hare beweging door geen bedekking weerhouden, zooals het geval is bij den meer oostwaarts gelegen oever, waar de boringen 28 tot 32 eene bedekking aangeven met 6,50 tot 8 M. dikte. Aan die bedekking, die gedeeltelijk ook uit een veenlaag bestaat,

---

*) Bij deze punten is het diluvium *niet* door een veenlaag gedekt, zoo als foutievelijk in profiel 6 is aangegeven.

is waarschijnlijk de omstandigheid toe te schrijven, dat, als tegenhanger tegenover het westelijk eind. in den oostelijken oever voor Borssele ondanks de steile kanten van $1^1/_2$ à 2 op 1, zoover bekend is, nimmer afschuivingen of vallen hebben plaats gehad. (Prov. verslag uitgebragt in 1876 Hoofdst. XI, bl. 77).

Eene *derde* gevolgtrekking, die aan het zooeven medegedeelde de hand reikt, is deze, dat naarmate de diluviale zandlaag meer bekleed of bedekt is, hare neiging tot het vormen van afschuivingen beter wordt beteugeld en door hulpmiddelen beter kan worden bedwongen.

Tot staving van deze gevolgtrekking levert Zeeland vele voorbeelden op. Na herinnering aan het hierboven aangestipte omtrent den oever van Stavenisse polder, waar de dekkende laag eene dikte van 9 tot 10 M. bereikt, kan o. a. gewezen worden op hetgeen bij den oever van den Bruinisse polder aan het Zijpe wordt waargenomen.

Ofschoon de geul daar eene vrij aanzienlijke diepte heeft, die in de laatste jaren nog schijnt toegenomen, de oever steil staat en er een felle stroom gaat, komen er slechts zelden afschuivingen voor, en zijn deze, althans de laatst bekende, van geen aanzienlijken omvang.

De laag, die op het diluvium rust, heeft eene dikte van 16 tot 21 M., en het verdient opmerking, dat de afschuiving, die na eenigen tijd van rust laatstelijk 30 October 1875 heeft plaats gehad, is gevallen waar de laag diluviaalzand het dikste was, namelijk in den oever tusschen de boringen n⁰. 43 en 44. In den oever daarentegen nabij den »blinden dam", waar volgens het Verslag van den Raad van Oeververdediging, bl. 48, verdediging wenschelijk werd geacht wegens den beduidenden teruggang van 1855 tot 1860, en thans eene diepte van — 26.74 M. gepeild wordt, doch het diluvium volgens boring n⁰. 43 slechts over eene dikte van 6.84 M. wordt doorsneden, en het onder een alluvium-laag van 21 M. bedekt ligt, is mij geen afschuiving bekend.

De achteruitgang, die vooral het Noordelijk gedeelte van dezen polder aan het Zijpe en den Stoofpolder in het laatst

der vorige en het begin van deze eeuw heeft bedreigd, heeft hoogst waarschijnlijk in vele afschuivingen in de bovenste of alluviumlaag bestaan, tengevolge van het toenemend vermogen van het vaarwater.

Vermoedelijk zou hij door doelmatig aangewende verdedigingsmiddelen, waaraan het blijkens de berigten van deskundigen ontbroken heeft, zijn te keeren geweest.

De havendammen voor Terneuzen hebben aan hun voet een diepte van 35 tot 60 M. beneden A. P, en ondervinden geen letsel.

Het verdedigen van de glooijing onder water met steenstorting, de geringe dikte van 5.40 en 13.[illegible]0 M. en de diepe ligging van het diluvium zijn daarbij ongetwijfeld te zamen zeer dienstig.

De aanzanding van den bodem eener afschuiving, waarvan het vermoedelijk uit den val afkomstige zand, dat men aan den voet gewoonlijk kan weervinden, een groot deel vormt, schijnt mede tot beschutting te kunnen dienen. Bij verdere inscharing en afschuiving van den oever ter wederzijde blijft het ten minste langer zitten dan de ongeroerde grond er neven. Een aangrenzende val stuit gewoonlijk af op de in den vroegeren val neergezette aanzanding.

Het schijnt als of het neergezette zand niet meer ten tweedenmale het verschijnsel kan voortbrengen, en eerst moet zijn weggespoeld alvorens voortgaande uitschuring van den grond onder die neerzetting een nieuwen val kan doen ontstaan.

De door den Raad van oeververdediging aanbevolen en thans veelal gevolgde wijze van verdediging van den oever door bekleeding der glooijing ter wederzijde van den val, instede van er binnen, waarin men vroeger heil zocht, komt aan de zooeven genoemde eigenschap van een val te gemoet, ofschoon die aanbeveling uit eene andere overweging voortsproot, dan die om de eigenschap te benuttigen.

De zooeven geuite onderstelling omtrent de beschermende werking van eene bedekking met nedergezette stoffen kan misschien ook als verklaring dienen voor het ophouden van afschuivingen bij diepe geulen, waar eenige verondieping is ingetreden, zoo als bijv. bij den oever voor Ellewoutsdijk.

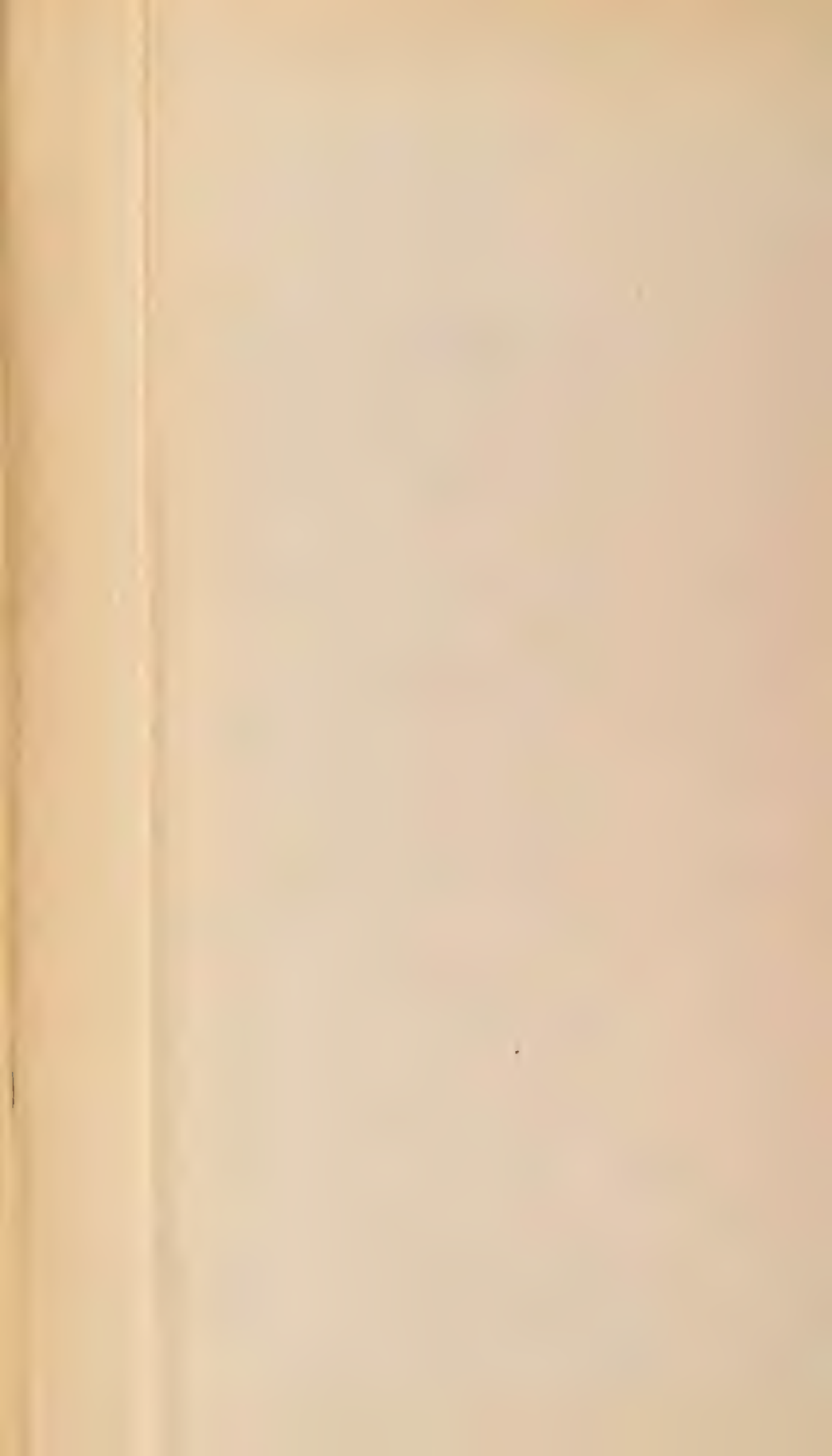
Hoe dit ook zij, aan geen twijfel is het onderhevig dat eene doeltreffend aangebragte kunstmatige zware bekleeding van de aan afschuiving blootstaande grondlagen een behoedmiddel is dat proefondervindelijk gebleken is goed te zijn.

Van het *alluvium*, dat bij de meeste boringen in meerdere of mindere dikte als bovenlaag is gevonden, kan met het oog op afschuivingen weinig worden medegedeeld. Het vertoont niet de bewegelijkheid van het diluvium. Als dekkende laag is het gebleken de omvangrijke afschuivingen in het onderliggende diluviale zand te kunnen tegenhouden of verkleinen, en door zijn zamenstelling voor de verdediging van den oever gemak te kunnen opleveren. Een veen- of derrielaag, zooals bij Borssele is gevonden, schijnt bijzonder gunstig als bekleeding te werken. De afschuivingen, waaraan het alluvium zelf bloot staat, zijn gewoonlijk niet van den vorm, die het gevaar oplevert van de afschuivingen in diluviaalzand. De verdediging daartegen geschiedt met weinig bezwaar.

Of de *tertiaire* grond, die alleen bij de boringen aan de Westerschelde is bereikt (zie de profillen 1, 2, 3, 4, 6 en 7), aan afschuiving meer of minder onderhevig of bevorderlijk is, kan niet op grond van waarneming worden uitgemaakt; het ligt te diep om te kunnen nagaan hoe het in omstandigheden, waarin het diluviale zand zich bevindt, zich gedraagt. Tegen uitschuring door den stroom blijkt deze grondsoort al reeds niet bestand, zoo als de diepte der geul bij Borssele (Profil 1), bij Hoofdplaat polder (boring 1—7), bij den Nieuwen Neuzen polder (boring 13, 14 en 15) en bij Margaretha polder (boring 18 en 19) bewijst.

Vraagt men ten slotte hoe aan een oever, die door geringe diepte en flaauwe glooijing onder schijnbaar gunstige omstandigheden verkeert, eene afschuiving kan voorkomen, dan weet ik daarvan bij gemis aan meer gegevens geen andere verklaring te geven, dan deze dat in de diluviale zandlaag ergens onder water door wegschuring vermoedelijk een gedeelte onder een steil beloop is komen te staan; iets wat

Volgnummer.	Rivier of Zeearm waaraan de oever gelegen is.	Naam van den polder en verdere aanduiding der plaats van den val.	De val heeft plaats gehad: Jaar, dag en uur.	Bij een waterstand betrekkelijk A.P. M	H.W. M	L.W. M	Uitgebreidheid in HA. van den weggevallen grond.	Dagteekening der laatste peiling vóór den val.	Grootste diepte bij de laatste peiling vóór den val aangetroffen. Beneden L.W. M	Bij een afstand uit de L.W. lijn. M	Diepte op dat punt gevonden na den val beneden L.W. M	Grootste verschil in diepte voor en na den val. Diepte betrekkelijk L.W. vóór den val. M	na den val. M	Verschil. M	Op een afstand uit den oever. M	Inhoud van de weggevallen massa in M³.	Afstand van het meest nabij gelegen punt, waarin geboord is. M	Nummer der boring.	Ligging van het diluvium betrekkelijk A.P. met den bovenkant. M	onderkant. M
1	BROUWERSHAVEN-SCHE GAT	**Schouwen.** Ossenhoofd.	4—18 Maart 1867 (springtij 8 en 22 Maart 0.99 en 0.98)				0.004	Febr. 1866	24	57	20.6	— 2.7	— 10.9	8.2	30 na den val	7200				
2		**Schouwen.** Kloosternol.	27 Maart 1868 (springtij 26 Maart 0.94)				0.07	Maart 1867	38.8	180	27.7	— 4.7	— 21.3	16.6	62 na den val	58000				
3	ZIJPE	**Bruinisse.** Tusschen de raaijen XXIV en XXV.	19 Julij 1854				0.10	Maart 1854	25.6	85	23.6	— 0.8	— 12.6	11.8	27 na den val	15000	25	44	— 13.80	dieper dan — 32.80
4		**Bruinisse.** Bij peilraai XXV tusschen de dijkp. 60 en 61.	30 October 1875 (31 Oct. springtij 0.83)	— 0.04	— 1.50	+ 1.50	0.25	April 1875	29	145	28.6	— 1.3	— 13.5	12.2	5 uit de oude LW. lijn	9000	80 van 43 70 „ 44	43 en 44	— 15.80 — 13.80	„ „ — 37.80 „ „ — 32.80
5	HET KEETEN.	**Stavenisse.** Westhavennol.	21 October 1860				0.02	Febr. 1860	38.4	170	38.1	— 0.9	— 11	10.1	20 na den val	18000	25	39	— 7.63	„ „ — 42.63
6		**Stavenisse.** Aan de Westhavennol tusschen de peilraaijen XXV en XXVII.	28 Julij 1871				0.39	Maart 1871	39.5	180	35.3	0	— 9.7	9.7	Op de oude L.W. lijn	15200	30 voor dijkp. 62	39	— 7.63	„ „ — 44.63
7		**Stavenisse.** Oostnol.	19 Junij 1872				0.2	Mei 1872	45.5	170	43.8	— 0.3	— 15.4	15.1	33 na den val	70000	350	39	— 7.63	„ „ — 44.63
8	OOSTER SCHELDE	**Burgh en Westland.** Bij peilraai XXIII.	1878 of 1879				0.1	Febr. 1878	14.7	57	14	— 1.1	— 8.5	7.4	22	4275				
9		**Schouwen.** District **Flaauwers** tusschen de peilraaijen LVII en LIX of de dijkp. 36 en 37.	8 Mei 1876 (7 Mei springtij 1.04)	— 2.05	— 3.40	— 0.40	0.33	Febr. 1876	29.1	110	34.1	0	— 10	10	Op de oude L.W. lijn	18000				
10		**Schouwen.** District **Flaauwers** tusschen de peilraaijen LV en LVII of de dijkp. 35 en 36.	10 Augustus 1876 (7 Aug. springtij 0.78)	— 1.35	— 2.90	+ 0.10	0.40	6 Aug. 1876	35.8	120	34.4	— 1.70	— 18.6	16.9	10 uit de oude L.W. lijn	32000				
11		**Schouwen.** District **Flaauwers** tusschen de peilraaijen XLII en XLIII of de dijkp. 28 en 29.	2 Maart 1877 (1 Maart springtij 1.12)				0.30	20 October 1876	29.5	132	28.4	— 1.1	— 8.6	7.5	5 uit de oude L.W. lijn	9300				
12		**Schouwen.** District de **Zuidhoek** aan den Plaatdijk.	Julij 1879				0.25	April 1879	32.6	95	34.6	— 2.4	— 14.6	12.2	20	7600				
13		**Vier bannen van Duiveland.** Kop van den Zuidbout, Zuidzijde.	3 Februarij 1881 (1 Febr. springtij 1.08)				0.083	Maart 1881	21.5	60	24.40	— 10	— 19.2	9.2	25	115000				
14		**Scherpenisse.** Oostnol.	2 December 1861	— 1.76	— 3.20	+ 0.30	0.3	Februarij 1861	26	130	25.7	— 0	— 12	12	20 na den val	55000				



Volgnummer.	Rivier of Zeearm waaraan de oever gelegen is.	Naam van den polder en verdere aanduiding der plaats van den val.	De val heeft plaats gehad				Uitgebreidheid in HA. van den weggevallen grond.	Dagteekening der laatste peiling vóór den val.	Grootste diepte bij de laatste peiling vóór den val aangetroffen.		Diepte op dat punt gevonden na den val beneden L.W.	Grootste verschil in diepte voor en na den val.				Inhoud van de weggevallen massa in M³.	Afstand van het meest nabij gelegen punt, waarin geboord is.	Nummer der boring.	Ligging van het diluvium betrekkelijk A.P. met den	
			Jaar, dag en uur.	Bij een waterstand betrekkelijk					Beneden L.W.	Bij een afstand uit de L.W. lijn.		Diepte betrekkelijk L.W.		Verschil.	Op een afstand uit den oever.				bovenkant.	onderkant.
				A.P.	H.W.	L.W.						vóór den val.	na den val.							
				M	M	M			M	M	M	M	M	M	M		M		M	M
28	ROOMPOT.	**Anna Friso polder**. Tusschen de peilraaijen IX en XI.	11 Maart 1879 8u 10′ 's morgens.	— 0.82	— 2.15	+ 0.60	0.16 in den oever boven LW.	13 Febr. 1879	21.3	135	18.9	— 0.80	— 10.1	9.3	60 uit HR. 125 dijkskruin.	48400	200 M. beoosten het boorpunt	Ongenummerd voor Anna Friso-polder.	— 4.58	dieper dan — 38.58
29		**Anna Friso polder**. Tusschen de peilraaijen XIa en XIII.	Tusschen November 1880 en Februarij 1881.				0.50	November 1880	30.2	335		— 4.9	— 11.2	6.3	260	25000	500 M. beoosten het boorpunt	Ongenummerd voor Anna Friso-polder	— 4.58	„ „ — 38.58
30		**Sophia polder**. Tusschen de peilraaijen VII en IX.	10 Maart 1880.	1.88	3.30	0.30	0.78 in den Vooroever = LW.	14 Julij 1879	27.9	310	26.6	0	— 8.9	8.9	280 uit de dijkskruin	46800	1450 M. beoosten het boorpunt voor Anna Frisopolder.	Ongenummerd voor Anna Friso-polder	— 4.58	„ „ — 38.58
31		**Sophia polder**. Tusschen de peilraaijen Ia en Va.	5 Januarij 1881 (2 Januarij springtij 1.01).				7.60	Maart 1880	23.4	260		— 1.0	— 14.9	13.9	160	616000	800 Id.	Id.	4.58	„ „ — 38.58
32		**Thoorn polder**. Tusschen de peilraaijen V en X.	25 November 1877 (22 Nov. springtij 0.84).				6.10	24 en 25 October 1877	38.1	255	25.8	— 0.6	— 17.9	17.3	155	530000	400 bewesten het boorpunt	33	— 4.08	„ „ — 37.58
33		**Vliete polder**. Tusschen de peilraaijen XI en XX. (J. P. Neijt, Kon. Inst. v. Ing. Verb. 1865/66).	Tusschen 9 en 10 Maart 1864 (10 Maart springtij 1.14).				Voorland binnen de lijn van LW. 4.50	Voorjaar 1863	35	260		0	— 13.90	13.90	0	minstens 315000 alleen binnen de lijn van LW.	70 M. bewesten het boorpunt.	34	— 7.98	„ „ — 35.08
34		**Nieuw Noord Beveland**. Tusschen de peilraaijen XIV en XVI.	27 Januarij 1875 (23 Januarij springtij 0.87).	— 2.32	— 3.65	— 0.85	1.80	2 Febr. 1874	22.80	95	23.80	— 0.30	— 14.70	14.40	35	137880	Ongev. 1550 M. beoosten het boorpunt.	35	— 1.03	„ „ — 37.28
35		**Nieuw Noord Beveland**. Tusschen XVI en XVIII.	Tusschen 5 Februarij en 17 September 1875.				1.43	5 Febr. 1875	16.20	75	19	— 0.30	— 16.70	16.40	55	124410	Ongev. 1750 M. beoosten het boorpunt.	35	— 1.03	„ „ — 37.28
36		**Oud Noord Beveland**. In de peilraaijen III en IV.	8 Februarij 1875 (8 Februarij springtij 0.92).	— 1.91	— 3.25	— 0.44	1.0	4 Febr. 1874	22.40	80	22.70	— 3.50	— 14.60	11.10	40	26500	Ongev. 2300 M. beoosten het boorpunt.	35	— 1.03	„ „ — 37.28
37		**Oud Noord Beveland**. In de peilraaijen IX, X en XI tusschen de dijkpalen 8 en 10 vóór de Noordhoeksnol.	Tusschen 3 en 5 Januarij 1877 (2 Januarij springtij).				0.50	2/3 Febr. 1876	28.9	205	29.6	0	— 9.3	9.3	Binnen en op de LW.	Vermoedelijk 20000	2650 beoosten het boorpunt.	35	— 1.03	„ „ — 37.28
38		**Oud Noord Beveland**. Tusschen de dijkpalen 2 en 5.	11 Augustus 1881 7 uur 's morgens (11 Aug. springtij 1.01).	— 0.67	— 2.01	+ 0.80	3.50 waarvan 2.33 binnen de LW lijn.	Laatste helft van Febr. 1881	43.2 Peilraai XXI	170	36	— 0.2	— 19.2	19	55 M. uit de oude dijkskruin.	450000	2000 beoosten het boorpunt.	35	— 1.03	„ „ — 37.28
39	VEERGAT.	**Onrustpolder en voor den Kamperlandschen Veerdam**.	4 October 1879 9u 15′ 's morgens.	— 1.18	— 2.63	+ 0.25	0.15	19 Julij 1879	11.80	150		0	— 3.70	3.70	530	3500	Ongev. 2600 M. benoorden.	Ongenummerd boorpunt bij Veer.	— 8.42	„ „ — 19.67
40			30/31 Januarij 1881 (1 Febr. springtij 1.08).				0.15	24 Sept. 1880	8.8	110	9.5	— 1.4	— 8.9	7.5	500	4000	Id.	Id.	— 8.42	„ „ — 19.67



Volgnummer.	Rivier of Zeearm waaraan de oever gelegen is.	Naam van den polder en verdere aanduiding der plaats van den val.	De val heeft plaats gehad: Jaar, dag en uur.	De val heeft plaats gehad: Bij een waterstand betrekkelijk A.P. M	H.W. M	L.W. M	Uitgebreidheid in HA. van den weggevallen grond.	Dagteekening der laatste peiling vóór den val.	Grootste diepte bij de laatste peiling vóór den val aangetroffen: Beneden L.W. M	Bij een afstand uit de L.W. lijn. M	Diepte op dat punt gevonden na den val beneden L.W. M	Grootste verschil in diepte voor en na den val: Diepte betrekkelijk L.W. vóór den val. M	na den val. M	Verschil. M	Op een afstand uit den oever. M	Inhoud van de weggevallen massa in M³.	Afstand van het meest nabij gelegen punt, waarin geboord is. M	Nummer der boring.	Ligging van het diluvium betrekkelijk A.P. met den bovenkant. M	onderkant. M
57	WESTER SCHELDE.	**Ellewoutsdijk.** Tusschen de peilraaijen III en VI beoosten de haven aldaar.	13 Julij 1877 (12 Julij springtij 0.92)				0.75	Februarij en Maart 1862 in peilraai III en IV en Maart 1877 in peilraai V en VI	10.4	65	5.8	0	— 2.9	2.9	10	7500	Ongev. 5000 M. beoosten boorpunt	32	— 4.85	— 19.85
57ª		**Ellewoutsdijk.** Tusschen de peilraaijen VI en VII bewesten de haven.	19 Junij 1881				0.16 binnen den laagwaterrand	Maart en April 1881				0	— 3.8	3.8	0	Onbekend				
58		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 29 M beoosten peilraai II tot 87 M bewesten peilraai I HR AA lang 166 M.	13 April 1873 (14 April springtij 0.91)				0.4375	Maart 1873	21.60	165	20.8	0	— 7.50	7.50	70	14800	30 bewesten	13	— 2.91	-- 24.91
59		**Nieuwe Neuzen polder.** Tusschen peilraai XXV en XXVII HR CD of van 22 M beoosten peilraai XXV tot 20 M beoosten peilraai XXVII lang 67 M.	8 Augustus 1873 (10 Aug. springtij 1.00)				0.1150	April 1873	16.2	60	16	0	— 11.10	11.10	200	6000	400 beoosten	15	— 4.21	— 24.21
60		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 14 M beoosten peilraai III, HR AA tot 81 M bewesten peilraai III, HR EF lang 285 M.	14 Mei 1875 (7 Mei springtij 1.04)				0.8550	Februarij 1875	20.10	90	14.90	— 0.2	— 11.4	11.2	30	oever 39575 dijk 3400 zamen 42975	30 beoosten	13	— 2.91	— 24.91
61		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 30 M bewesten peilraai XXIV tot 25 M beoosten peilraai XXV HR CD lang 110 M.	23 Augustus 1875 (19 Aug. springtij 0.89)				0.1765	Februarij 1875	21	80	19	0	— 11.30	11.30	210	5975	300 beoosten	15	-- 4.21	— 24.21
62		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 15 M bewesten peilraai XXVII HR CD tot 75 M beoosten die peilraai lang 90 M.	25 Junij 1876 (23 Junij springtij 0.91)				0.2400	Februarij 1876	23.90	75	23.30	— 0.1	— 14.	13.9	330	12750	480 beoosten	15	— 4.21	— 24.21
63		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 20 M beoosten peilraai XI van HR AA tot 39 M beoosten peilraai V HR AB, lang 455 M.	15 December 1876 (17 Dec. springtij 0.71)				2.5575	Februarij 1876	19.70	95	15.50	0	— 15.2	15.2	115	oever 25575 dijk 15000 zamen 40575	30 bewesten	14	— 3.21	— 30.71
64		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 10 M beoosten peilraai VI tot 40 M beoosten peilraai VII HR EF lang 120 M.	2 Februarij 1877 (31 Jan. springtij 1.04)				0.3500	Januarij 1876	16.90	140	15.60	0	— 7.2	7.2	155	11400	250 bewesten	13	— 2.91	— 24.91
65		**Nieuwe Neuzen polder.** Van peilraai III tot VII HR EF.	8 Julij 1879 (5 Julij springtij 0.89)				1.6500	Maart 1879	22	180	18.5	— 1.6	— 13.9	123	115 uit dijkteen	110000	250 bewesten	13	— 2.91	— 24.91
66		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 7 M bewesten tot 37 M beoosten peilraai VI HR EF.	15 September 1879 (18 Sept. springtij 1.09)				0.1000	Augustus 1879	6.7	85	6.9	0	— 2.20	— 2.20	70 idem	1000	320 bewesten	13	2.91	— 24.91
67		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 12 M beoosten peilraai XIV tot 3 M bewesten peilraai XVI HR EF.	18 September 1879 (18 Sept. springtij 1.09)				0.7500	Julij 1879	17.3	205	18	0	— 7	7	385 idem	27500	830 bewesten	13	— 2.91	— 24.91



Volgnummer	Rivier of Zeearm waaraan de oever gelegen is.	Naam van den polder en verdere aanduiding der plaats van den val.	De val heeft plaats gehad				Uitgebreidheid in H.A. van den weggevallen grond.	Dagteekening der laatste peiling vóór den val.	Grootste diepte bij de laatste peiling vóór den val aangetroffen.		Diepte op dat punt gevonden na den val beneden L.W.	Grootste verschil in diepte voor en na den val				Inhoud van de weggevallen massa in M³.	Afstand van het meest nabij gelegen punt, waarin geboord is.	Nummer der boring.	Ligging van het diluvium betrekkelijk A. P. met den	
			Jaar, dag en uur.	Bij een waterstand betrekkelijk					Beneden L.W.	Bij een afstand uit de L.W. lijn.		Diepte betrekkelijk L.W.		Verschil.	Op een afstand uit den oever.				bovenkant.	onderkant.
				A.P.	H.W.	L.W.						vóór den val.	na den val.							
				M	M	M			M	M	M	M	M	M	M		M		M	M
68	WESTER SCHELDE.	**Nieuwe Neuzen polder.** Van 27.50 M bewesten peilraai XXVI HR CD tot 6 M bewesten peilraai II HR AB.	16 October 1879 (17 Oct. springtij 1.09)				1.6000	23 Junij 1879	26.9	180	25.8	— 0.1	— 15.4	15.5	256 uit dijkteen	138000	535 bewesten	13	— 2.91	— 24.91
69		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 12 M bewesten tot 25 M beoosten peilraai X HR EF.	20 November 1879 1 uur 's morgens (16 Nov. springtij 1.02)	— 2.60	— 4.52	— 0.60	0.0800	Julij 1879	17.8	180	18.8	0	— 2.5	2.5	213 idem	1000	540 idem	13	— 2.91	— 24.91
70		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 19 M beoosten peilraai XVII tot 26 M bewesten peilraai XVIII HR EF.	12 Maart 1880 (13 Maart springtij 0.97)				0.1200	Julij 1879	17.6	230	17.4	— 0.30	— 7.50	7.2	478 idem	72000	990 idem	13	— 2.91	— 24.91
71		**Nieuwe Neuzen polder** Van peilraai IX tot 25 M bewesten peilraai XI HR EF.	5 Junij 1880 (9 Junij springtij 0.71)				0.8500	Februarij 1880	18.8	150	16.6	0	— 8.40	8.40	235 idem	92000	570 idem	13	— 2.91	— 24.91
72		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 33 M beoosten peilraai XII tot 24 M beoosten peilraai XIV HR EF.	24 Julij 1880 (23 Julij springtij 1.00)	— 1.65	— 3.57	0.35	0.7000	9 Junij 1880	19.1	195	18.8	0	— 8.60	8.60	295 idem	45000	670 idem	13	— 2.91	— 24.91
73		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 24 M beoosten peilraai XIV tot 12 M beoosten peilraai XV HR EF.	25 Julij 1880 (23 Julij springtij 1.00)				0.2200	2 April 1880	17.4	180	17.1	0	— 5	5	333 idem	15000	770 idem	13	— 2.91	— 24.91
74		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 23.5 M beoosten peilraai XXIV tot 33.5 M beoosten peilraai XXV HR CD.	27 September 1880				0.0900	Augustus 1880	24.6	135	25.7	0	— 10.3	10.3	182 idem	33000	390 beoosten	15	— 4.21	— 24.21
75		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 1 M tot 31 M bewesten peilraai XI HR EF.	5 Januarij 1881 11 u. v. m. (2 Jan. springtij 1.01)	— 2.22	— 4.14	— 0.22	0.1500	2 Aug. 1880	15.1	190	18	0	— 4.70	4.70	225 idem	3000	600 bewesten	13	— 2.91	— 24.91
76	BRAKMAN.	**Nieuwe Neuzen polder.** Van 25 M bezuiden peilraai XXIV tot 48 M benoorden peilraai XXIV.	17 Julij 1877		omstreeks HW		0.1975	April 1877	15	65	15	0	— 6.4	6.4	21 idem	10000	1500 idem	13	— 2.91	— 24.91
77		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 23 M bezuiden peilraai XXVI tot 24 M benoorden peilraai XXVI.	11 November 1877 vermoedelijk 1 uur 's morgens			omstreeks 1 uur na LW	0.1075	September 1877	15.6	55	10.9	— 0.5	— 8.9	8.4	37 idem	6000	1400 idem	13	— 2.91	— 24.91
78		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 7 M bezuiden peilraai XXX tot 7 M bezuiden peilraai XXXI.	31 Augustus 1878 (30 Aug. springtij 1.11)				0.0684	Maart 1878	13.8	75	13	0	— 4.3	4.3	70 idem	1400	1300 idem	13	— 2.91	— 24.91
79		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 3 M benoorden peilraai XXXI tot 1 M benoorden peilraai XXXIII.	3 Maart 1880 (28 Febr. springtij 1.00)				0.3000	Februarij 1880	14.2	70	9.70	0	— 4.70	4.70	135 idem	8500	1115 idem	13	— 2.91	— 24.91



Volgnummer.	Rivier of Zeearm waaraan de oever gelegen is.	Naam van den polder en verdere aanduiding der plaats van den val.	De val heeft plaats gehad: Jaar, dag en uur.	De val heeft plaats gehad: Bij een waterstand betrekkelijk A.P. M	H.W. M	L.W. M	Uitgebreidheid in HA. van den weggevallen grond.	Dagteekening der laatste peiling vóór den val.	Grootste diepte bij de laatste peiling vóór den val aangetroffen: Beneden L.W. M	Bij een afstand uit de L.W. lijn. M	Diepte op dat punt gevonden na den val beneden L.W. M	Grootste verschil in diepte voor en na den val: Diepte betrekkelijk L.W. vóór den val. M	na den val. M	Verschil. M	Op een afstand uit den oever. M	Inhoud van de weggevallen massa in M³.	Afstand van het meest nabij gelegen punt, waarin geboord is. M	Nummer der boring.	Ligging van het diluvium betrekkelijk A.P. met den bovenkant. M	onderkant. M
80	BRAKMAN.	**Nieuwe Neuzen polder.** Van 20 M benoorden peilraai XXIX tot 36 M benoorden peilraai XXX HR PQ.	25 Junij 1880 (24 Junij springtij 0.96)				0.4800	19 Mei 1880	15.4	95	13.9	— 0.8	— 6.8	6	36 uit dijkteen	20000 oever en 100 dijk	1100 bewesten	13	— 2.91	— 24.91
81		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 6 M bezuiden peilraai XXXIII tot 15 M benoorden XXXIV.	5 Januarij 1881 (2 Jan. springtij 1.01)				0.1800	6 Maart 1880	13.2	105	13	0	— 5	5	205 idem	5000	1115 idem	13	— 2.91	— 24.91
82		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 17 M bezuiden peilraai XXXI tot 12 M benoorden peilraai XXXII.	22 Februarij 1881				0.1700	December 1880	14.9	125	15.7	0.2	— 5.2	5.40	98 idem	5000	1100 idem	13	— 2.91	— 24.91
82ª		**Nieuwe Neuzen polder.** Van 23 M benoorden peilraai XXXI tot 18 M benoorden peilraai XXXIII. (De val is 95 M lang).	22 December 1881				0.2400	Augustus 1881	13.8	100	12.4	— 0.1	— 5.3	5.20	129 uit de dijkskruin	7000	1100 idem	13	— 2.91	— 24.91
83	WESTER SCHELDE.	**Margaretha polder.** Tusschen de peilraaijen Iᵇ en Iᶜ ongeveer 200 en 300 M bewesten peilraai I.	20 Februarij 1879 (23 Febr. springtij 0.90)				0.0930									2046	800 idem	18	— 1.92	— 25 88
84		**Kleine Huissens polder.** Tusschen de dijkp. 14 en 16 of tusschen de peilraaijen XVIII en XX.	1 Maart 1873 (1 Maart springtij 1.12)				0.2100	Maart 1872	18.50	170		0	— 8.20	8.20	52	840	100 beoosten	21	— 2.38	— 24.38
85		**Kleine Huissens polder.** Tusschen de dijkp. 13 en 15 of tusschen de peilraaijen XVII en XIX.	30 Maart 1873 (30 Maart springtij 1.12)				0.2300	Maart 1873	16.80	105	13	0	— 7.20	7.20	25	1035	0	21	— 2.38	— 24.38
86		**Eendragt polder.** Tusschen de dijkp. 0 en 2 of tusschen de peilraaijen XX van Klein Huissens en XI van Eendragt polder.	21 Augustus 1872 10 uur 's morgens (20 Aug. springtij 1.05)				0.6665	Februarij 1872	20.20	200		0	— 6.90	6.90	55	2000	150 beoosten	22	— 2.68	— 21.88
87		**Eendragt polder.** Tusschen de dijkpalen 8 en 11 of tusschen de peilraaijen XVI en XIX.	14 November 1872 (17 Nov. springtij 0.89)				0.5635	Februarij 1872	19.90	240		0	— 9.10	9.10	95	1980	0	23	— 2.08	— 21.18
88		**Eendragt polder.** Tusschen de dijkp. 8 en 9 of tusschen de peilraaijen XIV en XVII.	21 Maart 1875 (24 Maart springtij 0.91)				0.1086	Februarij 1875	23.50	220	20.30	0	— 9.40	9.40	103	485	60 bewesten	23	— 2.08	— 21.18
89		**Eendragt polder.** Tusschen de dijkp. 6 en 8 of tusschen de peilraaijen XI en XV.	27 Februarij 1876 (27 Febr. springtij 0.93)				1.4278	Februarij 1876	22.50	220		0	— 10	10	70	9825	200 idem	23	— 2.08	— 21.18
90		**Eendragt polder.** Tusschen de dijkpalen 24 en 33.	April 1878				9.6250					boven LW	— 15		800	1058750	1800 beoosten	23	— 2.08	— 21.18

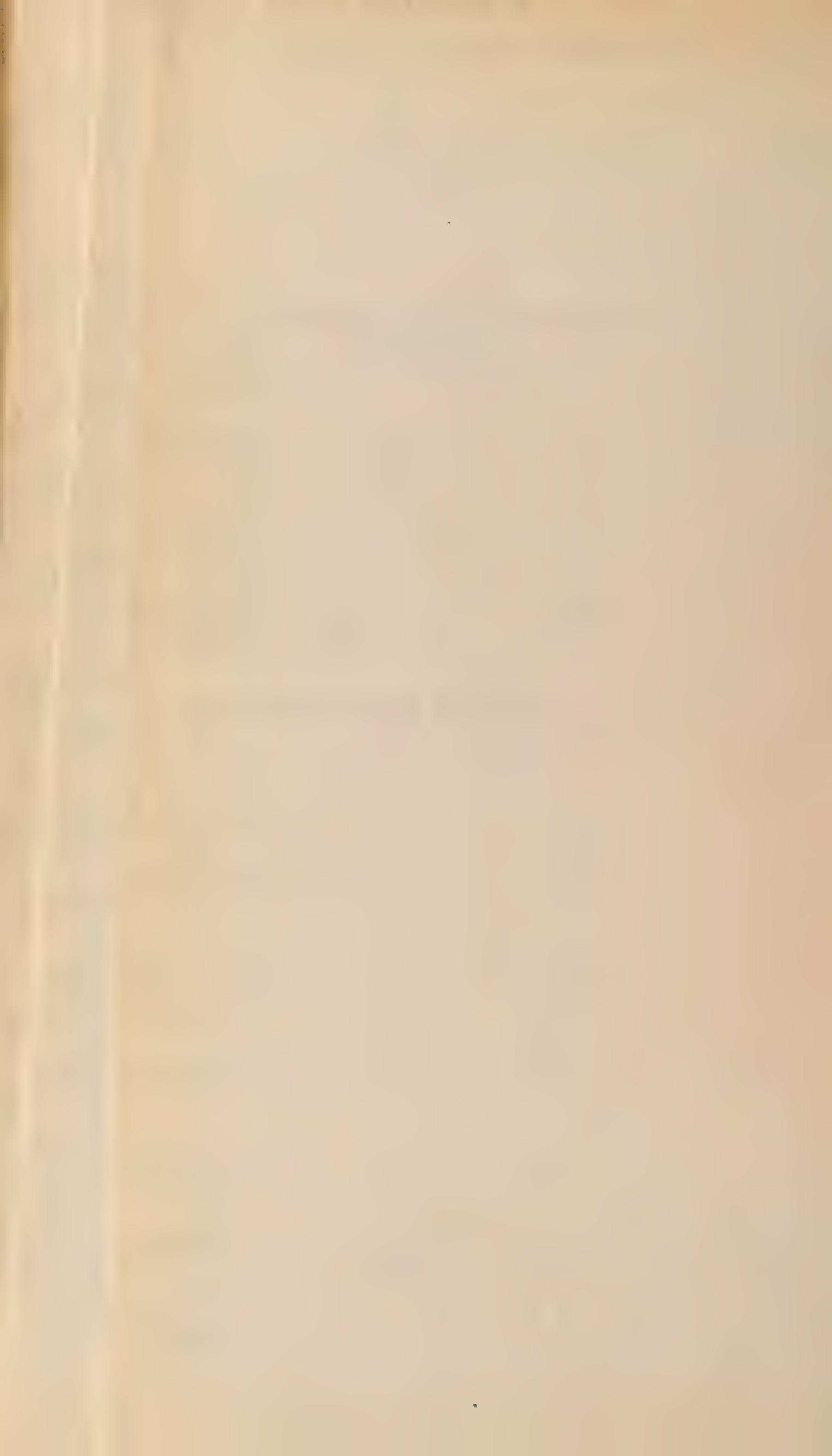


Bijlage II.

N°.	PLAATS.	Nummer van het profil.	Nummer van de boring.	De grondlagen boven het diluvium hebben eene gezamenlijke dikte van	DILUVIUM. Bovenkant betrekkelijk A.P.	DILUVIUM. Onderkant betrekkelijk A.P. bevonden op	DILUVIUM. Onderkant betrekkelijk A.P. ligt dieper dan	DILUVIUM. Dikte bevonden	DILUVIUM. Dikte meer dan	Hoogte betrekkelijk A.P. van H. W.	Hoogte betrekkelijk A.P. van L. W.	Diepte van het stroombed betrekkelijk A P.	Het stroombed doorsnijdt het diluvium volgens de boring over eene hoogte van	Diepte, waartoe het diluvium beneden het stroombed reikt.	BELANGRIJKHEID DER OEVERAFSCHUIVINGEN.
	ZIJPE.			M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	
1	**Bruinisse polder**	1	41	21	— 19.9		— 33.90		14	+ 1.33	— 1.54	— 26.74	6.84	7.16	Bij dezen polder werd vroeger niet de groote diepte gevonden, die nu wordt aangetroffen. Slechts in eene peilraai, tusschen de boorpunten 42 en 43 werd eene diepte van 30 M., overal elders eene geringere diepte gevonden. (Verslag Raad van oeververdediging, Bijlage D 19.) Belangrijke afschuivingen kwamen o. a. voor: 11 Junij 1838 tusschen de boorpunten 44 en 45; 19 Julij 1854 bij het boorpunt 44; 30 October 1875 tusschen de boorpunten 43 en 44. De omvang dezer afschuivingen, althans van de laatstgenoemde, was op verre na niet zoo aanzienlijk als van die aan de Ooster en Wester Schelde. De afneming der oevers voor den Bruinisse polder is waarschijnlijk toe te schrijven aan de belangrijke verdieping van het vaarwater het Zijpe, dat in 1575 nog door eene bende Spanjaarden van Philipsland naar Duiveland doorwaad werd.
			42	16	— 13.70		— 37.70		24	+ 1.33	— 1.54	— 29.24	13.54	8.46	
			43	18	— 15.80		— 37.80		22	+ 1.33	— 1.54	— 36.44	20.64	0.36	
			44	16	— 13.80		— 32.80		19	+ 1.33	— 1.54	— 29 54	15.72	3.26	
			45	18	— 16.20		— 33.20		17	+ 1.33	— 1.54	— 31.34	15.14	1.86	
	KEETEN.														
2	**Stavenisse polder**	1	38	10	— 7.63		— 37.63		30	+ 1.36	— 1.59	— 28.20	20.57	minstens 9.43	Belangrijke afschuivingen hadden plaats in de nabijheid van boring 39 den 9 Augustus 1854; 〃 21 October 1860; 〃 28 Julij 1871; en aan den oever, waarin de boring 40 gedaan is, den 23 April 1842; 〃 8 Januarij 1849; en 〃 19 Junij 1872. De diepte van den onderzeeschen oever voor boring N°. 40 vertoont veel afwisseling. In 1879 bereikte zij het maximum van 46.79 M. beneden AP; in 1880 eene van — 38.09. Dit verschil doet eene oeverafschuiving onder water vermoeden.
			39	10	— 7.63		— 42.63		35			— 40.19	32.56	〃 2.44	
			40	9	— 6.63	— 44.63		38				— 46.49	38.	—	
	ROOMPOT.														
3	**Anna Friso polder**			7.50	— 4.58		— 38.58		34	+ 1.33	— 1.42	— 28.02 Grootste diepte op 900 M. uit het boorpunt — 34.62	23.44	10.56	De boring in den buitenberm van den zeedijk is te laat geschied om in het Verslag van Dr. Seelheim te worden opgenomen. De uitkomst van zijn onderzoek is te vinden in het Jaarverslag over den toestand der Provincie Zeeland, uitgebragt in 1880. Hoofdst. V, bl, 60. Voor den Sophia polder in de nabijheid van den Anna Friso polder had 5 Januarij 1881 eene aanzienlijke afschuiving plaats, met uitbreiding in de breedte landwaarts.



N°.	PLAATS.	Nummer van het profil.	Nummer van de boring.	De grondlagen boven het diluvium hebben eene gezamenlijke dikte van	DILUVIUM. Bovenkant betrekkelijk A.P.	DILUVIUM. Onderkant betrekkelijk A.P. bevonden op	DILUVIUM. Onderkant betrekkelijk A.P. ligt dieper dan	DILUVIUM. Dikte bevonden	DILUVIUM. Dikte meer dan	Hoogte betrekkelijk A.P. van H. W.	Hoogte betrekkelijk A.P. van L. W.	Diepte van het stroombed betrekkelijk A.P.	Het stroombed doorsnijdt het dulivium volgens de boring over eene hoogte van	Diepte, waartoe het diluvium beneden het stroombed reikt.	BELANGRIJKHEID DER OEVERAFSCHUIVINGEN.
	ROOMPOT.			M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	
			33	6.50	— 4.08		— 37.58		33 50	+ 1.33	— 1.42	— 39.42	minstens 33.50		Bij boring 34 schijnt het diluvium uitgeschuurd door eene kreek of geul, vermoedelijk een zijtak van het voormalige Faal, of de voormalige Wijtvliet. Zeer belangrijke afschuivingen van den eigenaardigen landwaarts zich uitbreidenden vorm kwamen aan dezen polder voor. 27 October 1833 viel er eene tot tegen den dijk, die het volgend jaar (18 Oct. 1834) inbrak. 19 Februarij 1839 (zie notulen Kon. Inst. van Ing. van 11 Nov. 1879, Plaat V). 8 Februarij 1863 (idem). 10 Maart 1864, waarbij met 130 M. voorland de dijkvoet werd bereikt (zie Verhandeling Kon. Inst. van Ing. 1865/66, Plaat III.) 11 April 1868 (zie notulen Kon. Inst. van Ing. van 11 Nov. 1879, Plaat V). Westwaarts, voor den Thoorn polder, deden zich soortgelijke afschuivingen voor: 9 Februarij 1870 en 23 November 1877 } zie notulen Kon. Inst. van Ing. van 11 Nov. 1879, Plaat V. De Raad van oeververdediging spreekt van eene grootste diepte van 25 M. beneden L.W. voor den Vliete polder in 1860 (§ 44 van het Verslag). Waarschijnlijk peilde men toen nog niet ver genoeg buitenwaarts. De geringe blootkomende hoogte van het diluvium bij zoodanige diepte schijnt anders moeijelijk vereenigbaar met de ontzettende afschuivingen, die aan dit riviervak toen reeds voorkwamen.
4	**Vliete polder**	5	34	10.90	— 7.98		— 35.08		27.10	+ 1.33	— 1.42	— 41.82	〃 27.10		
			35	3.75	— 1.03		— 37.28		36.25	+ 1.33	— 1.42	— 25.32	24.29	minstens 11.96	
5	**Oud Noord Beveland polder**		35	3.75	— 1.03		— 37.28		36.25	+ 1.34	— 1.47	— 44.67	minstens 36.25	minstens 36.25	Bij gemis aan boring is de uitkomst van de naastbij gedane boring voor Vliete polder ingeschreven. Na de oeverafschuivingen, die vóór 1829 dezen polder bedreigden, heeft er zich geene voorgedaan dan onlangs, 11 Augustus 1881, toen het overblijfsel van de uitstekende punt, genaamd Galgenol of Glasjesnol, overblijfsel van den zeedijk van 1598, benevens een gedeelte van den nog waterkeerenden zeedijk, van denzelfden tijd, werden verzwolgen door eene afschuiving, die den meer vermelden vorm vertoonde. (Zie Notulen Kon. Inst. van Ing. van 8 November 1881. Pl. I.)



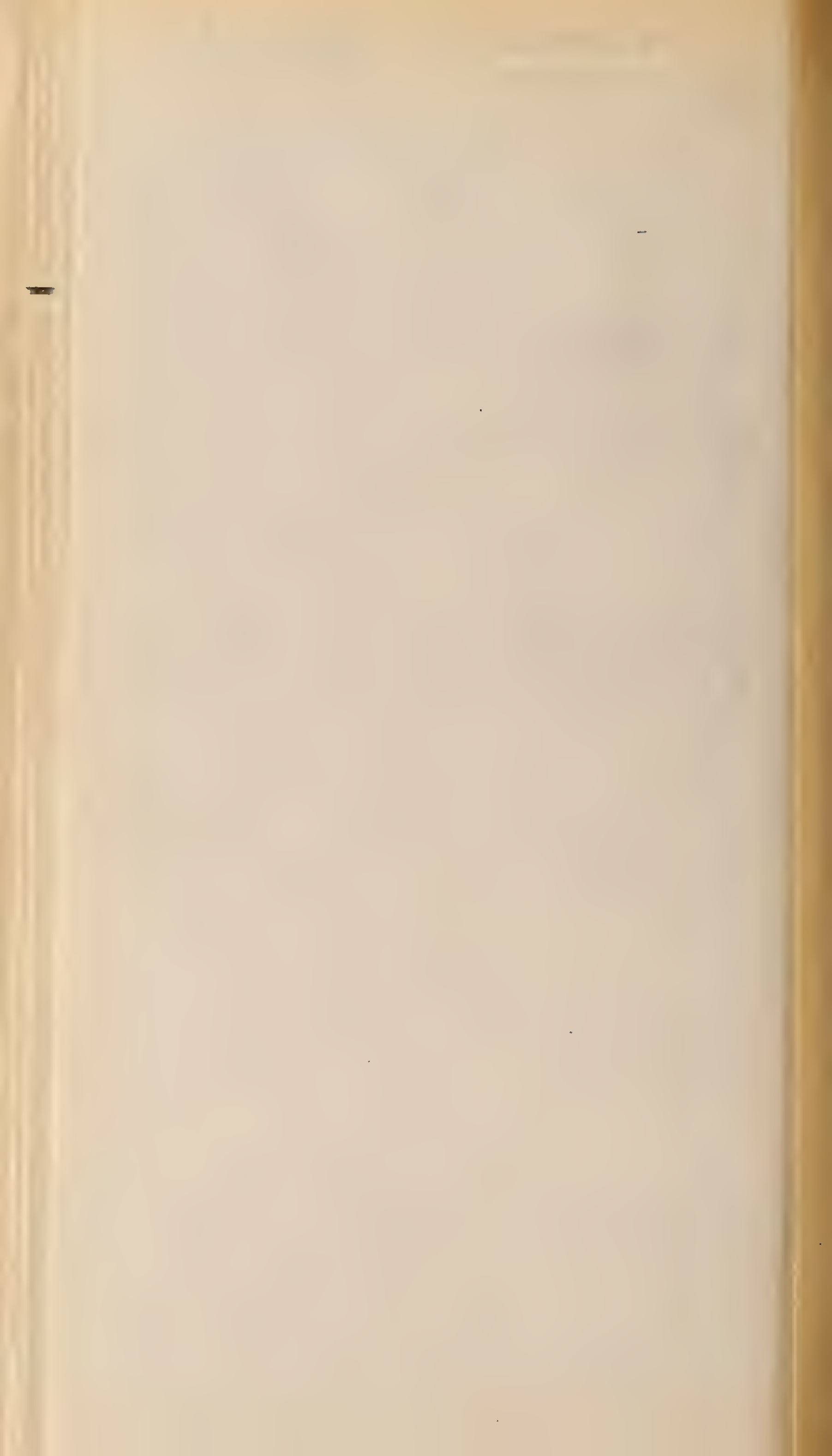
N⁰.	PLAATS.	Nummer van het profil.	Nummer van de boring.	De grondlagen boven het diluvium hebben eene gezamenlijke dikte van	DILUVIUM. Bovenkant betrekkelijk A.P.	DILUVIUM. Onderkant betrekkelijk A.P. — bevonden op	DILUVIUM. Onderkant betrekkelijk A.P. — ligt dieper dan	DILUVIUM. Dikte bevonden	DILUVIUM. Dikte meer dan	Hoogte betrekkelijk A.P. van H. W.	Hoogte betrekkelijk A.P. van L. W.	Diepte van het stroombed betrekkelijk. A.P.	Het stroombed doorsnijdt het diluvium volgens de boring over eene hoogte van	Diepte, waartoe het diluvium beneden het stroombed reikt.	BELANGRIJKHEID DER OEVERAFSCHUIVINGEN.
	OOSTER SCHELDE			M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
6	Oost-Beveland en Wilhelmina polder	4 en 5	36	5	— 3.20		— 38.20		35	+ 1.49	— 1.53	— 25.33	22.13	minstens 12.87	In 1820 was eene belangrijke oeverafschuiving oorzaak van den inbraak des polders. 9 en 10 Februarij 1856 deed eene aanzienlijke afschuiving in de nabijheid van de eerstgenoemde een gedeelte van den overgebleven zeedijk benevens een gedeelte van den daar aansluitenden zeedijk van den Wilhelmina polder wegvallen, en zoude zonder de in allerijl genomen maatregelen laatstgenoemde polder zijn overstroomd geworden. (Zie notulen Kon. Ins. van Ing. van 8 November 1881, Pl. I)
7	Breede Watering bewesten Yersoke	2 en 5	37	6	— 14.60		— 41.60		27	+ 1.62	— 1.60	— 37.60	23.00	minstens 4.00	Ofschoon ook deze polder verlies heeft geleden aan voorland door de uitschuring van den stroom, die meer westwaarts voor den Oostbeveland polder en den Leendert Abraham polder honderde meters breedte wegnam, bedroeg de afneming hier minder en vindt men niet van afschuivingen melding gemaakt, die eene zoo groote uitgebreidheid hadden als bij andere riviervakken. Ook de afschuivingen, die in de laatste jaren hier werden waargenomen, hadden niet dien grooten omvang. Die van 18 October 1872 mag als eene der voornaamste worden beschouwd. (Prov. Verslag over dat jaar, Hoofdstuk XI, blz. 133).
	Tusschen OOSTER en WESTER SCHELDE.														
8	Putboring te Goes	1	16	8.19	— 3.98	— 41.08		37.10							In het Goesche diep, een water, dat vroeger langs Goes liep, kwamen volgens Nebbens geene vallen voor. Daar dit smalle en vermoedelijk weinig diepe vaarwater niet diep in het diluvium zal hebben doorgedrongen en blijkens de putboring te Goes eene dikke alluvium laag het diluvium bedekt, is het ontbreken van vallen hier wel te verklaren.
	WESTER SCHELDE.														
9	Hoofdplaat polder	1 en 4	1	5.20	— 1.55	— 15.65		14.10		+ 1.82	— 1.87	— 23.67	14.10	—	Weinige polders zijn in betrekkelijk korten tijd zoo hevig aangevallen en achteruitgegaan als de Hoofdplaat polder. In 1778 bedijkt, wordt de polder, met prijsgeving van den eersten en van nog twee in 1795 en in 1807 gelegde inlaagdijken, thans verdedigd door een in de jaren 1811—1815 gelegden inlaagdijk, die niet minder dan 700 M. achter de oorspronkelijke dijkslinie is gelegen. Met de dijken zijn 300 H.A. zeer vruchtbaar bouwland verloren gegaan. (Versl. Raad van oeververdg, blz. 53). De sterke stroom, die vroeger, toen het vaar-
			2	3.50	+ 0.30	— 19.75		20.05				— 22.77	20.05	—	
			3	4.80	— 1.15	— 19.35		18.20				— 23.17	18.20	—	
			4	3.50	— 1.35	— 21.35		20.00				- 27.07	20.00	—	
			5	7.	— 3.35	— 17.45		14.10				— 24.77	14.10	—	



Nº.	PLAATS.	NUMMER VAN het profil.	NUMMER VAN de boring.	De grondlagen boven het diluvium hebben eene gezamenlijke dikte van	DILUVIUM. Bovenkant betrekkelijk A.P.	DILUVIUM. ONDERKANT BETREKKELIJK A.P. bevonden op	DILUVIUM. ONDERKANT BETREKKELIJK A.P. ligt dieper dan	DILUVIUM. DIKTE bevonden	DILUVIUM. DIKTE meer dan	HOOGTE BETREKKELIJK A.P. VAN H. W.	HOOGTE BETREKKELIJK A.P. VAN L. W.	Diepte van het stroombed betrekkelijk A.P.	Het stroombed doorsnijdt het diluvium volgens de boring over eene hoogte van	Diepte, waartoe het diluvium beneden het stroombed reikt.	BELANGRIJKHEID DER OEVERAFSCHUIVINGEN.
	WESTER SCHELDE.			M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	
9	Hoofdplaat polder.	1 en 4	6	12.50	— 14.40	— 32.10		17.70		+ 1.82	— 1.87	— 28.17	13.77	3.93	water door den Brakman naar Sas van Gent liep, langs den polder eene menigte dijk- en oevervallen veroorzaakte, is in den laatsten tijd veel verminderd en de geul, waarin volgens het Verslag van den Raad van oeververd., blz. 55, in 1860 nog eene diepte tot van 30 M. beneden L.W. of 31.87 M. beneden A.P. gepeild werd, schijnt eenigzins te verdroogen. Niettemin deden zich tot 1863 nog afschuivingen voor; zij waren echter niet van grooten omvang. Of de sterke afneming van den oever in vroegere jaren heeft plaats gehad door belangrijke groote dan wel door gestadige maar geringere oeverafschuwingen is bij gemis aan beschrijvingen mij niet bekend.
			7	0	— 1.90	— 23.60		21.70				— 29.57	21.70		
			8	0	— 1.90	— 21.80		20.90				— 21.17	20.70	0.63	
			9	3.15	+ 0.50	— 18.45		18.95				— 21.37	18.95	—	
			10	3.25	+ 0.40	— 18.05		18.45				— 8.87	9.27	9.18	
			11	4.55	— 0.90	— 16.90		16.00				— 8.67	7.77	8.23	
			12	4.65	— 1.35	— 20.40		19.05				— 15.37	14.02	5.03	
10	Borssele polder	1 en 6	24	1	— 2.90	— 32.90		30		+ 1.88	— 1.90	— 18.60	15.70	14.30	De oever voor dezen polder is gedurende twee eeuwen na de bedijking, in 1616, voortdurend achteruitgegaan en ook gedeelten van den polder zijn verzwolgen en de dijken teruggetrokken. Voor het vak waarin de boringen van 28 tot 32 zijn gedaan, peilt men een steilen oever met trappen en zijn onder water verdedigingswerken op den oever aangebragt. Nabij de boringen 24 en 25, alwaar wegens de breedte van het voorland die verdedigingswerken niet waren noodig geacht, heeft in October 1874 eene oeverafschuiving plaats gehad van eenen omvang zoo aanzienlijk als slechts zelden is waargenomen. Gelijksoortige afschuiving had, oostwaarts van de zooeven genoemde, plaats gehad in 1864. In den oever van het dijkvak, waarvoor de boringen 28 tot 32 zijn gedaan, grepen zoover bekend is, nimmer afschuivingen of vallen plaats. (Prov. Verslag uitgebragt in 1876, Hoofdstuk XI, blz. 77). Voor Ellewoutsdijk, alwaar vroeger, volgens NEBBENS, vallen voorkwamen, hebben zij thans niet zigtbaar plaats. De verlegging van den hoofdstroom, die vroeger door het gat van Everingen liep, maar in den laatsten tijd zich langs de zuidelijke zijde van de Suikerplaat rigt en den Nieuwen Neuzen polder aanvalt, heeft verondieping voor Ellewoutsdijk ten gevolge. De diepte voor dezen polder gepeild, was, toen de afschuivingen reeds waren opgehouden, toch nog niet gering te noemen.
			25	0	+ 0.60	— 17.40		18		+ 1.88	— 1.90	— 23.80	18.00	—	
			26	5	— 1.25	— 16.25		15		+ 1.88	— 1.90	— 29.40	15.00	—	
			27	0	— 1.00	— 18.00		17		+ 1.88	— 1.90	— 29.40	17.00	—	
			28	7	— 3.85	— 16.85		13		+ 1.88	— 1.90	— 37.45	13.00	—	
			29	7	— 3.85	— 9.85		6		+ 1.88	— 1.90	— 39.80	6		
			30	6.50	— 3.35	— 17.85		14.50		+ 1.88	— 1.90	— 50.30	14.50	—	
			31	8	— 4.85	— 19.35		14.50		+ 1.88	— 1.90	— 37.40	14.50	—	
			32	8	— 4.85	— 19.85		15		+ 1.88	— 1.90	— 32.40	15	—	



N°.	PLAATS.	NUMMER VAN het profil.	NUMMER VAN de boring.	De grondlagen boven het diluvium hebben eene gezamenlijke dikte van	DILUVIUM. Bovenkant betrekkelijk A.P.	DILUVIUM. ONDERKANT BETREKKELIJK A.P. bevonden op	DILUVIUM. ONDERKANT BETREKKELIJK A.P. ligt dieper dan	DILUVIUM. DIKTE. bevonden	DILUVIUM. DIKTE. meer dan	HOOGTE BETREKKELIJK A.P. VAN H. W.	HOOGTE BETREKKELIJK A.P. VAN L. W.	Diepte van het stroombed betrekkelijk A.P.	Het stroombed doorsnijdt het diluvium volgens de boring over eene hoogte van	Diepte, waartoe het diluvium beneden het stroombed reikt.	BELANGRIJKHEID DER OEVERAFSCHUIVINGEN.
	WESTER SCHELDE.			M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	
11	Nieuwe Neuzen polder	2 en 4	13	6	— 2.91	— 24.91		22		+ 1.92	— 2.00	— 27.00	22	—	De oever voor dezen polder heeft gedeeld in den algemeenen achteruitgang, dien de kust ten Oosten en ten Westen van Terneuzen heeft ondervonden. Oeverafschuivingen van grooten en kleinen omvang hadden plaats, en deden een gedeelte van den polder verloren gaan. De belangrijkste afschuiving van den laatsten tijd is die van 16 December 1876; — zij had plaats nabij boring 14, verzwolg een deel van den dijk, en drong nog een eindweegs daar achter tot nabij den teen van den inlaagdijk door.
			14	6	— 3.21	— 30.71		27.50		+ 1.92	— 2.00	— 32.70	27.50	—	
			15	7	— 4.21	— 24.21		20		+ 1.92	— 2.00	— 30.20	20		
												Grootste diepte beoosten boring 15 — 35.50	20	—	
12	Westhavendijk voor Terneuzen	2 en 4	16	26	— 22.61	— 28.01		5.40		+ 1.92	— 2.00	— 35.60	5.40	—	Nadat spoedig na den aanleg van het kanaal bij Terneuzen (in 1826) een voor den Westhavenkop uitgebragt paalhoofd nog plotseling verzonk, zijn beide havendijken verder van beschadiging door afschuiving bevrijd gebleven.
13	Oosthavendijk voor Terneuzen	2 en 4	17	18.40	— 15.01	— 28.11		13 10		+ 1.92	- 2.00	— 35 80	13.10	—	
												Grootste diepte bewesten boring 16 — 58.70	13.10	—	
14	Margaretha polder	7	18	5.24	— 1.92	— 25.88		23 96		+ 2.02	— 2.02	— 28 71	23.96	—	In het begin dezer eeuw werden de Margaretha, Kleine Huissens en Eendragt polders beroofd van de doorgaande schorrand, die voor de beide laatstgenoemde polders aanwezig was, en van een buitendijk en twee lange nollen, die den Margaretha polder beschermden. De laagwaterlijn loopt thans onmiddellijk langs de tegenwoordige zeewering der genoemde polders, of nadert haar. Aanzienlijke vallen hadden de laatste jaren niet plaats bij dezen oever; de grootste was die van 27 Februarij 1876 voor den Eendragt polder.
			19	5.40	— 2.28	— 23.58		21.30		+ 2.02	— 2.02	— 30.52	21.30	—	
												Grootste diepte beoosten boring 19 38 02	21.30	—	
15	Kleine Huissens polder	7	20	7.75	— 4.43	— 28 58		24.15		+ 2.04	— 2.03	— 26.92	22.49	1.66	1 en 30 Maart 1873 hadden twee afschuivingen van geringen omvang plaats aan den oever, waarin boring 21 is gedaan. De grootste diepten, vóór de afschuivingen gevonden, bedroegen 18.50 en 16.80 M. beneden L.W. op 170 en 105 M. uit de L.W.-lijn.
			21	5.70	— 2.38	— 24.38		22.00		+ 2.04	— 2.03	— 17.53	15.15	6.85	
												Grootste diepte bewesten boring 20 — 32 03	24.15	—	
16	Eendragt polder	6 en 7	22	6.00	— 2.68	— 21.88		19.20		+ 2.06	— 2.05	— 21.65	18.97	0.23	Eene vrij omvangrijke oeverafschuiving deed zich ten westen van boring 23 voor, op 27 Februarij 1876, nadat op 220 M. uit de L.W.-lijn eene diepte van 22.50 Mr. gepeild was.
			23	5.40	- 2.08	— 21.18		19.10		+ 2.06	— 2.05	— 22.05	19.10	—	
												Grootste diepte bewesten boring 22 — 32.35	19.20	—	



bij de peiling niet altijd wordt waargenomen, en dat bij dat gedeelte de afschuiving is begonnen, die ook achterliggende, vooral bij doorweeking gemakkelijk beweegbare zandmassa's heeft doen volgen. Bij de beoordeeling der uitkomst van een peiling zal dus inzonderheid er op moeten gelet worden of ook een gedeelte van den oever in de diluviale laag onder eene helling van ongeveer 2 op 1 of steiler staat.

Afschuivingen voor de Kortgeensche nol aan den Annapolder hebben in 1828, 1857, 1866 en 1878 plaats gehad nadat eene voorafgaande peiling hellingen van 2, 2.3, 2.3 en 2.1 op 1 had doen kennen. Bij het nagaan der peilingen, die vóór den Oostbevelandpolder waren voorafgegaan aan den val van 1856, heb ik daarin dergelijk steile gedeelten in den onderzeeschen oever gevonden.

Is voor eene laag gemakkelijk beweegbaar zand zekere helling der glooijing te steil, dan kan een val ontstaan tengevolge van eene slechts geringe verdieping, die de gevaarlijke steilte voortbrengt. Met het oog op grootere verdiepingen in dezelfde raai kan bij de vele cijfers, die men te overzien heeft, alligt de schijnbaar onbeduidende verdieping, zoo die al is waargenomen, aan de aandacht ontsnappen.

Het streven naar de meest mogelijke naauwkeurigheid en volledigheid in de peilingen en een naauwlettend onderzoek der uitkomst met het oog op de doorsneden grondlagen zullen naar mijn inzien op den duur de beste middelen zijn tot vrijwaring tegen de onaangename verrassing van eene onverwachte verschijning van een val.

's Gravenhage, December 1881.

BIJDRAGE
TOT DE
THERMO-CHEMISCHE KENNIS VAN OZON.

DOOR

E. MULDER en H. G. L. VAN DER MEULEN.

TWEEDE GEDEELTE.

Ter bepaling der thermo-chemische waarde van den vorm OO,OO,OO, of anders uitgedrukt, der hoeveelheid warmte in calorieën, die wordt gebonden bij omzetting van 3 OO in 2 OOO, derhalve van drie moleculen gewone zuurstof in twee moleculen ozon (moleculaire verdichtingswarmte niet medegerekend; zie later), werd vroeger *) uitgegaan van de vergelijking:

$$As_2 O_3 Aq, OO - As_2 O_3 Aq, 2 OOO = OO,OO,OO.$$

De waarde van $As_2 O_3$ Aq, 2 OOO (de verbindingswarmte van twee atomen zuurstof, afkomstig van twee moleculen ozon, met één mol. arsenigzuur in watervrije oplossing tot arsenikzuur †) kan door een direkte proef worden bepaald, dat niet het geval is met die van $As_2 O_3$ Aq, OO. In navolging van Berthelot werd voor de waarde hiervan genomen 78280^c, maar het was ons voornemen dit punt later

*) *Verslag en Mededeelingen*, 2de Reeks, Deel XVI, p. 286.

†) l. c.

uitvoerig te behandelen; de waarde toch van 00,00,00 wordt voor een goed deel bepaald door die van $As_2 O_3$ Aq, 00. De vraag zou zelfs kunnen worden gedaan, of de waarde van $As_2 O_3$ Aq, 00 wel valt onder het bereik der waarneming. Voordat we overgaan tot de mededeeling van een nieuwe reeks van waarnemingen betreffende de bepaling der waarde van $As_2 O_3$ Ag, 2 000, zal een poging worden aangewend, om deze zaak meer of min tot een oplossing te brengen.

Over de calorische waarde van $As_2 O_3$ Aq, 00.

De thermo-chemische uitdrukking $As_2 O_3$ Aq, 00 heeft een andere beteekenis dan die van $As_2 O_3$ Aq, 2 O, en hierop valt zeer te letten. De laatste heeft namelijk betrekking op de verbindingswarmte van twee *vrije* atomen zuurstof met $As_2 O_3$ Aq, terwijl bij eerstgenoemde uitdrukking bedoeld werdt *gewone* zuurstof en wel één molecuul.

De waarde nu van $As_2 O_3$ Aq, 00 werd geacht indirect te kunnen bepaald worden, door arsenigzuur in waterige oplossing te oxydeeren b. v. met ioodzuur, maar dan tevens gebruik te maken van vele andere constanten (zie later). Het was langs dezen nader te ontwikkelen weg, dat THOMSEN *) meende te kunnen aannemen voor de waarde van $As_2 O_8$ Aq, 00 = 78360^c, terwijl FAVRE en SILBERMANN †) daarvoor gaven 78200^c.

Ter beantwoording der vraag, in hoeverre de constante van $As_2 O_3$ Aq, 00 wel zou kunnen bepaald worden, heeft men in de eerste plaats te letten op die van $As_2 O_3$ Aq, 2 O, om redenen, die later duidelijk zullen zijn. Om nu te vinden de waarde van $As_2 O_3$ Aq, 2 O worden met ioodzuur vijf thermo-chemische vergelijkingen vereischt, en wel:

1. 2 I O_3 H Aq. 3 $As_2 O_3$ Aq = 3 ($As_2 O_3$ Aq, 2 O) — (I H Aq, 3 O).
2. I H Aq, 3 O = I, 3 O, H, Aq — I, H, Aq.

*) J. f. pr. Ch. w. F, 11. 147, 177.

†) *Journ. Pharm. Chim.* Vol. 24, 24 (welk stuk niet werd gelezen).

3. $5\,I\,H\,Aq,\ I\,O_3\,H\,Aq = 3\,(2\,H,\ O) - 5\,(I, H,\ Aq) -$
$- I,\ 3\,O,\ H, Aq.$

4. $I\,K\,Aq, Cl = Cl, H, Aq - I, H, Aq + K\,O\,H\,Aq, H\,Cl\,Aq$
$- K\,O\,H\,Aq,\ H\,I\,Aq.$

5. $Cl,\ H, Aq = Cl,\ H + Cl\,H,\ Aq.$

Door de proef kunnen direct bepaald worden:

$2\,I\,O_3\,H\,Aq,\ 3\,As_2\,O_3\,Aq.$
$5\,I\,H\,Aq,\ I\,O_3\,H\,Aq.$
$K\,O\,H\,Aq,\ H\,Cl\,Aq.$
$K\,O\,H\,Aq,\ H\,I\,Aq.$

Niet direct te bepalen door de waarneming zijn:

$I\,K\,Aq,\ Cl$
Cl, H
$2\,H, O.$

Ook andere waarden als $3\,I\,H\,Aq,\ 3\,O$ enz. zijn wel niet vatbaar voor een directe bepaling door de proef, maar zij kunnen afgeleid worden uit voorgaande waarden (zie later).

Noemen we kortheidshalve:

$2\,I\,O_3\,H\,Aq, 3\,As_2\,O_3\,Aq = a$
$5\,I\,H\,Aq, I\,O_3\,H\,Aq = b$
$K\,O\,H\,Aq, H\,Cl\,Aq = d$
$K\,O\,H\,Aq,\ H\,I\,Aq = e$
$Cl\,H, Aq = f$
$I\,K\,Aq,\ Cl = z$
$Cl,\ H = y$
$2\,H,\ O = x,$

dan wordt vergelijking 5 (zie boven):

5. $Cl,\ H,\ Aq = y + f,$

en verder:

4. $z = y + f - I,\ H,\ Aq + d - e$

en:

3. $b = 3x - 5(y + f + d - e - z) - (I, 3O, H, Aq)$;

daarenboven:

2. $IH Aq, 3O = 3x - 5y - 5f - 5d + 5e + 5z - b - (y + f + d - e - z) = 3x - 6y - 6f - 6d + 6e + 6z - b$,

en eindelijk:

1. $a = 3(As_2O_3 Aq, 2O) - 2(3x - 6y - 6f - 6d + 6e + 6z - b)$,

derhalve is:

$$As_2O_3 Aq, 2O = \frac{1}{3}a + 2x - 4y + 4z - 4f - 4d + 4e - \frac{2}{3}b.$$

De waarden van x, y en z zijn aldus theoretisch te bepalen *):

$$2HH, OO = 2(2H, O) - O, O - 2(H, H)$$
$$HH, ClCl = 2(H, Cl) - Cl, Cl - H, H$$
$$2 IK Aq, ClCl = 2(IK Aq, Cl) - Cl, Cl.$$

Hieruit zijn af te leiden de waarden van $x = 2H, O$ en $y = H, Cl$ en van $z = IK Aq, Cl$, en wel aldus:

$$2H, O = \frac{1}{2}(2HH, OO) + \frac{1}{2}(O, O) + H, H$$

$$H, Cl = \frac{1}{2}(HH, ClCl) + \frac{1}{2}(Cl, Cl) + \frac{1}{2}(H, H)$$

$$IK Aq, Cl = \frac{1}{2}(2IK Aq, ClCl) + \frac{1}{2}(Cl, Cl).$$

Schrijven we kortheidshalve:

---

*) *Scheikundige Aanteekeningen* van E. Mulder, Dl. II, (1871), p. 186 enz..

$$\left.\begin{array}{r} 2\,HH,\ OO = m \\ HH,\ Cl\,Cl = p \\ 2\,I\,K\,Aq,\ Cl\,Cl = q \end{array}\right\}$$ allen direct te bepalen door de waarneming,

en substitueeren de waarden van $2\,x$, $-\,4\,y$ en $+\,4\,z$ in vergelijking 1, dan komt men tot den vorm (daar $2\,x - 4\,y + 4\,z = m - 2\,p + 2\,q + O,\ O$ is):

$$As_2\,O_3\,Aq,\ 2\,O = \frac{1}{3}\,a - 4\,f - 4\,d + e - \frac{2}{3}\,b + m - 2p + 2\,q + O,\ O,$$

en door substitutie der oorspronkelijke waarden van a, b enz.:

$$As_2O_3Aq,\ 2O = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}(2\,IO_3\,H\,Aq,\ 3\,As_2O_3Aq) - 4\,(ClH,\ Aq) \\ -\ 4\,(KOH\,Aq,\ H\,Cl\,Aq)\ + \\ \qquad +\ 4\,(KOH\,Aq,\ HI\,Aq) \\ -\ \frac{2}{3}\,(5\,IH\,Aq,\ IO_3\,H\,Aq) \\ +\ 2\,HH,\ OO - 2\,(HH,\ Cl\,Cl) \\ +\ 2\,(2\,I\,K\,Aq,\ Cl\,Cl,) + O,\ O. \end{array}\right\} . \quad (I)$$

De waarde van O, O (niet direct te bepalen) volgt uit de vergelijking:

$$As_2\,O_3\,Aq,\ 2\,O - O,\ O = As_2\,O_3\,Aq,\ OO \qquad (II)$$

Deze waarde van O, O overgebracht in (I) leidt ten slotte tot de vergelijking:

$$As_2\,O_3\,Aq,\ OO = \left\{\begin{array}{l} 2\,HH,\ OO - 2\,(HH,\ Cl\,Cl) \\ +\ 4\,(KOH\,Aq,\ HI\,Aq)\ - \\ \qquad -\ 4\,(KOH\,Aq,\ H\,Cl\,Aq) \\ +\ \frac{1}{3}\ (2\,IO_3\,H\,Aq,\ 2\,As_2\,O_3\,Aq) \\ -\ 4\,(ClH,\ Aq) + 2\,(2\,I\,K\,Aq,\ Cl\,Cl) \\ \qquad -\ \frac{2}{3}\,(5\,IH\,Aq, IO_3\,H\,Aq). \end{array}\right\} .. (III)$$

Voor de waarde nu van $As_2\,O_3\,Aq,\ OO$ vond THOMSEN 78360^c^ en FAVRE met SILBERMANN 78200^c^, dus gemiddeld 78283^c^, de waarde door BERTHELOT aangenomen. Behalve

de oxydatie-warmte van arsenigzuur in waterige oplossing door ioodzuur, alzoo de constante van: $2\,IO_3\,H\,Aq,\ 3\,As_2\,O_3\,Aq$, zijn er dus nog *zeven* constanten noodig ter bepaling van de waarde van $As_2\,O_3\,Aq, OO$, gelijk blijkt uit de vergelijking (III).

Het medegedeelde moge voldoende wezen om te doen uitkomen — en dit was het doel dezer thermo-chemische ontwikkeling, tot nog toe niet verricht, — dat de constante der uitdrukking $As_2\,O_3\,Aq, OO$ vatbaar is bepaald te worden, zonder toevlucht te nemen tot deze of gene veronderstelling, die aan gemelde getalswaarden meer een theoretische beteekenis zou geven.

Volledigheidshalve moet er op gewezen worden, dat men ioodzuur verschillende structuurformules kan toekennen, en wel die van:

$$O = \underset{\underset{O-H}{|}}{I} = O \qquad O = \overset{\overset{O}{\|}}{\underset{\underset{H}{|}}{I}} = O \qquad I - O - O - O - H, \text{ enz.,}$$

en ieder der drie atomen zuurstof niet een zelfde hoeveelheid cal. zullen geven bij oxydatie (zie vergelijking 1 en 3). Evenwel stellen de atomen zuurstof, die oxydeerend optreden in vergelijking 1 en 3 (tweede lid) voor: *vrije atomen zuurstof*, die dus onafhankelijk moeten zijn met betrekking tot de verbindingswarmte van ieder dezer atomen zuurstof, afgestaan door ioodzuur; en wij meenen, dat de gegeven vergelijkingen inderdaad mogen beschouwd worden juist te zijn.

Tweede reeks van bepalingen der constante van $As_2\,O_3\,Aq, 2\,OOO$.

Methode. De wijzigingen, die werden aangebracht in de methode, zijn de volgende:

1. De glazen buizen, die de ozonhoudende zuurstof leidden naar de calorimetrische kolf, waren niet verbonden met zegellak naar de wijze van BERTHELOT, maar hare uiteinden, voor zooverre noodig, in elkander geslepen.

2. De calorimetrische kolf bezat een veel kleiner gewicht, noodwendig met het doel de waterwaarde van het glas te verminderen.

3. Door vereeniging van een glazen gashouder, bestemd voor de ozonhoudende zuurstof, met een tweeden dergelijken gashouder door middel van een glazen buis (voorzien van een glazen kraan), was men in staat een betrekkelijk groote hoeveelheid van dit gasmengsel te leiden door de cal. kolf, en dientengevolge een verhooging in temperatuur van ongeveer één graad Celsius te bekomen.

4. Er werd een nieuw stel haarbuisjes, grooter in aantal, genomen, met het doel, de opname van ozon door het arsenigzuur in de cal. kolf te bevorderen.

5. Er werd gebruik gemaakt van een anderen thermometer voor de cal. kolf.

Ten overvloede werd nagegaan, of de lucht tegen het einde der proef geleid door de cal. kolf, teneinde de vloeistof in de kolf te vermengen (gedurende de proef geschiedde dit als gevolg van het instroomen der ozonhoudende zuurstof), en daarenboven ozon uit kolf en aanvoerbuis te verwijderen, ook eenigen thermischen invloed uitoefende. Dit was ook daarom van belang te weten, daar gedurende de eigentlijke proef, als gevolg van een niet voldoende sluiting, bij het aspireeren, lucht van buiten zou kunnen dringen (door de verbindingen der buizen en glazen kranen) en zich vermengen met de ozonhoudende zuurstof, gaande in de oplossing der cal. kolf, als mede lucht door de kurk der kolf in de kolf zou kunnen komen (waarin, ook na de oplossing te zijn doorgegaan, altijd wat ozon zal wezen, daar niet alles zal worden ontleed door het arsenigzuur). De mogelijkheid bestaat namelijk, dat eenig gevormd salpeterzuur en salpeterigzuur aanleiding zou kunnen geven tot een noemenswaardige bron van fouten. Gemelde contrôle-proef werd aldus genomen.

Gewone dampkringslucht (niet gezuiverd) in een glazen gashouder, bevond zich in de onmiddellijke nabijheid van ozonhoudende zuurstof in een anderen glazen gashouder bevat. De calorimetrische kolf hield in: *gedestilleerd water*. Aanvankelijk nu werd lucht aangewend (altijd gebruik makende van het stel haarbuisjes en aspirator), daarna ozonhoudende zuurstof en ten slotte weder lucht, terwijl de temperatuur der kolf werd waargenomen. De uitkomst nu was, dat bij

het doorvoeren gedurende 4 minuten van lucht, de temperatuur bleef op 19,70°, en zich constant hield onder het doorleiden gedurende 3 minuten van ozonhoudende zuurstof, en tevens onveranderd bleef gedurende 20 minuten, toen er weder lucht werd doorgevoerd. Het is duidelijk, dat men aanvankelijk eenige lucht liet doorgaan, alvorens de eigentlijke proef te beginnen en daarmede de temp. op te schrijven. Zoo was deze laatste, bij wijze van schatten, even voor het opschrijven 19.7025°, om weldra te dalen tot 19,7°. Het behoeft overigens niet gezegd, dat met betrekking tot den calorimeter vele voorzorgen werden in acht genomen.

De uitkomst van gemelde proef is derhalve:

a. dat vorming van salpeterigzuur en salpeterzuur, aangenomen eens, dat deze in geringe mate geschiedde, geen merkbaren invloed uitoefent. We hebben er ons trouwens eenigermate van overtuigd, door ozonhoudende zuurstof geruimen tijd te laten staan met een betrekkelijk groote hoeveelheid dampkringslucht, dat ozon zich met stikstof, zelfs bij aanwezigheid van water, niet schijnt te verbinden, zooals reeds Carius en Berthelot hadden aangetoond.

Met recht zou men de opmerking kunnen maken, waarom geen zuurstof werd genomen in plaats van lucht. De reden daarvan is in de eerste plaats deze, dat zuurstof gemaakt naar de gewone wijze uit kaliumchloraat (vermengd met koperoxyde), in den regel eenig chloor bevat (soms zelfs is de reactie met ioodkaliumpapier zeer duidelijk). De zuurstof gebruikt ter bereiding van ozon werd dan ook niet alleen gedroogd met zwavelzuur, maar daarenboven geleid door een buis met natronkalk. Bij het maken van zuurstof in 't groot is dit zuiveren van eenig chloor nog al lastig; dat zou evenwel geen overwegend bezwaar wezen, ware het niet dat een vermenging der zuurstof met eenige lucht, als gevolg onder anderen van een niet voldoende sluiting, in ieder geval hoogst moeielijk is te ontgaan.

Om terug te keeren tot de laatst medegedeelde proef, zoo leert deze daarenboven:

b. dat de thermische invloed van ozon en water van geen beteekenis schijnt te wezen;

c. dat de kurk der calorimetrische kolf evenmin invloed schijnt uit te oefenen op de temperatuur der vloeistof. Duidelijkheidshalve mag men er aan herinneren (zie vroeger: Eerste Gedeelte), dat de cal. kolf is voorzien van een kurk, waardoor gaan aan- en afleidingsbuizen voor ozonhoudende zuurstof, benevens de breede glazen buis van den thermometer (daarin bevestigd met een kleine kurk). Laatsgenoemde glazen buis reikt in de vloeistof der kolf (ozon kan derhalve de kleine kurk niet direct bereiken), en daar, tenminste in den regel, niet alle ozon zal worden opgenomen, kan het wel niet anders, of wat ozon zal in aanraking komen met de kurk der cal. kolf, terwijl ozon kurk aantast (kurk wordt door ozon gebleekt, terwijl vorming plaats heeft van water). De kurk der cal. kolf bleef evenwel op 't oog ongedeerd; men mag dus wel aannemen, dat er al betrekkelijk weinig ozon in aanraking kwam met de kurk. Het valt evenwel niet te ontkennen, dat desniettegenstaande een glazen sluiting aanbevelenswaard is, al is deze onderhevig aan niet weinig praktisch bezwaar. Na eenige inspanning is het mogen gelukken, om deze inrichting meester te worden; proeven zijn evenwel hiermede nog niet genomen.

Proefnemingen. Gaan we thans over tot een mededeelen der verrichte thermo-chemische waarnemingen betreffende ozon en arsenigzuur. Vooraf evenwel eenige kleine bizonderheden.

Bij het titreeren werd de arsenigzuur-oplossing *gewogen*, en die van iodium in ioodkalium *gemeten*, op de wijze zooals vroeger met twee van het drietal proeven geschiedde. Een hoeveelheid van 0,245 gr. arsenigzuur was in water (zonder zoutzuur) opgelost tot 53,5575 gr., welke oplossing was de *normaal-oplossing*. Hiermede werd namelijk de sterkte bepaald der iodium-oplossing, en met de laatste het gehalte aan arsenigzuur der oplossing, bestemd voor de calorimetrische kolf. Als contrôle zooveel mogelijk der zuiverheid van het voor de normaal-oplossing gebruikte arsenigzuur, werd, evenals bij de eerste reeks *) van proeven, het iodium door sublimatie (na vermengd te zijn met ioodkalium) ge-

---

*) l. c., p. 5.

zuiverd, en hiervan 1,27 gr. met ioodkalium in water opgelost tot 500 C.C. Nu vereischten 9,4675 gr. der normaal-oplossing van arsenigzuur aan deze iodium-oplossing 43,82 C.C.. Theoretisch zouden de 9.4675 gr. normaal-oplossing vereischt hebben 43.74 C.C. der iodium-oplossing (aangenomen in de eerste plaats, dat arsenigzuur en iodium zuiver waren); een betere overeenstemming is wel niet te wachten. Het behoeft niet gezegd, dat men zich hield aan 43,82 C.C..

Terwijl het gewicht van de cal. kolf bij de eerste reeks van proeven bedroeg 121,122 gr., was dat van de kolf bij deze reeks niet meer dan 81,7 gr..

Het aantal calorieën betrekking hebbende op $As_2\,O_3\,Aq$, 2 000 werd berekend naar de formule (reeds vroeger *) medegedeeld):

$$R = \frac{2\,m}{b}\,(b + p)\,q, \text{ waarin voorstelt:}$$

b. De gew.-hoev. in gr. aan oplossing der cal. kolf.

h. De som der waterwaarden van thermometer, absorptietoestel en glazen kolf.

q. Het verschil in graden Celcius der oplossing in de kolf vóór en na de proef.

f. De hoeveelheid ozon in gr. verbruikt door het arsenigzuur in de kolf.

m. Het mol.-gew. van ozon: OOO = 48.

R. Het aantal calorieën berekend op: $As_2\,O_3$ Aq, 2 000.

De s. w. der oplossing werd genomen = 1; zooals bekend, is dit streng genomen niet het geval, en wel door het gehalte van arsenigzuur en arsenikzuur, als wat betreft de s. w. van het water als zoodanig.

In de proeven was:

		b	*p*	*q*	*f*		R
Proef	I	692,2	12.8	1,075	0,502	gr.	144900
»	II	671,55	12.8	1,0	0,4673	»	140600
»	III	691,2	12,8	1,115	0,52588	»	143300

---

*) l. c., p. 5.

Bij deze werden ongeveer 14—16 liters ozonhoudende zuurstof doorgevoerd.

Het verloop der temperatuur (na iedere 20 seconden werd afgelezen, ten einde den gang der proef te kunnen kennen), was als volgt:

Proef I.		Proef II.			Proef III.		
13,88^0	14,40	18,16^0	18,66	19,16	18,925^0	19,19	19,79
13,88	14,42	18,16	18,68	19,16	18,925	19,21	19,82
13,88	14,46	18,16	18,70	19,16	18,925	19,23	19,84
13,88	14,49	18,16	18,715	19,16	18,925	19,25	19,865
13,88	14,52	18,46	18,73	19,16	18,925	19,27	19,89
13,88	14,54	18,16	18,75	19,16	18,925	19.28	19,92
13,88	14.57	18,16	18,76	19,16	18,925	19,30	19,94
13,88	14,60	18 16	18,78	19,16	18,925	19,32	19,965
13,88	14,63	18,16	18,79	19,16	18,925	19,34	19,98
13,88	14,66	18,16	18,81	19,16	18,925	19,36	20,01
13,88	14,69	18,16	18,83	19,16	18,925	19,375	20,03
13,88	14,72	18,16	18,85	19,16	18,925	19,39	20,04
13,88	14,74	18,16	18,87		18,925	19,415	20,04
13,88	14,76	18,16	18,89		18,925	19,42	20,04
13,88	14,79	18,16	18,905		18,925	19,44	20,04
13,88	14,82	18,16	18,92		18,925	19,46	20,04
13,88	14,85	18,19	18,94		18,925	19,48	20,04
13,91	14,87	18,21	18,96		18,95	19,50	20,04
13,95	14,89	18,24	18,98		18,99	19,515	20,04
13,99	14,92	18,27	18.995		19,01	19,535	20,04
14,02	14.94	18,30	19,01		19,03	19,555	20,04
14,06	14,95	18,32	19,02		19,05	19,57	20,04
14,08	14,95	18,34	19,04		19,07	19,59	20,04
14,11	14,955	18,36	19,055		19,08	19,615	20,04
14,14	14,955	18,36	19,07		19,09	19,635	20,04
14,17	14,955	18,40	19,08		19,10	19,66	20,04
14,21	14,955	18,42	19,095		19,11	19,68	20,04
14,24	14,955	18,45	19,10		19,12	19,70	20,04.
14,27	14.955	18,47	19,12		19,135	19,72	
14,30	14,955	18,49	19,13		19,15	19,74	
14,335	14,955	18,50	19,14		19,17	19,765	
14,36	14,955	18,52	19,15				
	14,955	18,54	19,16				
	14,955	18,56	19,16				
		18,58					
		18,60					
		18,62					
		18,64					

Vergelijken we de uitkomsten van de eerste en tweede reeks van proeven, met betrekking tot de constante:

		$As_2\,O_3\,Aq, 2\,000$
Reeks I. Proef	I	133000[c]
»	II	141600
»	III	145000
Reeks II. Proef	I	144900
»	II	140600
»	III	143300.

Van Proef I, Reeks I, werd reeds vroeger *) medegedeeld, dat de ozonhoudende zuurstof zeer waarschijnlijk te snel werd doorgevoerd; daarenboven werd bij deze proef de arsenigzuur-oplossing niet gewogen bij het titreeren. Deze proef zal daarom buiten rekening worden gelaten, in welk geval het gemiddelde van Reeks I en Reeks II is:

Gemiddelde	$As_2\,O_3\,Aq, 2\,000$:
Reeks I (zonder Proef I)	143300[c]
Reeks II	142900
verschil	400[c].

Het gemiddelde van Reeks I (zonder proef I) en Reeks II is verder:

$As_2\,O_3\,Aq, 2\,000$:

Gemiddelde van Reeks I en Reeks II . . . 143100[c].

In Reeks II was de verhooging in temp. van de cal. kolf betrekkelijk veel grooter dan in Reeks I. De ozonhoudende zuurstof werd langzamer doorgevoerd, de waarde 142900[c] is dus hoogst waarschijnlijk wat te laag.

Berthelot †) vond in twee bepalingen:

I	$As_2\,O_3\,Aq$, 000	= 137600[c]
II	»	= 125600
	gemiddeld	= 131600[c].

*) l. c. p. 7.

†) l. c., p 3.

Het verschil met BERTHELOT bedraagt derhalve:

$$143100 - 131600 = 11500^c.$$

Met recht hecht BERTHELOT evenwel de meeste waarde aan 137600^c, maar ook wij vertrouwen vooral op de hoogste waarde, die is gevonden, derhalve op die van 145000^c, dat dan een verschil geeft met BERTHELOT van:

$$145000 - 137600 = 7400^c.$$

De uitkomst, waartoe we voorloopig zijn gekomen, is derhalve, dat de waarde van $As_2\,O_3\,A$, 2 000 door ons aanmerkelijk hooger werd gevonden dan door gemelden thermoscheikundige.

Neemt men voor de constante van $As_2\,O_3\,Aq$, OO = 78280^c (zie pag. 288), dan wordt de waarde voor OO,OO,OO, voor die van $As_2\,O_3\,Aq$, 2 000 = 143100 nemende:

$$\begin{aligned} As_2\,O_3\,Aq,\ OO - As_2\,O_3\,Aq,\ 2\,000 &= OO,OO,OO \\ 78280 - 143100 &= OO,OO,OO \\ -\,64820^c &= OO,OO,OO. \end{aligned}$$

De gemiddelde waarde van BERTHELOT voor $As_2\,O_3\,Aq$, 2 000, namelijk die van 131600^c, leidt tot:

$$-\,53320^c = OO,OO,OO.$$

De waarde 137600^c (zie boven) tot:

$$-\,59320^c = OO,OO,OO$$

en onze maximumwaarde van 145000^c geeft:

$$-\,66720^c = OO,OO,OO.$$

De laatste waarde, die van OO,OO,OO = — 66720. komt waarschijnlijk het digst bij de waarheid om redenen vroeger medegedeeld.

Aan het voorgaande moet nog worden toegevoegd, dat de vorm OO,OO,OO betrekking hebbende op de warmte gebon-

den bij omzetting van 3 OO in 2 OOO, in ons geval *niet* insluit de verdigtingswarmte, welke hierbij plaats heeft van *drie moleculen* gewone zuurstof tot *twee moleculen* ozon, en de reden hiervan is eenvoudig deze, dat bij de thermo-chemische reactie:

$$As_2 O_3 Aq, 2 OOO,$$

de chemische reactie is:

$$As_2 O_3 + 2 OOO = As_2 O_5 + 2 OO;$$

anders gezegd, *twee moleculen* ozon geven bij dit proces *twee moleculen* gewone zuurstof, en er is dus geen verandering in het aantal gasmoleculen.

We behouden ons voor, nog vele reeksen van proeven te doen ter nadere bepaling der constante van OO,OO,OO, en zullen daarbij gebruik maken zoowel van een directe als een indirecte methode. Wat de eerste betreft, hierbij heeft men meer bepaald op 't oog de methode met platinazwart, welke laatste bij nader onderzoek *) zich in werkelijkheid deed kennen als hoogst waarschijnlijk de eigenschap te bezitten, ozon gemakkelijk om te zetten in gewone zuurstof. Wat aangaat de indirecte methode, zullen we, ten minste vooreerst, blijven bij die met arsenigzuur, welke door ons nog een weinig kan verbeterd worden. Onder meer, hopen we in staat te zijn, in een derde reeks van waarnemingen, behalve de ozonhoudende zuurstof, tevens de lucht te kunnen leiden uit glazen behouders, zoodat beiden onder nagenoeg gelijke omstandigheden kunnen verkeeren. Tevens zal worden zorg gedragen voor een meer regelmatig werken van den aspirator, dat in verband staat met het zooeven genoemde; alleen dan kan blijken, of er ook sprake kan wezen van een toepassen der afkoelingsformule.

---

*) l. c., pag. 8.

EENIGE THEORETISCHE BESCHOUWINGEN.

Aan het voorgaande, dat zich in hoofdzaak bepaalt tot de waarneming, wenschen we het een en ander te verbinden van theoretischen aard. Zoo heeft het onderwerp aanleiding gegeven, de allotropieën van eenige grondstoffen te bezien uit een thermo-chemisch oogpunt.

Atomistische en moleculaire allotropie. Het betrekkelijk verschil in gehalte aan energy tusschen de allotropieën van zuurstof in verband met dit verschil bij de betreffende allotropieën bijv. van koolstof en zwavel, is niet weinig opvallend. Zoo is dit verschil voor graphiet en amorphe koolstof, berekend op één atoom, dus 12 gew.-d. = C, niet grooter dan ongeveer 3000^c; voor allotropieën van zwavel schijnt dit betrekkelijk verschil aan energy zelfs te gering te zijn, om met genoegzame nauwkeurigheid te worden aangegeven. Met betrekking tot gewone zuurstof en ozon, kan het betrekkelijk verschil in gehalte aan energy, berekend op één atoom zuurstof O = 16 gew.-d., gerekend worden ongeveer te bedragen niet minder dan 11000^c, zooals uit het vroeger medegedeelde blijkt. De hypothese nu, dat een scheiden van koolstofatomen een grooter aantal calorieën zal vereischen dan van zuurstofatomen, is wellicht niet al te gewaagd. Maar de mogelijkheid bestaat, dat bijv. de moleculen koolstof en zwavel in vasten (en bij zwavel ook in vloeibaren) staat zeer veel atomen bevatten, en het verschil dər allotropiën in aantal atomen gering is. De bekende feiten noodzaken ons in ieder geval in geenen deele om dit laatste aan te nemen. En letten we op de allotropieën van zuurstof, en hoe ozon, dat slechts één atoom meer bevat dan gewone zuurstof, in eigenschappen van deze laatste zeer afwijkt, zoo bijv. weinig standvastig is, dan wordt het, al heeft men hier te doen met gassen, niet onwaarschijnlijk, dat in de eerste plaats de standvastige allotropieën van koolstof wellicht een zelfde aantal atomen bevatten in het molecuul. Wat de zwavel aangaat, voor de allotropieën dezer, bijv α-, β- en γ-zwavel, is dit, naar het voorkomt, niet minder waarschijnlijk, in aanmerking genomen, dat γ-zwavel,

die de meeste energy zou bevatten, uit α-zwavel ontstaat bij hooge temperatuur (ja zwavel in dampvorm boven het kookpunt, moet beschouwd worden te zijn γ-zwavel en te hebben twee atomen in het molecuul): daarenboven gaat α-zwavel bij verhitten over in β-zwavel, die betrekkelijk meer energy zou bezitten. In 't algemeen nu mag worden aangenomen, dat verhooging in temperatuur een verminderen in hoeveelheid atomen van het molecuul zal bevorderen. Ook bij de zwavel schijnt geen reden te zijn een groot aantal atomen in de mol. der allotropieën aan te nemen, en een klein verschil in aantal atomen dezer mol. onderling. Integendeel schijnen de geringe verschillen in energy bij allotropieën van koolstof en vooral van zwavel. eenigermate te zijn verklaard in vergelijking met het groote verschil bij de allotropieën van zuurstof, door als waarschijnlijk aan te nemen, dat het aantal atomen in de allotropieën van koolstof en zwavel eenzelfde is. Deze laatste allotropieën zouden dan hun grond hebben in verschil in rangschikking der moleculen, en daarmede te onderscheiden zijn twee soorten van allotropie *), en wel:

1. atomistische en
2. moleculaire allotropie.

Van *atomistische* allotropieën zijn als 't ware de moleculen allotropisch, *niet* zoo bij *moleculaire* allotropieën, waarbij verschil in betrekkelijke plaatsing der moleculen als hoofdzaak van verschil in eigenschappen is te beschouwen. Het medegedeelde moge strekken, om hierop meer de aandacht te vestigen.

Ozon nader beschouwd. In al het vorige zijn we uitgegaan van de veronderstelling, dat het s. g. van zuurstof en ozon zijn 16 en 24, dus de mol. gew. 16×2 en 24×2, alzoo de formules OO en OOO. In affiniteiten heeft men, O aangenomen te zijn bivalent, derhalve: O = O en

```
O — O
 \ /
  O
```

of O—O—O, in welk laatste geval vrije affiniteiten zouden

*) Zie *Handwörtb.* Fehling, Art. Isomerie.

aanwezig zijn. Wordt aangenomen, dat de verbindingswarmte van één affiniteit zuurstofatoom met één affiniteit van een ander zuurstofatoom steeds dezelfde is, namelijk in gewone zuurstof en ozon, en dit alzoo aangeduid: $\overset{I}{O}.\overset{I}{O} = y$, dan wordt men van zelf geleid tot de formule $O - O - O$ *) voor ozon, daar in $3\,(O = O)$ en $2\left(\begin{array}{ccc} O & \text{---} & O \\ & \diagdown \quad \diagup & \\ & O & \end{array}\right)$ twaalf affiniteiten elkander twee aan twee neutraliseeren, en bij omzetting van gewone zuurstof in ozon derhalve geen warmte zou kunnen gebonden worden, terwijl de proef dit anders leert. Uitgaande van de hypothese der affiniteiten als basis voor de betrekkelijke structuur, hier van gewone zuurstof en ozon, zou ook kunnen aangenomen worden, dat de waarde $\overset{I}{O},\overset{I}{O}$ niet altijd eenzelfde is. Aangezien de atomen in gewone zuurstof en ozon niet op gelijke wijze tegenover elkander geplaatst kunnen zijn, is dit laatste, ook afgescheiden van de hypothese der affiniteiten, niet onwaarschijnlijk. Vooralsnog kan men evenwel niet veel anders doen dan voorloopig aan te nemen, dat $\overset{I}{O},\overset{I}{O} = y$, derhalve eenzelfde waarde bezit, en zooals gezegd, moet dan ozon worden beschouwd als $O - O - O$, waarvoor tevens pleit de weinige stabiliteit van ozon, terwijl de structuur $\begin{array}{ccc} & O & \\ / & & \backslash \\ O & \text{---} & O \end{array}$ zou duiden op meer stabiliteit.

Dat warmte noch licht, maar alleen electriciteit vermag, gewone zuurstof om te zetten in ozon, laat zich in zooverre verklaren, als gasmoleculen met ongelijknamige electriciteit geladen, tijdelijk in rust kunnen komen, waardoor de mate van dusgenaamde aantrekking van moleculen en atomen wordt bevorderd, en niet minder door de electriciteit als zoodanig.

Hypothese betreffende de structuur der grondstoffen. Vooral

*) l. c. 1.

in de laatste jaren werd niet alleen bij herhaling gehandeld over de wijze, waarop de grondstoffen zouden kunnen geconstruëerd zijn, maar werden zelfs pogingen gedaan ten einde experimenteel in de structuur der grondstoffen eenigermate door te dringen. Zooals bekend, is er tot nog toe geen feit aan te wijzen, dat eenigermate noodzaakt aan te nemen, dat eenige grondstof, en zoo ook het atoom, kan worden ontleed, gebruik makende van de hulpmiddelen, waarover de wetenschap thans heeft te beschikken; zelfs is onwaarschijnlijk, dat de electriciteit met haar maximum van tensie vermag het atoom te ontleden. Dit neemt niet weg, dat het eenigermate van belang kan wezen na te gaan, welke hypothesen aangaande de structuur der stof eenig recht kunnen hebben van bestaan. De volgende hypothese was, voorzooverre bekend, nog niet uitgesproken, — maar we voegen er bij, de waarde hiervan is uit den aard der zaak zeer betrekkelijk — deze namelijk, dat het dusgenaamde atoom is te beschouwen als het atoom van den *eersten rang*, dat is opgebouwd uit atomen van den *tweeden rang*, deze laatste uit atomen van den *derden rang*, en zoo tot . . . . in het *oneindige*. De hypothese sluit noodwendig de eenheid van stof niet buiten. Naar deze hypothese zou dus het atoom oneindig samengesteld zijn, en iedere poging, een volkomen kennis te bekomen van de stof, afstuiten op de onmogelijkheid, een oneindig langen weg van onderzoek af te leggen.

Utrecht, 24 December 1881.

VERSLAG

OVER EENE VERHANDELING VAN

Dr. J. D. R. SCHEFFER:

ONDERZOEKINGEN OVER DE DIFFUSIE VAN EENIGE ORGANISCHE EN ANORGANISCHE VERBINDINGEN.

Uitgebracht in de Vergadering van 28 *December* 1881.

Dr. SCHEFFER deelt in deze verhandeling de uitkomsten mede van zijne bepalingen betreffende de diffusieconstanten van eenige stoffen in waterige oplossing. Zooals bekend is, wordt onder de diffusieconstante eener stof verstaan: de hoeveelheid dier stof, die in de eenheid van tijd door de eenheid van doorsnede der vloeistof zich beweegt, wanneer het sterkteverval de eenheid bedraagt en een standvastige toestand is ingetreden, alles bij dezelfde temperatuur.

De schrijver heeft de diffusie van zoutzuur het uitvoerigst onderzocht, ter contrôle zijner methode, en ter vergelijking met GRAHAM's uitkomsten; en vervolgens zijne proefnemingen over nog 8 stoffen uitgestrekt: chloorammonium, azijnzuur, natriumacetaat, citroenzuur, wijnsteenzuur, barnsteenzuur, mannite en chloralhydraat.

Zooals de schrijver aan het einde zijner verhandeling mededeelt, was het zijne bedoeling om de verhouding tusschen de diffusieconstanten der stoffen en haar moleculair gewicht na te sporen, en is het zijn voornemen daartoe van nog andere verbindingen de diffusieconstanten te bepalen.

De methode van proefneming, door hem gevolgd, is dezelfde

welke GRAHAM bij zijne oudere diffusieproeven in 1851 heeft aangewend, met de wijziging die SIMMLER en WILDT in 1857 hebben voorgesteld. Cylinderglazen van 9,5 c.M. hoogte en 1,8 c.M. wijdte werden tot $^2/_3$ met de oplossing der stof (van bekende sterkte) gevuld, in een ruimen bak gesteld op een grooten afstand van den bodem, en vervolgens (met de bekende voorzorgen om alle menging te voorkomen) met water aangevuld. In het vat werd daarna voorzichtig zooveel water van dezelfde temperatuur gebracht, totdat de cylinder $^1/_2$ c.M. onder den waterspiegel stond. Het vat was met een warmte-isolator omgeven. De temperatuur van den kelder, waarin de proefnemingen geschiedden, wisselde zeer weinig af.

Na eenige dagen werd de cylinder met eene glazen plaat gesloten en uit het vat gelicht. Uit de analyse van den inhoud werd bepaald hoeveel van de stof door diffusie was verwijderd geworden. De schrijver berekent daaruit op juiste wijze de waarde van de diffusieconstante naar de wet van FICK (1855), met behulp der formulen van SIMMLER en WILDT (1857), waarbij het geval wordt verondersteld, dat de diffusie plaats heeft in water, welks sterkte = 0 is, of althans = 0 kan gesteld worden, omdat de watermassa om den cylinder zeer groot is in vergelijking tot de hoeveelheid stofs die er tijdens de diffusieproef intreedt.

Aangezien de schrijver de methoden en de uitkomsten zijner voorgangers niet beredeneert of met de zijne vergelijkt (enkele proefnemingen van GRAHAM uitgezonderd) en evenmin een overzicht geeft van de tot nog toe bepaalde diffusieconstanten, zoo achten wij het wenschelijk eene korte beschouwing daaromtrent aan onze beoordeeling van den arbeid des Heeren SCHEFFER te doen voorafgaan.

Het getal der stoffen, van welke diffusieconstanten bepaald zijn, is nog zeer beperkt. Uit de reeks diffusieproeven van GRAHAM van 1851 kunnen geene diffusieconstanten berekend worden, zooals reeds SIMMLER en WILDT in 1857 terecht hebben opgemerkt. Uit de nieuwere reeks van 1862, bij welke GRAHAM eene andere methode heeft aangewend, zijn de diffusieconstanten door STEPHAN vóór twee jaren

(1879) berekend. Zij betreffen slechts het zoutzuur, drie minerale zouten en vier organische stoffen *). De bereikte nauwkeurigheid laat te wenschen over. De bepalingen van BEILSTEIN, die een diffusieglas gebruikte van den vorm van een vogelkooidrinkglas, hetwelk hoog in een vat met water werd gesteld, verdienen weinig vertrouwen.

Zijne diffusieconstanten van 10 minerale zouten †), wijken meestal belangrijk af van die van GRAHAM en van latere waarnemers. De bepalingen van HOPPE-SEYLER, VOIT en JOHANNISJANZ, naar de optische methode verricht, moeten na STEPHAN's kritiek als onjuist ter zijde gesteld worden.

MARIGNAC's proefnemingen van 1874 geven slechts de betrekkelijke waarden voor het diffusievermogen van twee zouten, die te zamen in oplossing zijn; zij zijn naar GRAHAM's oudere methode verricht, waarbij het diffusieglas niet hoog in het watervat staat, maar op den bodem.

Zoo blijven er dan slechts over de bepalingen van de diffusieconstanten uit den allerlaatsten tijd: die van WEBER betreffende het zinksulphaat (1879) en die van SCHUHMEISTER (1879) betreffende 17 alkalizouten en 4 zouten van zware metalen §); terwijl LONG in 1880 het betrekkelijke diffusievermogen bepaald heeft van 19 alkalizouten, 4 ammoniakzouten en 5 zouten van zware metalen. Geen dezer drie waarnemers heeft echter GRAHAM's methode gevolgd.

STEPHAN heeft terecht opgemerkt dat daarbij fouten kunnen gemaakt worden, die een merkbaren invloed hebben.

---

*) $NaCl$, KCl, $MgSO_4$, albumine, looizuur, arabische gom, rietsuiker en twee zoutmengsels.

†) Proeven met KCl, $NaCl$, KNO_3, $K_2Cr_2O_7$, K_2CO_3, K_2SO_4, Na_2SO_4, Na_2CO_3, $MgSO_4$, $CuSO_4$.

§) Kaliumzout van Cl, Br, I, NO_4, CO_3, SO_4.
Natriumzout 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃
Lithiumzout 〃 〃 〃 〃 〃
Calciumzout 〃 Cl.
Magnesiumzout 〃 O_4.
Koperzout 〃 Cl en SO_4.
Zinkzout 〃 SO_4.
Kobaltzout 〃 Cl.

Als de proef eenigen tijd geduurd heeft, wordt de veronderstelling niet meer voldoende benaderd, dat het bovengrensvlak van de diffundeerende oplossing eene sterkte = 0 bezit; en bij het eindigen der proef is het niet mogelijk den cylinder met eene glazen plaat te sluiten zonder stroomingen teweeg te brengen. Bij GRAHAM's tweede methode zijn storende stroomingen onder het uithevelen niet te vermijden.

SCHUHMEISTER heeft daarom, op raad van STEPHAN, de diffusieproeven zoo ingericht dat de diffusie plaats had:

of in eene waterzuil, waarvan bij de berekening van k de lengte = oneindig groot kon aangenomen worden;

of, terwijl een zeer langzame stroom water over het bovengrensvlak werd gevoerd, zoodat dit voortdurend de sterkte = 0 moest bezitten.

Het laatste beginsel werd ook door LONG bij zijne vergelijkende diffusieproeven toegepast, maar in een anderen toestel (naar LOTHAR MEIJER).

SCHUHMEISTER experimenteerde met oplossingen van verschillende sterkte en meestal bij twee of drie temperaturen (tusschen 2° en 21°). Zijne uitkomsten voor dezelfde temperatuur en sterkte geven zelden onderlinge verschillen van 10 pCt. (op de laagste waarde berekend), meestal geringer. Daar hij de sterkte der oplossingen steeds afleidde uit zijne bepalingen van haar specifiek gewicht, met behulp van GERLACH's tabellen, heeft hij zich van de nauwkeurigheid dezer tabellen afhankelijk gemaakt, hetgeen voor sommige zouten wellicht een bezwaar tegen zijne uitkomsten kan opleveren.

WEBER heeft een geheel anderen weg ingeslagen en de diffusieconstante van het zinksulphaat berekend uit de bepalingen van de elektromotorische kracht des strooms, die tusschen twee zinkplaten ontstaat, welke met de zoutoplossing in aanraking zijn, wier sterkte in de aan de platen grenzende vlakken verschillend is. Zijne bepaling is ongetwijfeld met de meeste strengheid uitgevoerd, berekend en beredeneerd. Zij stemt, naar ons uit de vergelijking blijkt, vrij goed overeen met SCHUHMEISTER's bepaling *).

---

*) Bij 10° vindt SCHUHMEISTER $k = 0{,}20$ (sterkte der opl. aanv. 0,1 pCt.).
Bij 9,6° " WEBER $k = 0{,}1816$ " " " " 0,2 "

Ook heeft hij de diffusieconstante bepaald voor meer uiteenloopende temperaturen ($1{,}2^0$, $18{,}5^0$, $44{,}7^0$).

Uit het gegeven overzicht blijkt, hoe gering en hoe beperkt nog het aantal stoffen is, waarvan de diffusieconstanten met eenige nauwkeurigheid bepaald zijn. Eene uitbreiding van onze kennis op dat gebied kan niet anders dan zeer welkom zijn; vooral omdat de vergelijking van het diffusievermogen met moleculair gewicht, moleculair volumen, oplossingswarmte, galvanisch leidingsvermogen en andere physische eigenschappen, belangrijke uitkomsten schijnt te beloven.

Aangezien nu Dr. SCHEFFER's proefnemingen hebben gediend om volstrekte waarden voor diffusieconstanten te bepalen, zoo mag het de vraag zijn, welke nauwkeurigheid door hem bereikt is, ook in vergelijking met GRAHAM's en SCHUHMEISTER's uitkomsten.

Daar de schrijver echter zelf zijne uitkomsten niet nader beredeneerd heeft, moge die beschouwing hier kortelijk plaats vinden.

Zoutzuur.

Met uitzondering van proef I die slechts een dag geduurd heeft, en van eene proef waarbij het zoutzuur de dubbele sterkte bezat, wisselen de uitkomsten van 13 proefnemingen (bij $7^1/_2$ à 9^0 C.) tusschen + 10 en — 5 pCt. van het midden. Binnen die nauwkeurigheid wordt de wet van FICK bevestigd.

Bij de overige stoffen, waarvoor het aantal proefnemingen kleiner is, wijken de uitkomsten niet boven 10 pCt. van de laagste waarde af *); ook als de sterkten der oplossingen

*) Wij berekenden bij:

			Sterkte	Temp.	Afwijking tusschen de uitkomsten onderling.
Zuringzuur:	3	proefnemingen	4 en 6 pCt.	$7^1/_2{}^0$	8 pCt.
Azijnzuur:	6	〃	8 〃	8 en $14^1/_2{}^0$	7 en 11 pCt.
Citroenzuur:	3	〃	5 en 9 〃	9^0	10 pCt. (+ 5^5 tot —4 pCt. v. h. midden)
Wijnsteenzuur:	4	〃	4 en 7 〃	9^0	11 pCt (+ 5^5 tot —5^5 pCt. v.h. midden)

verschillend genomen zijn. Alleen bij natriumacetaat, in drie sterkten, zijn de verschillen vrij groot: ± 9 pCt. ongeveer van het gemiddelde.

Aangezien nu alleen voor het zoutzuur de door STEPHAN berekende diffusieconstante uit GRAHAM's proef met Dr. SCHEFFER's cijfers te vergelijken is — en deze zelfs nog gebrekkig, aangezien de temperaturen aanmerkelijk verschillen *) — zoo is het niet uit te maken of Dr. SCHEFFER's bepalingen nauwkeuriger zijn dan die van GRAHAM. Onder de proefnemingen van SCHUHMEISTER vonden wij er eene, die ook door Dr. SCHEFFER bij ongeveer dezelfde temperatuur ingesteld is, namelijk chloorammonium; en deze stemmen vrij goed overeen:

SCHUHMEISTER	bij $20\frac{1}{2}^0$:	$k = 1{,}33$	(sterkte der opl. 12 pCt.)
SCHEFFER	» $17\frac{1}{2}^0$:	$k = 1{,}32$	(» » » 4,66 »)

Mogen wij uit alles aannemen, dat de bereikte nauwkeurigheid bij Dr. SCHEFFER zeker niet minder is dan die van GRAHAM en niet veel verschilt van die van SCHUHMEISTER, zoo blijven er toch bezwaren tegen de methode van experimenteeren over, die zelfs eene strenge beredeneering der uitkomsten beletten, vooral als men in aanmerking neemt, dat het den schrijver om volstrekte cijfers te doen is.

De hoogte van het water boven den cylinder was zeer gering: slechts 5 mM. — GRAHAM bracht bij zijne proeven van

---

		Sterkte	Temp.	Afwijking tusschen de uitkomsten onderling.
Barnsteenzuur:	3 proefnemingen	5 pCt.	15°	onbeduidend
Manniete:	3 "	44 "	10°	onbeduidend
Natriumacetaat:	7 "	± 2,6 en 9 "	14 à 15°	—9 pCt. tot +8 pCt. v. h. middencijfer
Chloralhydraat:	4 "	5 en 8 "	9°	10 pCt.
Chloorammonium:	3 "	4,65 "	$17\frac{1}{2}$°	4 pCt.

*)

	Temp.	*k.*	
GRAHAM	5°	1,742	
SCHEFFER	$7\frac{1}{2}$ — 9°	2,07	Gemiddeld uit 13 waarnemingen.

1851 die hoogte tot 1 Inch = 25 mM. — SIMMLER en WILDT stellen eene hoogte voor van 2 of 3 Liniën = 6 tot 9 mM.

Mag men nu dat water boven den cylinder wel als vrij van zout beschouwen, en dus den term n in de formulen = de hoogte van het cylinderglas stellen? Aan den rand zal het uittredende zout wel spoedig naar beneden zakken, maar bij niet zeer nauwe cylinders zal het zout in het midden nog een eind opstijgen vóór het wordt weggevoerd. De deeltjes, die dezelfde sterkte bezitten, zullen dus boven den cylinder een gebogen vlak vormen. Dat gebogen vlak boven den cylinder, in hetwelk men de sterkte der oplossing = 0 mag stellen, *kan* dus op een niet te verwaarloozen afstand boven den cylindermond gelegen zijn. Deze afstand kan misschien wel den halven straal van het bovenvlak des cylinders bedragen, ja misschien nog meer; en zoo zou dan de term n een niet onbelangrijk bedrag hooger moeten gesteld worden dan hij is aangenomen. Eerst bij zeer nauwe cylinders zal deze fout verdwijnen, doch Dr. SCHEFFER's cylinders hadden een doormeter van 18 mM.

Bij zijne proeven was bovendien de zuil water boven den cylinder zeer klein, slechts 5 mM., zoodat het mogelijk blijft, dat de sterkte der oplossing aan den waterspiegel niet = 0 mocht gesteld worden. Dat kan belemmerend op de diffusie gewerkt hebben. En wanneer men nu nog nagaat, dat men de wanden dezer waterzuil (het verlengde van den cylindermantel tot aan den waterspiegel) als het oppervlak kan beschouwen, waaruit de diffusie in de omringende watermassa plaats grijpt, dan springt het nog meer in het oog dat de geringe oppervlakte van dezen wand vertraging in het wegvoeren der uit den cylinder tredende deeltjes *kan* teweeg gebracht hebben.

Door deze vertragingen zouden de volstrekte waarden der diffusieconstanten wellicht iets te laag verkregen kunnen worden. In elk geval moet het niet overbodig geacht worden te onderzoeken, of de waterspiegel zonder bezwaar zoo laag boven den cylinder mag gebracht worden. Op de betrekkelijke waarden der diffusieconstanten zullen de aange-

wezen bronnen van fouten evenwel weinig invloed gehad hebben. Immers, bij alle stoffen behalve het zoutzuur heeft de schrijver de diffusie eerst bepaald, nadat er 10—20 of meer dagen verloopen waren. Dan zullen, als men den invloed der zwaartekracht als standvastig beschouwt, de tijden, die noodig zijn geweest, omgekeerd evenredig zijn met de diffusieconstanten.

Over den invloed van de sterkte der oplossing op de diffusieconstante wordt door den schrijver niet gesproken. Bij de proeven met wijnsteenzuur, citroenzuur, natriumacetaat en chloralhydraat, werden oplossingen van verschillende sterkte genomen, maar was van dien invloed niets te bemerken. Waarschijnlijk zijn de uitkomsten daarvoor nog niet nauwkeurig genoeg. Immers, als de invloed bestaat, is die zeer gering. WEBER heeft bij zijne bepalingen met zinkvitriool van verschillende sterkte (20 en 30 pCt.) een klein verschil gevonden, niet meer dan 5 pCt. in afnemenden zin. Hij acht dan ook de hoeveelheid diffundeerend zout niet enkel afhankelijk van het sterkteverval $\frac{du}{dx}$, maar ook in veel geringer mate van de volstrekte waarde van u, en meent dat de wet van FICK op dezelfde wijze moet verbeterd worden als de wet van FOURIER voor de warmtegeleiding.

SCHUHMEISTER heeft grooter verschillen gevonden bij zijne proeven met chloorkalium, chloornatrium, iodkalium, bromlithium; verschillen, die wel 10 pCt. bedroegen, doch in toenemenden zin; juist het omgekeerde van WEBER's ervaring. De diffusieproeven van vroegere waarnemers zijn stellig te onnauwkeurig geweest om den invloed der sterkte op de diffusie te doen bemerken.

Zien wij vooreerst van dien invloed af, dan blijft onze slotsom deze, dat de proeven van Dr. SCHEFFER eerst dan voor eene strengere berekening der diffusieconstanten vatbaar zullen zijn, als hij bewezen zal hebben dat de boven aangewezen fouten mogen verwaarloosd worden. In dat opzicht is het

misschien wenschelijk de diffusieconstante van het chloornatrium te bepalen, welke stof meer geschikt is ter contrôle zijner methode dan het zoutzuur. Immers bleek het ons, dat de uitkomsten van GRAHAM, SCHUHMEISTER, LONG, naar verschillende methoden verkregen, weinig verschillen, en dat alzoo dit zout het best ter vergelijking dienen kan.

Zooals wij reeds opmerkten, is het den schrijver inzonderheid te doen om de volstrekte waarden der diffusieconstanten in verband te brengen met de moleculairgewichten en moleculairvolumina, ja zelfs met chemische structuur en zoogenaamde physikalische isomeriën. Zal die vergelijking vruchten dragen, dan is het zeker de vraag bij welke temperatuur men die vergelijking moet instellen. De invloed van de temperatuur op de diffusie is zeer groot.

Voor het temperatuurverschil van 2^0 tot $21^1/_2{}^0$ neemt bijv. de diffusieconstante van het chloorkalium van 1 tot 1,65 toe (SCHUHMEISTER); die van het zinksulphaat van 0,1252 tot 0,4146 voor het temperatuurverschil van $1,2^0$ tot $44^0,7$ (WEBER). Zou het dus niet wenschelijk zijn de diffusieconstanten der zelfde stof zooveel mogelijk bij meer temperaturen te bepalen, om tevens den invloed der temperatuur op het diffusievermogen te leeren kennen?

Bovendien — zooals de schrijver zelf opmerkt — zijn er stoffen die zich hydrateeren, hetzij tot een standvastig, hetzij tot een zich dissociëerend hydraat. Het zal dus zeker het beste zijn om eerst de diffusieconstanten van stoffen te bepalen, die anhydrisch in oplossing zijn, vervolgens van dezulke die standvastige hydraten vormen, — om eerst daarna te onderzoeken, welken invloed de dissociatie van onstandvastige hydraten op de diffusie uitoefent.

Aangezien het onze meening is, dat de bepalingen van Dr. SCHEFFER niet minder waarde hebben dan die, welke door vroegere waarnemers naar dezelfde methode zijn gedaan, en het nog uitgemaakt moet worden in hoeverre de uitkomsten van SCHUHMEISTER nauwkeuriger zijn, zoo aarzelen wij niet aan de Akademie voor te stellen deze

Verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

Indien de Akademie zich met dit voorstel vereenigt, achten wij het wenschelijk, den schrijver vóór het drukken met ons verslag in kennis te stellen, ten einde hem de gelegenheid te geven, desverkiezende, in de redactie van het stuk nog het een en ander te wijzigen, vooral met het oog op latere mededeelingen, die de schrijver waarschijnlijk omtrent het vervolg zijner proefnemingen aan de Akademie zal wenschen aan te bieden

Leiden en *Utrecht*, 19 December 1881.

J. M. VAN BEMMELEN.
H. C. DIBBITS.

ONDERZOEKINGEN

OVER DE

DIFFUSIE VAN EENIGE ORGANISCHE EN ANORGANISCHE VERBINDINGEN.

DOOR

J. D. R. SCHEFFER.

Fick *) ontwikkelde de theorie van de diffusie van vloeistoffen met behulp van de onderstelling, dat de hoeveelheid zout, die uit een oplossing in de tijdseenheid door een bepaalde doorsnede stroomt, evenredig is aan het oppervlak dier doorsnede en aan het concentratieverschil van twee naburige lagen, een onderstelling die wordt uitgedrukt door de formule:

$$d\,S = k.\,q.\,\frac{du}{dx}.\,dt \text{ waarin:}$$

dS de hoeveelheid zout voorstelt, die in de tijd dt stroomt door de horizontale laag x; q de grootte van het oppervlak; du de grootte van het concentratieverschil tusschen de laag x en de om dx daarvan verwijderde.

De diffusieconstante k is dus volgens de bovenstaande formule die hoeveelheid zout, die in den stationairen toestand in de tijdseenheid door de eenheid van doorsnede zoude vloeien, als de hoogte van den geheelen diffusietoestel de lengteeenheid bedraagt en aan beide einden daarvan het concentratieverschil steeds gelijk de eenheid is.

Aangezien geen kenmerken zijn te vinden, waaruit het al of niet ingetreden zijn van den stationairen toestand kan

*) Poggend, *Ann.* Bd. 94, S. 59.

worden afgeleid, hebben SIMMLER en WILD *) eenige methoden ontwikkeld, volgens welke ook uit een bekenden begintoestand, onverschillig of de stationaire toestand al of niet is bereikt, de waarde van k zou kunnen worden bepaald.

Eenige der door hen »optische'' genoemde methoden zijn sedert door VOIT, †) HOPPE SEYLER §) en JOHANNISJANZ **) toegepast, maar de daarbij verkregen resultaten later door STEFAN ††) als niet vertrouwbaar verworpen.

Men stelle zich nu een van boven open, van onder gesloten cilindervormig vat voor, dat tot op zekere diepte onder den bovenrand met zoutoplossing en verder met gedestilleerd water wordt gevuld. Men denke zich dezen cilinder verticaal geplaatst in een groote watermassa, waarin de zoutoplossing kan diffundeeren, zoodat de concentratie aan den bovenrand van den cilinder voortdurend gelijk nul kan worden gesteld, dan zal blijkens de door SIMMLER-WILD medegedeelde formule de hoeveelheid zout, die gedurende den tijd T, gerekend van het begin der proef, uit het vat diffundeert, kunnen worden aangegeven door de formule:

$$Q = \frac{8\,u_0\,q\,h}{\pi^2} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\cos \frac{2p+1}{2h} \pi h'}{(2p+1)^2} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{2p+1}{2h}\pi\right)^2 kT} \right\}$$

waarin h de hoogte van den cilinder voorstelt, h_1 den afstand van den bovenrand van den cilinder tot het spiegelend scheidingsvlak tusschen de zoutoplossing en het water, u_0 de concentratie, q de doorsnede en k den diffusiecoëfficient.

Voor het geval $h_1 = {}^1/_3 h$, dat wil dus zeggen, dat de cilinder voor $^2/_3$ met zoutoplossing en voor $^1/_3$ met zuiver water is gevuld, gaat deze formule over in:

$$Q = \frac{2u_0qh}{3} - \frac{4\sqrt{3}\,u_0qh}{\pi^2} \left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{49} e^{-\left(\frac{7\pi}{2h}\right)^2 kT} + \text{enz.} \right\}$$

*) POGGEND, *Ann.* Bd. 100. S. 217.

†) POGGEND, *Ann.* Bd. 130. S. 227, 393.

§) *Jahresbericht f. Chemie*, 1866. S. 71.

**) WIEDEMANN's *Ann.*, Bd. 2. S. 24.

††) *Wiener Akad.Ber.*, Bd. 78. S. 957.

Aangezien aanvankelijk in den cilinder voorhanden was een hoeveelheid zout $Q_0 = \frac{2\, u_0\, q h}{3}$. bedraagt dus de teruggebleven hoeveelheid:

$$Q_0 - Q = \frac{4\sqrt{3}\, u_0\, q h}{\pi^2} \left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \text{enz.} \right\}.$$

Uitgedrukt in deelen van de oorspronkelijk aanwezige hoeveelheid vindt men dus voor het teruggebleven gedeelte:

$$\frac{Q_0 - Q}{Q_0} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} \left\{ e^{-\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 kT} - \frac{1}{25} e^{-\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2 kT} - \text{enz.} \right\}.$$

Volgens SIMMLER en WILD zoude het voldoende zijn in de meeste gevallen alleen den eersten term dezer reeks in rekening te brengen. Beter is het echter voorzeker eens vooral een tabel op te maken voor de correspondeerende waarden van $\frac{Q_0 - Q}{Q_0}$ en $\frac{kT}{h^2}$, berekend voor zoo ver noodig is, uit de geheele reeksontwikkeling.

Deze tabel kan dan, mits men zich aan de voorwaarde om $h_1 = {}^1/_3 h$ te kiezen, wil binden, voor alle toekomstige diffusieproeven van den hier besproken aard dienen, en maakt dan verdere berekening overbodig. Deze tabel werd op mijn verzoek door mijn toenmaligen collega Dr. KORTEWEG berekend en is als tabel I in dit verslag opgenomen. Daarin geeft dan de eerste kolom aan het deel der stof, dat na diffusie in den cilinder werd teruggevonden, de tweede de daaraan correspondeerende waarde $\frac{kT}{h^2}$, waaruit dus door vermenigvuldiging met h^2 en deeling door T de waarde van den diffusiecoëfficient k onmiddelijk kon worden afgeleid, en de derde het verschil tusschen twee opvolgende termen. Tusschenliggende waarden werden door rechtlijnige interpolatie berekend. De voorwaarden, waaraan de proeven moeten voldoen, zijn dus deze: dat er gezorgd wordt, dat uit den verticaal geplaatsten cilinder onder geen zout kan uittreden en dat aan zijn niveau steeds de concentratie o blijft bestaan.

Om hieraan te voldoen stellen SIMMLER en WILD een

kleine wijziging voor in de door GRAHAM *) en later ook door MARIGNAC †) gevolgde methode in dien zin, dat de cilinders niet op den bodem van het omringende watervat worden geplaatst, maar daarin zoo hoog mogelijk. Het zout toch, dat in het omringende water diffundeert, zal zwaarder zijnde dan dit, daarin naar beneden zakken, maar eens beneden aangekomen door diffusie weer trachten op te stijgen; hoe grooter dus het hoogteverschil wordt tusschen den bodem van het buitenste watervat en het niveau van het cilindertje, hoe langer tijd het zout voor het doorloopen van dien weg zal noodig hebben, en hoe meer dus dan de omstandigheden, waaronder de proeven genomen worden, aan de onderstellingen, bij de ontwikkeling der formule gebezigd, beantwoorden.

Uit eenige cilinderglaasjes met vlakken bodem en vlak afgeslepen rand werden de beste uitgezocht en daarvan volumen en hoogte bepaald. Het volumen a. v. Het cilindertje, met water geheel gevuld, door een glazen plaat gesloten en buiten goed afgedroogd, werd op de balans geplaatst en door gewichten op de andere schaal in evenwicht gehouden; daarop het cilindertje geledigd, evenals de glazen plaat goed gedroogd, weer op de balans geplaatst en nu uit een buret, die ook later altijd tot het vullen der cilinders voor de diffusieproeven werd gebezigd, zoolang water aan het cilindertje toegevoegd tot de balans weer in evenwicht was gekomen.

De hoogte van de cilinders bepaalde ik door het meten van de langste lijn, die in den cilinder kan worden getrokken; ik bewoog daartoe een rechte breipriem langs den cilinderrand en mat den afstand van het uiteinde van de priem tot de aldus verkregen uiterste kras met behulp van een nonius. Voor elken cilinder werd die lijn op vier verschillende punten bepaald en daarvan het gemiddelde genomen. Uit het volumen $V = \pi h R^2$ en deze lijn $S = \sqrt{h^2 + 4R^2}$ werd dan de waarde van h berekend.

---

*) *Ann. d. Chem. u. Pharm.* Bd. 77, S. 56, 129; Bd. 80, S. 197.

†) *Ann. Chim. et Phys.* (5) T 2. pg. 546 *of Compt. Rend* T. 78. pg. 1523.

De volgende tabel geeft in de eerste kolom het teeken van het cilinderglaasje, in de tweede het aantal c.M³ water dat het vult; in de derde het gemiddelde der gemeten schuinsche lijnen in c.M.; in de vierde de hoogte in c.M.; in de vijfde het kwadraat van de hoogte; in de zesde het kwadraat van den straal.

	$hR^2\pi$	$\sqrt{h^2+4R^2}$	h	h^2	R^2
A.	88.95	10.21	9.61	92.4	2.96
B.	96.8	10.095	9.42	88.7	3.29
D.	93.3	10.15	9.51	90.4	3.14
F.	94.15	10.15	9.51	90.4	3.14
G.	97.8	10.22	9.56	91.4	3.25
H.	93.3	10.02	9.37	87.8	3.155
K.	91.5	10.08	9.45	89.3	3.08
N.	96.95	10.31	9.67	93.5	3.20
O.	94.2	10.10	9.45	89.3	3.175

Vooreerst moest nu worden uitgemaakt, in hoeverre de methode vertrouwbare waarden voor den diffusiecoëfficient oplevert. Te meer was dit noodig, daar afgezien van experimenteele moeilijkheden, ook een theoretisch bezwaar tegen de methode zoude kunnen worden ingebracht. Het is toch twijfelachtig of de formule:

$$dS = k.\, q.\, \frac{du}{dx}.\, dt.,$$

die voorzeker geldig zal zijn, zoodra eenmaal door diffusie een geleidelijke overgang in concentratie tusschen de zoutoplossing en het gedestilleerde water is verkregen, ook reeds gedurende de eerste periode der diffusie mag worden toegepast, wanneer op de spiegelende grens der vloeistoffen een plotselinge verandering in concentratie voorkomt, en dus $\frac{du}{dx}$ aanzienlijke waarden verkrijgt.

De proeven, die ik daartoe nam met oplossingen van zoutzuur, dat tot de snelst diffundeerende stoffen behoort,

waarbij de duur der proeven van 1 tot 18 dagen, de teruggebleven hoeveelheid zoutzuur van 97 pCt. tot 39 pCt. afwisselt, en waarbij overeenstemmende waarden van k werden verkregen, bewijzen echter, dat die afwijking zoo ze bestaat bij proeven van niet al te korten duur, allen invloed op de uitkomst verliest. Wel schijnen eenige der proeven, waarbij de diffusie slechts gedurende één dag plaats had, er op te wijzen, dat de diffusie aanvankelijk iets sneller plaats vindt dan later; maar men moet hierbij niet vergeten, dat juist bij deze proeven een kleine fout in de bepaling van het in den cilinder teruggebleven deel een grooten invloed op de waarde van k uitoefent.

De proeven werden ingericht als volgt. Met behulp van bovengenoemde buret werden de cilinders juist tot $^2/_3$ gevuld; ik plaatste ze daarna in groote cilinderglazen, waarin op een afstand van ongeveer 12 c.M. van den bovenwand twee glazen staven, die aan hun uiteinden door kurken verbonden waren, horizontaal waren geplaatst. De kurken drukken stevig tegen den glaswand aan en vormen zoodoende met de twee staven een stevige onderlaag, waarop de cilinders konden worden geplaatst; bovendien kan deze brug gemakkelijk worden verschoven en telkens er voor worden gezorgd, dat de cilinders verticaal komen te staan; het volumen van de groote cilinderglazen was ongeveer $3^1/_2$ liter; de gebruikte oplossing diffundeerde dus in ongeveer de 40-voudige hoeveelheid water; de cilinderglazen werden geplaatst in groote houten kisten, die om hen zooveel mogelijk tegen temperatuurwisselingen te beschermen, over de binnenwanden met een dikke laag hooi en stroo waren bekleed, en in een kelder waren geplaatst. Daarop werden de cilinderglazen voor een groot gedeelte met water gevuld, het voor $^2/_3$ gevulde cilindertje daarin geplaatst, en na een paar uren, wanneer ik kon aannemen, dat de inhoud van het cilinderglaasje de keldertemperatuur had aangenomen met het vullen daarvan begonnen. Ik liet daartoe op de oplossing in het cilindertje een vochtig kurkschijfje drijven, waarin loodrecht een dun glazen staafje was bevestigd, liet daarop uit een reageerbuisje, waarvan de bodem tot een lange dunne

capillair was uitgetrokken, langzaam water langs het staafje bijdruppelen, nadat het buisje zelf in een statief was vastgeklemd en het uiteinde van zijn capillair tegen het staafje was geplaatst. Men bereikt aldus een volkomen spiegelend oppervlak. Was dan na ongeveer een half uur het cilindertje gevuld, dan werd het groote cilinderglas tot bijna aan het niveau van het cilinderglaasje met zuiver water (dat in een groote flesch in den kelder werd bewaard) aangevuld, en daarna met behulp van een pipet langzaam en voorzichtig zooveel water toegevoegd, dat dit ongeveer $^1/_2$ c.M. boven den rand van het cilinderglaasje kwam te staan. Wanneer de diffusie zou worden gestaakt, werd snel het cilindertje met behulp van een glazen plaatje gesloten, daarop uit het water genomen en, nadat het uitwendig geheel met water was afgespoeld, in een schaaltje geledigd en daarop tot 250 c.M^3 verdund. De duur der proeven strekte zich over een tijdsverloop van 1—20 dagen uit; de daarbij opgegeven temperatuur geeft het gemiddelde van de gedurende den duur der diffusie waargenomen temperaturen; de grootste afwisselingen, die aan de thermometers, die boven de kisten waren geplaatst, werden waargenomen, bedroegen 2—3^0.

Van de voor de diffusie gebruikte oplossingen werden in den regel eveneens 50 c.M^3 tot 250 verdund; de vloeistoffen komen onder deze omstandigheden voor en na de diffusie vrij wel in sterkte overeen, en fouten in de quantitatieve bepaling worden daardoor zooveel mogelijk verwijderd. Bij de titratie van zuren gebruikte ik als indicator phenolphtaleïn, waarvan ik volgens het bekende voorschrift 1 deel in 30 dln. alcohol oploste en voor elke 100 c.M^3 der te titreeren vloeistof 1 of 2 druppels bezigde; met behulp van 1 druppel $^1/_{10}$ normaal natronloog is de overgang van de zure in de alkalische reactie der vloeistof alsdan gemakkelijk waar te nemen. Nadat de bruikbaarheid der methode voor het zoutzuur was gebleken, heb ik voor eenige verbindingen de grootte van de diffusieconstante getracht te bepalen; de verkregen resultaten zijn in de volgende tabellen vervat.

Zoutzuur.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ gebruikt zuur tot 250 c.M³ verdund, is:	inhoud diffusieglaasje tot 250 c.M³ verdund, is:	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temperat.	diff. const.
N.	64.6 c.M³ H Cl	1 c.M³ zuur = 2.1 c.M³ KOH	1 c.M³ zuur = 2.64 c.M³ KOH	1ᵈ 1ᵘ	0.9730	$7\frac{1}{2}^0$	2.57
H.	62.2 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.42 » »	1 $23\frac{1}{4}$	0.9263	$7\frac{1}{2}^0$	2.28
D.	62.2 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.33 » »	3 $\frac{1}{4}$	0.8919	$7\frac{1}{2}^0$	2.01
D.	62.2 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.22 » »	3 $23\frac{1}{4}$	0.8498	$7\frac{1}{2}^0$	1.98
F.	62.8 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 2.07 » »	5 $\frac{5}{6}$	0.7848	$7\frac{1}{2}^0$	2.14
K.	61 » »	1 » » = 2.1 » »	1 » » = 1.91 » »	6 $2\frac{11}{12}$	0.7455	$7\frac{1}{2}^0$	2.04
A.	59.3 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.71 » »	8 $2\frac{2}{3}$	0.6833	8^0	2.00
K.	61 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.55 » »	10 $2\frac{11}{12}$	0.6021	8^0	2.00
D.	62.2 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.45 » »	12 $\frac{3}{10}$	0.5524	8^0	1.97
O.	62.8 » »	1 » » = 2.65 † » »	1 » » = 2.85 † » »	3 $1\frac{1}{12}$	0.8563	$8\frac{1}{2}^0$	2.45
H.	62.2 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.18 » »	14 $\frac{1}{2}$	0.4495	$8\frac{1}{2}^0$	2.16
F.	62.8 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.15 » »	16 $1\frac{7}{10}$	0.4339	$8\frac{1}{2}^0$	2.03
G.	65.2 » »	1 » » = 2.11 » »	1 » » = 1.07 » »	17 $19\frac{5}{6}$	0.3889	$8\frac{1}{2}^0$	2.07
K.	61 » »	1 » » = 2.575 » »	1 » » = 3.074 » »	1 $2\frac{5}{6}$	0.9785	9^0	2.06
A.	59.3 » »	1 » » = 2.575 » »	1 » » = 2.878 » »	1 $19\frac{5}{6}$	0.9424	9^0	2.21
D.	62.2 » »	1 » » = 1.275 » Na OH	1 » » = 1.104 » Na OH	6 $1\frac{3}{20}$	0.6960	$15\frac{1}{2}^0$	2.51
H.	62.2 » »	1 » » = 1.32 » »	1 » » = 1.0363 » »	6 23	0.6313	$15\frac{1}{2}^0$	2.62

† Deze werden niet tot 250 maar tot 500 c.M³ verdund.

Bij de eerste zes cilinders had de gebezigde zoutzuuroplossing ongeveer 1.04 s. g; bij N⁰. 7, 8, 9, 11, 12 en 13 was ze iets sterker; bij N⁰. 10 ongeveer 1.10; bij 14 en 15 ongeveer 1.05 en bij 16 en 17 weer ongeveer 1.04.

Vergelijken we de waarden voor den diffusiecoeëfficient in de bovenstaande proeven verkregen, dan komt het mij wenschelijk voor de proeven zoo lang voort te zetten tot minstens ongeveer 10 pCt. is gediffundeerd. Bij dezelfde fout in de quantitatieve bepaling wordt dan ook de invloed daarvan op de grootte van den coëfficient zooals die uit de waarde $\frac{kT}{h^2}$ wordt berekend, kleiner naar mate meer is gediffundeerd; maar 10 pCt. schijnt mij voldoende toe om tot zekere resultaten te geraken.

Zuringzuur.

Het herhaalde malen uit water omgekristalliseerde zuur liet na verhitten op een platinablikje niets terug.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ zuur tot 250 verdund is 1 c.M³ =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund is 1 c M³ =	duur	diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
G.	65.2 c.M³	0.616 c.M³ KOH	0.658 c.M³ KOH	12ᵈ	$21\frac{1}{4}$ᵘ	0.8191	$7\frac{1}{2}$⁰	0.72
A.	50.3 〃	0.956 〃 〃	0.976 〃 〃	10	$23\frac{2}{3}$	0.8608	$7\frac{1}{2}$⁰	0.686
O.	62.8 〃	0.642 〃 〃	0.713 〃 〃	8	23	0.8842	$7\frac{1}{2}$⁰	0.70

De oplossing van het zuur in A was ongeveer van 6 pCt., in G en O ongeveer van 4 pCt. sterkte.

Azijnzuur.

Uit een groote hoeveelheid ijsazijn werd zuivere azijn door gefractioneerde destillatie afgescheiden en dit in water opgelost tot de sterkte van de oplossing ongeveer 8 pCt. bedroeg.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ zuur verdund tot 250, is 1 c.M³ =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
K.	61 c.M³	1.77 c.M³ KOH	1.87 c.M³ KOH	11d	0.8659	8°	0.64
F.	62.8 "	2.05 " "	2.22 " "	11	0.8622	8°	0.66
D.	62.2 "	1.97 " "	2.1 " "	11	0.8569	8°	0.68
F.	62.8 "	†0. " NaOH	0.835 " NaOH	12 21½u	0.7978	14½°	0.79
G.	65.2 "	†0.5 " "	0.847 " "	12 21½	0.7794	14½°	0.86
N.	64.6 "	†0.5 " "	0.873 " "	12 21¼	0.8109	14½°	0.77

† Hier werden 30 c.M³ van de gebruikte azijnzuuroplossing tot 250 verdund.

Citroenzuur.

Gewoon citroenzuur werd herhaalde malen uit water omgekristalliseerd, daarop tusschen filtreerpapier droog geperst en oplossingen bereid van ongeveer 5 en 9 pCt. Na 12 dagen werd de diffusie gestaakt om door intredende schimmelvorming geen onzekerheid in de resultaten te verkrijgen.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ zuur verdund tot 250, is 1 c.M³ =	inh. diff. cilinder tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
G.	65.2 c.M³	0.629 c.M³ KOH	0.74 c.M³ KOH	12d 22²/₁₅u	0.9022	9°	0.44
A.	59.3 "	0.629 " "	0.68 " "	12 22¹¹/₁₂	0.9115	9°	0 41
F.	62.8 "	†1.118 " "	1.287 " "	12 23¹/₁₂	0.9130	9°	0.40

† is verdund tot 251 c.M³.

Wijnsteenzuur.

Het zuur uit den handel werd eveneens herhaalde malen omgekristalliseerd, tusschen filtreerpapier gedroogd en dan oplossingen bereid van ongeveer 4 en 7 pCt.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ zuur tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
D.	62.2 c.M³	0.845 c.M³ KOH	0.806 c.M³ KOH	26d 23$\frac{3}{4}$u	0.7668	9°	0.43
H.	62.2 〃	0.845 〃 〃	0.776 〃 〃	26 3$\frac{7}{12}$	0.7382	9°	0.48
O.	62.8 〃	0.498 〃 〃	0.4965 〃 〃	22 23$\frac{7}{12}$	0.7938	9°	0 45
K.	61 〃	0.498 〃 〃	0.482 〃 〃	22 3$\frac{7}{12}$	0.7934	9°	0.46

Barnsteenzuur.

Ook dit zuur werd herhaaldelijk omgekristalliseerd; de gebruikte oplossing bevatte ongeveer 5 pCt.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ tot 250 verdund, is 1 c.M³ zuur =	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
K.	61 c.M³	0.393 c.M³ KOH	0.382† c.M³ KOH	18d $\frac{5}{12}$u	0.7999	15°	0.55
D.	62.2 〃	0.393 〃 〃	0.395 〃 〃	17 23$\frac{1}{2}$	0.8080	15°	0.54
A.	59.3 〃	0.393 〃 〃	0.377 〃 〃	18 $\frac{1}{4}$	0.8089	15°	0.55

† is verdund tot 251 c.M³.

Manniet.

Manniet uit de fabriek van KAHLBAUM afkomstig werd nog eens uit alcohol omgekristalliseerd, daarop gedroogd en in water opgelost. De hoeveelheid opgeloste manniet werd bepaald door indampen van een afgemeten volumen der oplossing in een platinaschaal op het waterbad en drogen tot constant gewicht bij 100°.

Cilinder.	gevuld met	50 c.M³ der gebruikte opl. bevatten	de in 't diff. cilindertje nog voorhanden hoeveelh. bedroeg	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. cons
A.	59.3 c.M³	2.2113 gr.	2.1840 gr.	23d 2$\frac{2}{3}$u	0.8328	10°	0.38
F.	62.8 〃	2.2113 〃	2.2033 〃	27 3$\frac{5}{12}$	0.7933	10°	0.38
G.	65.2 〃	2.2113 〃	2.4054 〃	21 23$\frac{1}{12}$	0.8342	10°	0.39

Natriumacetaat.

Het zout werd herhaaldelijk ongekristalliseerd en daarna oplossingen van verschillende sterkte bereid. De hoeveelheid zout werd bepaald door indampen van een afgemeten volumen der oplossing met een overmaat van zoutzuur, gloeien en wegen.

Cilinder.	gevuld met	van 50 c.M³ der opl. die tot 250 werden verdund, leveren	inh. diff. glaasje tot 250 verdund, leveren	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel.	temp.	diff. const.
D.	62.2 c.M³	20 c.M³ 0.2480 gr.	20 c.M³ 0.2081 gr.	23ᵈ 21 $^{7}/_{10}$ ᵘ	0.6745	14°	0.68
A.	59.3 〃	20 〃 0.2480 〃	20 〃 0.2145 〃	19 22 $^{8}/_{15}$	0.7293	14°	0.69
F.	62.8 〃	50 〃 0.4734 〃	50 〃 0.3869 〃	24 22	0.6507	15°	0.71
K.	61 〃	50 〃 0.1962 〃	50 〃 0.1590 〃	23 22 $^{37}/_{60}$	0.6643	14°	0.70
G.	65.2 〃	50 〃 0.3725 〃	50 〃 0.3186 〃	24 21 $^{7}/_{12}$	0.6559	15°	0.70
N.	64.6 〃	50 〃 0.9294 〃	50 〃 0.8351 〃	24 21 $^{5}/_{6}$	0.6954	15°	0.63
H.	62.2 〃	50 〃 0.3521 〃	50 〃 0.2614 〃	26 22	0.5968	14°	0.75

in A en D waren dus voorhanden in 100 c.M³ zoutoplossing 8.68 gr. $C_2H_3O_2Na$

〃 F was 〃 〃 〃 〃 〃 〃 6.63 〃 〃

〃 K 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 2.75 〃 〃

〃 G 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 5.21 〃 〃

〃 N 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 13.01 〃 〃

〃 H 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 4.93 〃 〃

Chloraalhydraat.

Van chloraalhydraat, dat eenige malen uit zwavelkoolstof was omgekristalliseerd, werden 2 oplossingen bereid, de eene van ongeveer 5 pCt. de andere van ongeveer 8 pCt. Het opgeloste chloraalhydraat werd quantitatief bepaald naar de methode van VICTOR MEYER *) door ontleding door een bekende hoeveelheid normaalnatronloog en titreeren van de

---

*) *Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch.* Bd. 6. S 600.

overmaat der gebruikte base door zuringzuuroplossing. 50 c.M³ van de gebruikte oplossingen werden evenals de inhoud der diffusiecilindertjes tot 250 c.M³ verdund en daarop 100 of 150 c.M³ dezer oplossingen voor de ontleding door normaalnatronloog gebezigd.

Cilinder	gevuld met	A 100 c.M³ gebruikte opl. + 60 c.M³ Na OH in tot 250 verdund, is 1 c.M³ =	B 100 c.M³ gediff. opl. + 60 c M³ Na OH tot 250 verdund : is 1 c.M³ =	in A corresp. de nog voorhanden hoev. Na OH aan : ††	in B corresp. de nog voorhanden hoev. Na OH aan : ††	de totaal verdwenen hoev. Na OH corr. in gebruikte opl. aan:	de totaal verdwenen hoev. Na OH corresp. in 't diffusie cilindertje aan :	duur diff.	in 't diff. cilindertje teruggebleven deel.	temp.	diff. const
	c M³	c.M³ zuur	c.M³ zuur	c.M³ zuur	c.M³ zuur	c.M³	c M³				
H.	62.2	0.8437	0.827	210.925	206.75	111.31	121.75	11ᵈ 19¹/₆ᵘ	0.8793	9⁰	0.54
O.	62.8	0.8437	0.730†	210.925	182.50	111.31	121.58	13 19	0.8697	9⁰	0.50
D.	62.2	0.8634†	0.903	215.85	225.75	66.0	74.25	9 23	0.9044	9⁰	0.55
K.	61.	0.8634†	0.9105	215.85	227.625	66.0	69.56	12 23¹¹/₁₂	0.8639	9⁰	0.55

† hier werden 150 c.M³ chloraalhydraatopl. met 60 c.M³ natronloog tot 250 c.M³ verdund

†† Werden de 60 c.M³ natronloogoplossing tot 250 c.M³ verdund, dan was 1 c.M³ natronloog = 1.0218 c.M³ zuur.

Chloorammonium.

Het gebruikte zout was vooraf eenige malen uit warm water omgekristalliseerd. De sterkte der oplossing bedroeg 4.66 pCt.

Cilinder	gevuld met	van 50 cM³ opl. verdund tot 250, leveren 50 c M³ na indampen en drogen tot const gew. bij 100⁰	inhoud diff. glaasje tot 250 verdund, leveren 50 c.M³ na indampen en drogen tot const gew. bij 100⁰	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel	temp.	diff. const
F.	62.8 c.M³	0.4659 gram	0.2733 gram	22ᵈ 23⁵/₆ᵘ	0.4670	17¹/₂⁰	1.296
G.	65.2 „	0.4659 „	0.3228 „	18 21¹/₁₂	0.5313	17¹/₂⁰	1.34
N.	64.6 „	0.4659 „	0.2868 „	23	0.4764	17¹/₂⁰	1.307

Mogen ook sommige resultaten onderling vrij sterke afwijkingen soms vertoonen, toch geloof ik uit de medege-

deelde proeven te mogen afleiden, dat de methode, zooals die in het bovenstaande is meegedeeld tot bruikbare resultaten leidt. Dat afwijkingen in de proeven onderling moeten voorkomen is met het oog op het tal van waarnemingsfouten, die bij den gang der proeven kunnen insluipen, te voorzien; stroomingen ten gevolge van temperatuurwisselingen, die gedurende een tijdsverloop van 20 dagen wel niet te vermijden zijn; geringe storingen bij het over elkaar gieten der vloeistoffen in het cilinderglaasje, ook al vindt dit met de grootste omzichtigheid plaats, laten moeilijk altijd een volledige overeenstemming in de voor k verkregen waarden toe. De proeven worden voortgezet in den boven aangegeven zin alleen met korter cilinders dan de gebezigde, in de hoop daardoor de fouten, die aan stroomingen ten gevolge van intredende temperatuurwisselingen te wijten zijn, door korter duur der proeven te verkleinen.

In de aan dit verslag toegevoegde tabel II zijn de resultaten van de boven meegedeelde proeven en die van de proeven van GRAHAM *), zooals STEFAN †) die onlangs berekend heeft, samengesteld.

Onderzoekingen over de diffusiesnelheid van zouten zijn in den laatsten tijd medegedeeld door SCHUHMEISTER §) en LONG **).

Een vergelijking tusschen de door andere onderzoekers en de door mij gevonden waarden voor den diffusiecoëfficient is bij het voorhanden materiaal alleen mogelijk voor chloorammonium en zoutzuur.

SCHUHMEISTER vond $k = 1.33$ voor een chloorammoniumoplossing van 12 $^0/_0$ sterkte bij de temperatuur $20\frac{1}{2}^0$; ik vond $k = 1.32$ voor een chloorammoniumoplossing van $4.66^0/_0$ sterkte bij de temp. $17\frac{1}{2}^0$.

GRAHAM vond voor de diffusieconstante van zoutzuur bij

---

*) *Ann. d. Chem. u. Pharm.* Bd. 121.

†) *Wiener Akad. Ber.* Bd. 79.

§) *Wiener Akad. Ber.* Bd. 79. S 603.

**) Zijn proefschrift. *On the diffusion of liquids,* 1879. Tübingen H. Laupp.

de temp 5^0 $k = 1.742$; als het gemiddelde van 13 waarnemingen bij de gemiddelde temp 8^0, en van 2 waarnemingen bij de temperatuur $15\frac{1}{2}^0$, bereken ik $k_8 = 2.07$ en $k_{15\cdot5} = 2.57$. Om een vergelijking mogelijk te maken, neem ik aan, dat binnen de grenzen 5^0—15.5^0 de diffusiesnelheid met de temperatuur toeneemt volgens de formule $k_t = k_0 (1+\alpha t)$. Bereken ik dan uit mijn proeven: $2.07 = k_0 (1+8\alpha)$ en $2.57 = k_0 (1 + 15\frac{1}{2}\alpha)$, $k_0 = 1.35$ en $\alpha = 0.066$, dan volgt daaruit voor $k_5 = 1.77$, hetgeen met de door GRAHAM bij die temperatuur gevonden waarde overeenstemt.

Ik begon mijn onderzoek met het doel een poging in het werk te stellen voor het nagaan van den invloed van het moleculair gewicht en moleculair volumen en misschien ook van de structuur der verbinding op haar diffusiesnelheid; daarom heb ik als stoffen gekozen, waarover het voortgezet onderzoek zich vooreerst zal uitstrekken, eenige homologe verbindingen als natriumzouten van vetzuren en aromatische zuren, eenige phenolen en sulfozuren.

Ook voor eenige »physische" isomeren als rechts en links wijnsteenzuur, druivezuur zullen onder gelijke omstandigheden de diffusieconstanten worden bepaald.

Breda, November 1881.

TABEL I.

$\frac{Q_0-Q}{Q_0}$	$\frac{kT}{h^2}$	D
1.00	0.00000	
0.99	0.01865	—630
0.98	0.02495	—538
0.97	0 03033	—500
0.96	0.03533	—479
0.95	0.04012	—468
0.94	0.04480	—463
0.93	0.04943	—459
0.92	0.05402	—460
0.91	0.05862	—461
0.90	0.06323	—461
0.89	0.06784	—465
0.88	0.07249	—469
0.87	0.07718	—473
0.86	0.08191	—477
0.85	0.08668	—482
0.84	0.09150	—487
0.83	0.09637	—493
0.82	0.10130	—498
0.81	0.10628	—504
0.80	0.11132	—511
0.79	0.11643	—518
0.78	0.12161	—523
0.77	0.12684	—530
0.76	0.13214	—537
0.75	0.13751	—544
0.74	0.14295	—551
0.73	0.14846	—559
0.72	0 15405	—567
0.71	0.15972	—575
0.70	0.16547	—583
0.69	0.17130	—592

$\frac{Q_0-Q}{Q_0}$	$\frac{kT}{h^2}$	$D.$
		— 592
0.68	0.17722	— 601
0.67	0.18323	— 609
0.66	0.18932	— 618
0.65	0 19550	— 628
0.64	0.20178	— 639
0.63	0 20817	— 649
0.62	0.21466	— 659
0.61	0.22125	— 670
0.60	0.22795	— 681
0.59	0.23476	— 692
0.58	0.24168	— 705
0.57	0.24873	— 717
0.56	0.25590	— 730
0.55	0.26320	— 744
0.54	0.27064	— 757
0.53	0.27821	— 774
0.52	0.28595	— 787
0.51	0.29382	— 802
0.50	0.30184	— 818
0.49	0.31002	— 836
0.48	0.31838	— 854
0.47	0.32692	— 871
0.46	0.33563	— 891
0.45	0.34454	— 911
0.44	0.35365	— 931
0.43	0.36296	— 954
0.42	0.37250	— 977
0.41	0.38227	—1001
0.40	0.39228	—1026
0.39	0.40254	—1052
0.38	0.41306	

TABEL II.

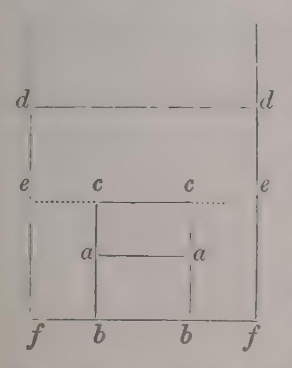
		Formule.	Mol. gew.	Mol. vol.	Diff. const.	temp.	
1.	Zoutzuur	HCl	36.5		1.742	5°	GRAHAM
	"	"	"		2.07	8°	SCHEFFER
	"	"	"		2.56	15½°	"
2.	Chloorammonium	NH^4Cl	53.5	35.2[1]	1.31	17½°	"
3.	Chloornatrium . .	NaCl	58.5	26.2[1]	0.76	5°	GRAHAM
	"	"	"	"	0.91	10°	"
4.	Azijnzuur	$C_2H_4O_2$	60		0.66	8°	SCHEFFER
	"	"	"		0.78	14½°	"
5.	Barnsteenzuur. . .	$C_4H_6O_4$	118	75.3[1]	0.55	15°	"
6.	Zuringzuur	$C_2O_4H_2$ 2 aq	126	76.4[1]	0.71	7½°	"
7.	Azijnzuurnatrium	$C_2H_3O_2Na$ 3 aq	136	97.2[1]	0.69	15°	"
8.	Wijnsteenzuur . .	$C_4H_6O_6$	150	85.7[1]	0.45	9°	"
9.	Chloraalhydraat .	C_2Cl_3OH. aq	165.5	91.0[1]	0.55	9°	"
10.	Manniet.	$C_6H_{14}O_6$	182	122.5[1]	0.38	10°	"
11.	Citroenzuur. . . .	$C_6H_8O_7$	192	135.2[2]	0.41	9°	"
12.	Magnesiumsulfaat	$MgSO_4$ 7 aq	246		0.354	10°	GRAHAM
13.	Rietsuiker.	$C_{12}H_{22}O_{11}$	342	215.4[1]	0.312	9½°	"
14.	Arab. gom	$(C_6H_{10}O_5)x$	162.x		0.13	10°	"
15.	Looizuur	—	—		0.101	10°	"
16.	Caramel	—	—		0.047	10½°	"
17.	Albumine.	—	—		0.063	13°	"

[1] Ontleend aan de opgaven van SCHRÖDER. *Ber. d. deutsch. Chem. Ges.* Bd. 10. S. 851 en Bd. 12. S. 120, 562.

[2] Berekend naar BUIGNET's opgave van 't s. g. 1.553 voor $C_6H_8O_7$, H_2O.

NASCHRIFT.

De Heeren VAN BEMMELEN en DIBBITS voeren in hun verslag over mijn verhandeling als bezwaar tegen de door mij gevolgde methode van experimenteeren aan de geringe hoogte van het water boven de cilinders en vreezen, dat dit belemmerend op de diffusie gewerkt moet hebben. Ik stelde daarom nog de volgende proeven in het werk om na te gaan, in hoeverre het meer of minder diep geplaatst zijn van den cilinder onder het water-niveau al of niet invloed heeft op de voor k verkregen waarden. Ik plaatste daartoe op den bodem van een bekerglas een cilindertje, dat voor een deel met een indigo-oplossing was gevuld. vulde daarop als boven beschreven het cilindertje met water aan. en daarna ook de ruimte tusschen bekerglas en cilinder tot het ongeveer 3 cM. boven het oppervlak van den cylinder kwam te staan. Het blijkt mij nu, dat de donkerblauwe vloeistof in *aabb* langzaam overgaat in het water; dat *aacc* zeer licht blaauw wordt gekleurd, terwijl in het boven *cc* aanwezige water geen blauwkleuring is waar te nemen, maar wel in het water *eeff*, en wel toenemende, naar mate men een laag dichter bij den bodem van het bekerglas waarneemt. Eerst na geruimen tijd, wanneer het water in *eeff*, sterk blauw is geworden, verheft zich de blauwe kleurstof ook boven de lijn *ecce*.



Bij de drie volgende proeven met zoutzuur, waarbij de cilinders op verschillende diepte onder den waterspiegel wa-

ren geplaatst, gebruikte ik cilinders van de volgende afmetingen.

	$h \pi r^2$	$\sqrt{h^2 + 4r^2}$	h	h^2	r
1.	55.41 c.M³.	6.08 c.M³.	4.65	21.62	1.94
6.	48.95 »	5.86 »	4.54	20.61	1.85
7.	53.12 »	6.03 »	4.68	21 90	1.90

De resultaten van de proeven, die op gelijke wijze als de boven beschreven werden uitgevoerd, zijn in het volgende tabelletje vervat.

Cilinder	gevuld met c.M³ zuur	32 c.M³ gebruikt zuur tot 125 c.M³ verdund is 1 c M³ zuur = c.M³Na OH	rest diffusiecilinder tot 125 c M³ verdund is 1 c.M³ zuur = c.M³Na OH	diepte cilinder onder waterspiegel	duur diff.	in 't diff. glaasje teruggebleven deel	temp.	diff. const.
1.	36.9	1.222	0.650	$21\frac{1}{2}$ m.M.	$3^d\ 22\frac{1}{4}^u$	0.4613	$6\frac{1}{2}^0$	1.842
6.	32.6	1.222	0.549	$5\frac{1}{2}$ 〃	3 $21\frac{1}{2}$	0.4410	$6\frac{1}{2}^0$	1.866
7.	35.4	1.222	0.618	12 〃	3 $22\frac{1}{6}$	0.4572	$6\frac{1}{2}^0$	1.887

Het komt mij voor dat deze proeven, zoowel als de indigoproef, de door de Heeren VAN BEMMELEN en DIBBITS geopperde bedenking tegen de juistheid van de door mij bepaalde waarden van de diffusieconstanten der onderzochte stoffen, weerleggen en aantoonen dat de waterhoogte van ongeveer $\frac{1}{2}$ c M boven de cilinders voldoende is geweest om tot juiste waarden te geraken.

Veendam, Januari '82.

.RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

VAN DEN HEER

T. J. STIELTJES Jr.:

„BIJDRAGE TOT DE THEORIE DER DERDE- EN VIERDE-MACHTSRESTEN".

Uitgebracht in de Vergadering van 28 Januari 1882.

Uwe commissie, aan wie de beoordeeling der Verhandeling »Bijdrage tot de theorie der derde- en vierde machtsresten van T. J. Stieltjes Jr." in de laatste vergadering opgedragen was, heeft hierbij de eer zich van hare taak te kwijten.

De schrijver stelt zich daarin voor, langs eene zich gelijkblijvende of geheel gelijksoortige methode het karakter in de getallenleer van $1 + \sqrt[2]{1} = 2$, $1 + \sqrt[3]{1} = 1 - \varrho$, $1 + \sqrt[4]{1} = 1 + i$ af te leiden, en wel met behulp van de theorie der complexe getallen; hierbij steunende op eene verhandeling van C. F. Gauss »De residuorum biquadraticorum Commentatio prima," door hem op 5 April 1825 bij de Kon. Societät der Wissenschaften te Göttingen ingediend, en waarop later wel de tweede, maar nimmer de derde verhandeling is gevolgd.

Hoezeer het bij dit afgetrokken onderwerp uit de getallenleer niet zonder bezwaren is, willen wij toch trachten u een denkbeeld te geven van het verband en de opeenvolging der redeneringen.

Bij de theorie der quadratische resten verdeelt schrijver de getallen 1 tot $(p - 1)$, waar p een priemgetal voorstelt, in twee groepen, die het quadratisch karakter 0 of 1 hebben, en vormt dan daarmede twee congruentiën van $\frac{1}{2}(p - 1)$

faktoren. Daarbij gedragen zich de vormen $4n+1$ en $4n+3$ zeer verschillend.

Bij de biquadratische resten verdeelt hij de getallen 1 tot $\mu - 1$, waar μ de norm (of modulus) is van het priemgetal M, (hier in het algemeen complex, $= a + bi$), in vier groepen, die nu het biquadratisch karakter 0, 1, 2, 3 hebben; met behulp waarvan dan vier congruentiën worden gevormd, elk van $\frac{1}{4}$ $(\mu - 1)$ factoren. Hier gedragen zich de vormen $8n+1$ en $8n+5$ weder geheel anders.

In beide theoriën telt hij nu bij de getallen van iederen groep de eenheid op: en hierbij komt het aan op die getallen, welke aan de oude en de nieuwe groepen gemeen zijn. Het aantal telkens dezer gemeenschappelijke waarden worde voorgesteld door eene afzonderlijke notatie (a, b), waar a voorstelt het nummer der groep, behoorende tot de laatste soort, en b evenzeer dat der groep van de eerste soort. Voor de beide theoriën heeft men dus de volgende schemata, geschreven in den vorm eener determinante,

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) \\ (1.0) & (1.1), \end{matrix}$$

en

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) & (0.2) & (0.3) \\ (1.0) & (1.1) & (1.2) & (1.3) \\ (2.0) & (2.1) & (2.2) & (2.3) \\ (3.0) & (3.1) & (3.2) & (8.3). \end{matrix}$$

Het komt er nu op aan, om te bewijzen, welke dezer aantallen $(a.b)$ onderling gelijk zijn.

Bij de quadratische resten, van den vorm $4n+1$ in de eerste plaats, bewijst hij eerst, dat $(0.1) = (1.0)$, later dat $(1.1) = (0.1)$ is. Dit heeft tengevolge, dat het bovenvermelde schema veel eenvoudiger wordt, en wel

$$\begin{matrix} h & j \\ j & j; \end{matrix}$$

en hieruit leidt hij verder af

$$4h = p - 5, \; 4j = p - 1.$$

Heeft hier het priemgetal p echter den anderen vorm $4n + 3$, dan bewijst hij evenzoo, eerst dat $(0.0) = (1.1)$, vervolgens dat $(1.0) = (0.0)$ is; zoodat hier het schema den meer eenvoudigen vorm aanneemt

$$\begin{matrix} h & j \\ h & h; \end{matrix}$$

waaruit hij verder afleidt

$$4h = p - 3,\ 4j = p + 1.$$

Bij de biquadratische resten behandelt schr. eerst den vorm $8n + 1$, en daaromtrent bewijst hij eerst de gelijkheden

$$(0.1) = (1.0),\ (0.2) = (2.0),\ (0.3) = (3.0),\ (1.2) = (2.1),$$
$$(1.3) = (3.1),\ (2.3) = (3.2);$$

en daarna weder de volgende

$$(0.1) = (3.3),\ (0.2) = (2.2),\ (0.3) = (1.1),\ (1.2) = (1.3) = (2.3).$$

Voert men deze gelijkheden alle in het schema voor de biquadratische resten in, dan wordt dit veel vereenvoudigd, en luidt aldus

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j; \end{matrix}$$

en nu is hij in staat met behulp van dit vereenvoudigd schema vijf vergelijkingen tusschen de letters h tot m te vinden, ten einde daaruit hare waarden op te lossen.

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - 3a - 5, \\ 8j &= 4n + a - 2b - 1, \\ 8k &= 4n + a - 1, \\ 8l &= 4n + a + 2b - 1, \\ 8m &= 4n - a + 1. \end{aligned}$$

Hierbij heeft het getal den vorm $a + bi$: zoodat, ingeval het bestaanbaar wordt, $b = 0$ is. In dit laatste geval verkrijgen dus j en l dezelfde waarde, terwijl zij anders slechts in het teeken van b verschillen.

Vervolgens overgaande tot den tweeden algemeenen vorm $8n + 5$, bewijst schr. wederom eerst, dat

$$(0.0) = (2.2),\quad (0.1) = (3.2),\quad (0.3) = (1.2),\quad (1.0) = (2.3),$$
$$(1.1) = (3.3),\quad (2.1) = (3.0)$$

is, en daarna, dat ook

$$(0.0) = (2.0),\quad (0.1) = (1.3),\quad (0.3) = (3.1),\quad (1.0) = (1.1) = (2.1)$$

moet zijn. Door invoering van al deze gelijkheden in het schema voor de biquadratische resten, verkrijgt men den volgenden, veel eenvoudiger vorm

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m. \end{matrix}$$

Langs dergelijken weg als vroeger tracht hij nu weder vijf vergelijkingen optemaken tusschen de grootheden, die hier door de letters h tot m worden voorgesteld, en geraakt alzoo tot de volgende uitkomsten

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1, \\ 8j &= 4n - a - 2b + 3, \\ 8k &= 4n + 3a + 3, \\ 8l &= 4n - a + 2b + 3, \\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

Ook hier bedenke men, dat het priemgetal den vorm $a+bi$ heeft, zoodat b verdwijnt, wanneer het bestaanbaar wordt; ook hier is in dit laatste geval de gelijkheid van j en l duidelijk; evenzeer, dat zij anders slechts onderscheiden zijn in het teeken van b.

Zoodra schr. nu eenmaal alle waarden (a,b) in het schema

heeft bepaald, leidt hij verder daaruit de gevallen af, wanneer 2 al of niet quadratische rest is van het priemgetal p; evenzoo, wanneer $1+i$ (en tegelijkertijd ook $1-i$, $-1-i$, $-1+i$) al of niet biquadratische rest is van n.

Daarna wordt het gevondene in toepassing gebracht, en o. a. worden de kenmerken opgezocht in de theorie der biquadratische resten, wanneer een bestaanbaar priemgetal tot een der vier vroeger genoemde groepen moet worden gebracht.

En thans gaat schr. over tot eene gelijkvormige ontwikkeling in de theorie der kubische resten. Hier zijn $a+b\varrho$ en $a+b\varrho^2$ (ϱ is zoo als gewoonlijk de complexe derdemachtswortel uit de eenheid) toegevoegde complexen, zoodat hun produkt $(a+b\varrho)(a+b\varrho^2)=a^2-ab+b^2$ de norm wordt.

In deze theorie is $3=-\varrho^2(1-\varrho)^2$ geen priemgetal. Men heeft hier twee soorten van priemgetallen. Vooreerst de bestaanbare: deze zijn van den vorm $3n-1$, met den norm $(3n-1)^2=3(3n^2-2n)+1$; en vervolgens de complexe priemfactoren van de reelle priemgetallen $3n+1$, welke laatste dan tegelijk de norm dier factoren zijn. De norm is dus altijd van den vorm $3n+1$.

Gaan wij nu verder op het voetspoor der vorige beschouwingen, dan ontmoeten wij vooreerst drie groepen met het kubische karakter 0, 1 en 2. Bij al de getallen in die groepen telt schr. wederom de eenheid bij, voert ook hier de oude notatie (a,b) in, en verkrijgt dan, overeenkomstig het vroeger behandelde, hier het schema

$$\begin{array}{ccc}(0.0) & (0.1) & (0.2)\\ (1.0) & (1.1) & (1.2)\\ (2.0) & (2.1) & (2.2);\end{array}$$

waaruit hij reeds dadelijk het kubisch karakter van $1-\varrho$, en tevens dat van $1-\varrho^2$, afleidt.

Verder bewijst hij eerst, dat hier $(0.1)=(0.0)$, $(0.2)=(2.0)$, $(1.2)=(2.1)$ is, en later dat ook $(0.1)=(2.2)$, $(0.2)=(1.1)$ is.

Door de invoering van deze vergelijkingen wordt het

schema wederom veel eenvoudiger, en verkrijgt hier de gedaante

$$\begin{matrix} h & j & k \\ j & k & l \\ k & l & j. \end{matrix}$$

Nadat hij er in geslaagd is om vier vergelijkingen optesporen, die deze letters h tot l bevatten, verkrijgt hij door eene tamelijk zamengestelde oplossing

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + A - 7, \\ 18j &= 6n - A + 3B - 2, \\ 18k &= 6n - A - 3B - 2, \\ 9l &= 3n - A + 2. \end{aligned}$$

Deze hulpgrootheden A en B hebben eene verschillende waarde bij de vroeger onderscheiden beide soorten van priemgetallen in deze theorie.

Bij de eerste soort, de bestaanbare van den vorm $3n-1$, is $A = 2M$ en $B = 0$, zoodat men heeft

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2M - 7, \\ 9j &= 3n - M - 1 = 9k, \\ 9l &= 3n + 2M + 2. \end{aligned}$$

Bij de tweede soort van priemgetallen daarentegen wordt $A = 2a - b$ en $B = b$, waarin a en b gegeven zijn in den vorm $a + b\varrho$ van het priemgetal zelf; en dan wordt

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2a - b - 7, \\ 9j &= 3n - a + 2b - 1, \\ 9k &= 3n - a - b - 1, \\ 9l &= 3n + 2a - b + 2. \end{aligned}$$

En thans bepaalt hij daaruit telkens het kubisch karakter van $1 - \varrho$ zoowel als van $1 - \varrho^2$.

Tot zoover loopt de ontwikkeling bij deze theorie der kubische resten evenwijdig aan die bij de beide vorige theoriën der quadratische en biquadratische resten.

Maar nu dringt schr. verder in de theorie der kubische resten. Na invoering der bestaanbare getallen, f en g, die congruent zijn met ϱ en ϱ^2 (Mod. M). behandelt hij nog eens de priemgetallen der tweede soort. Hij zoekt de plaats de plaats te bepalen van het getal 3 in eene der drie bovengenoemde groepen, voor bepaalde gevallen. Op dergelijke wijze doet hij dit ook voor het getal 2; maar gebruikt vervolgens de reciprociteitswet, om zulks te bewerkstelligen voor de getallen 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Uit de verschijnselen, bij deze bijzondere gevallen waargenomen, leidt schr. nu een zestal algemeene stellingen af, waarvan hij alleen de vijfde, als de meest algemeene, maar ook de meest ingewikkelde, gaat bewijzen; waarna hij nog over de zesde eenige opmerkingen geeft.

Misschien is het gelukt, om omtrent dit zoo afgetrokken onderwerp bij eenigen uwer de overtuiging te vestigen van het methodische in den gang van het onderzoek. Wanneer wij daarbij voegen, dat de discussie en de bewijsvoering blijk geeft van scherp wiskundig vernuft; dan zal het u niet bevreemden, dat wij u voorstellen, het stuk, als der Akademie ten volle waardig, in hare werken op te nemen.

Januari, 1882.

D. BIERENS DE HAAN,
C. H. C. GRINWIS.

BIJDRAGE TOT DE THEORIE

DER

DERDE- EN VIERDE-MACHTSRESTEN.

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

Het hoofd-theorema in de theorie der quadraat-resten, de zoogenaamde wet van reciprociteit, heeft betrekking op de wederkeerige verhouding van twee *oneven* priemgetallen, en in eene volledige theorie moet daarom het karakter van het getal 2 als quadraat-rest of niet-rest van een ander oneven priemgetal, afzonderlijk bepaald worden. Het getal 2 blijkt hierdoor eene bijzondere plaats onder alle priemgetallen in te nemen.

De theorema's waardoor het karakter van 2 bepaald wordt, zijn het eerst door Fermat uitgesproken *) en door Lagrange †) bewezen. Hierbij moet echter vermeld worden, dat het bewijs, door Lagrange gegeven, op geheel analoge beschouwingen berust, als die, waardoor Euler §) reeds vroeger de theorema's bewezen had die het karakter van 3 als quadraat-rest of niet-rest bepalen, en welke insgelijks reeds door Fermat waren uitgesproken. Het is daarom des te meer

---

*) *Op. Mathem.* p. 168.

†) *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin* 1775. Oeuvres Tome III. p. 759.

§) *Comment. nov. Petrop.* T. VIII. p. 105.

opmerkelijk. dat EULER steeds te vergeefs getracht heeft, de theorema's omtrent het karakter van 2 te bewijzen (Vergel. Disq. Arithm. Art. 120).

Een geheel analoog verschijnsel doet zich voor in de theorie der vierde-machtsresten. Ook hier heeft de algemeene reciprociteits-wet betrekking op twee *oneven*, d. w. z. niet door $1 + i$ deelbare, priemgetallen en het karakter van dit bijzondere priemgetal $1 + i$ moet afzonderlijk bepaald wotden.

In de verhandeling van GAUSS: Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda, waarin voor het eerst de geheele complexe getallen van den vorm $a + bi$ in de getallen-theorie ingevoerd werden, is het biquadratisch karakter van $1 + i$ volledig bepaald. Het daar voorkomende bewijs is zuiver arithmetisch gevoerd en steunt wezenlijk op het theorema van Art. 71, dat geheel overeenkomt met de hulpstelling die de grondslag uitmaakt, zoowel van het derde als van het vijfde Gaussische bewijs van de reciprociteits-wet in de theorie der quadraat-resten. (Theorematis arithmetici demonstratio nova, Werke II pag. 1 en Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae, Werke II pag. 47).

Zooals bekend is, heeft GAUSS zijn voornemen, in eene derde verhandeling de theorie der vierde-machtsresten tot een zeker einde te brengen door het bewijs te leveren van de algemeene reciprociteits-wet, die reeds in de tweede verhandeling over deze theorie uitgesproken is, niet ten uitvoer gebracht.

De eerste gepubliceerde bewijzen van dit fundamenteele theorema zijn de beide van EISENSTEIN in het 28ste deel van CRELLE's Journal für Mathematik pag. 53 en 223. In het eerste stuk: »Lois de réciprocité" wordt het karakter van $1 + i$ niet behandeld, wel in het tweede stuk: Einfacher Beweis und Verallgemeinerung des Fundamentaltheorems für die biquadratischen Reste. Bij de daar voorkomende afleiding van het karakter van $1 + i$ wordt echter gebruik gemaakt van de vooraf bewezen algemeene reciprociteits-wet, wat mij in elk geval minder schoon voorkomt, daar de overgang van het meer eenvoudige tot het samengestelde toch stellig ver-

langt het karakter $1 + i$ geheel onafhankelijk van het fundamentaal-theorema af te leiden.

Hetzelfde geldt in meerdere of mindere mate van alle andere methoden, die later bekend gemaakt zijn om de theorie der vierde-machtsresten te behandelen, en voorzoover ik zie, kan alleen van de Gaussische afleiding van het karakter van $1 + i$ gezegd worden, dat zij zuiver arithmetisch is, en geheel onafhankelijk van de algemeene wet van reciprociteit, zoodat zij hierdoor voldeed aan de eischen die men aan een geleidelijke ontwikkeling van de geheele theorie der vierde-machtsresten zal moeten stellen.

Geheel analoge bemerkingen zijn te maken omtrent de theorie der derde-machtsresten. Het eerste gepubliceerde bewijs van de door Jacobi uitgesproken wet van reciprociteit in deze theorie, is dat van Eisenstein in Bd. 27 van Crelle's Journal für Mathematik pag. 289. Het afzonderlijk te bepalen karakter van $1 - \varrho$ (waarin ϱ een complexe derde-machtswortel der eenheid) is eerst later gegeven door Eisenstein in Bd. 28 pag. 28 en vv. van hetzelfde tijdschrift. Bij deze afleiding wordt weder gebruik gemaakt van de algemeene wet van reciprociteit, en ik zie niet dat tot dus ver eene afleiding van het cubisch karakter van $1 - \varrho$ gegeven is waarvan dit niet gezegd kan worden.

Daar het nu toch wenschelijk voorkomt, eene afleiding te bezitten voor het karakter van $1 + i$ en $1 - \varrho$, geheel afgescheiden van de algemeene reciprociteits-wetten, zoo is het misschien niet geheel van belang ontbloot, dat al deze theorema's, betrekking hebbende op de priemgetallen 2, $1 + i$, $1 - \varrho$ en die tot aanvulling der reciprociteits-wetten noodzakelijk zijn, volgens eene *gelijk blijvende methode* bewezen kunnen worden.

Het principe van deze methode bestaat daarin, het priemgetal waarvan het karakter te bepalen is, te vervangen door een congruent product van factoren. Het karakter dezer factoren wordt dan bepaald door beschouwingen, geheel overeenkomstig aan die van Gauss in Art. 15—20 van zijne *eerste* verhandeling over de theorie der vierde-machts-resten (Werke II pag. 78—87). Gauss beschouwt in deze verhan-

deling alleen reële getallen, en het doel der verhandeling is de bepaling van het karakter van 2 in deze reële theorie. Het bleek mij echter dat al de beschouwingen van GAUSS bijna onveranderd ook in de theorie der complexe getallen herhaald kunnen worden, en de bepaling van het biquadratisch karakter van $1 + i$ volgt dan onmiddellijk met behulp van eene eenvoudige beschouwing volgens welke $1 + i$ congruent is met een product, waarvan men het karakter der factoren kent.

Met behulp van deze hoogst eenvoudige bemerkingen is dan ook, eenmaal de onderzoekingen der eerste verhandeling van GAUSS gegeven zijnde, de bepaling van het karakter van $1 + i$ ten opzichte van een priemgetal van den vorm $a + bi$ (waarin b niet gelijk nul) om zoo te zeggen mede geheel volbracht; terwijl een geheel analoge methode in het geval dat de modulus een reëel priemgetal van den vorm $4n + 3$ tot hetzelfde doel gebezigd kan worden. Hoewel dit laatste geval een veel eenvoudiger behandeling toelaat (zie bijv. G. II Art. 68), heb ik toch gemeend het ook op dezelfde wijze als de overige gevallen te moeten behandelen, omdat zoodoende blijkt dat de gebezigde methode in staat is om de volledige theorema's af te leiden.

Nadat de bepaling van het biquadratisch karakter van $1 + i$ afgehandeld is, heb ik met behulp van de voorafgaande ontwikkelingen alle theorema's bewezen die GAUSS door inductie gevonden, en in Art. 28 der Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda, opgesteld heeft. Voor zoover mij bekend zijn deze theorema's hier voor het eerst bewezen *). Dit bewijs steunt geheel op de theorie der complexe getallen, welke theorie hier dus geheel als hulpmiddel dient, daar de theorema's zelf alleen betrekking hebben op reële getallen. Behalve de reprociteits-wet in de theorie der vierde-machtsresten, waren voor het volledig bewijs nog de beschouwingen van Art. 19, 20 noodzakelijk.

---

*) In het 4de deel van het *Journal de Liouville* heeft LEBESQUE deze theorema's *voor een deel* bewezen. Zie daar pag. 51, 52. Remarque 1°.

Ik zal nu beginnen met de afleiding van het karakter van 2 in de theorie der

QUADRAAT-RESTEN.

1. Zij p een oneven priemgetal, de getallen

$$1,\ 2,\ 3,\ ,\ldots\ p-1$$

zullen dan in twee groepen verdeeld worden. Tot de eerste groep

$$A \qquad \alpha \quad \alpha' \quad \alpha'' \ldots.$$

worden gerekend alle quadraat-resten, tot de tweede groep

$$B \qquad \beta \quad \beta' \quad \beta'' \ldots.$$

alle niet-resten, voor den modulus p. Elk der groepen A en B bestaat uit $\frac{p-1}{2}$ volgens den modulus p incongruente getallen, en men ziet gemakkelijk dat de beide congruenties:

$$(x-\alpha)\ (x-\alpha')\ (x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \ \text{mod.}\, p.$$

$$(x-\beta)\ (x-\beta')\ (x-\beta'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

identieke congruenties zijn; want zij zijn van lageren graad dan de $\frac{p-1}{2}$de en bezitten beide blijkbaar $\frac{p-1}{2}$ wortels, namenlijk de eerste de wortels $x=\alpha$, $x=\alpha'$, $x=\alpha''$.., de tweede de wortels $x=\beta$, $x=\beta'$, $x=\beta''$...

Door bij de getallen van A en B de eenheid op te tellen ontstaan de volgende beide groepen getallen:

$$A' \qquad \alpha+1,\ \alpha'+1,\ \alpha''+1\ldots$$
$$B' \qquad \beta+1,\ \beta'+1,\ \beta''+1\ldots$$

De aantallen getallen van de groep A' die in A en B voorkomen, noem ik nu respectievelijk (0.0), (0.1), en de

aantallen getallen van B' die in A en B voorkomen respectivelijk (1.0), (1.1).

Deze vier getallen kunnen in het volgende schema S vereenigd worden:

$$\begin{matrix} (0.0) & (0.1) \\ (1.0) & (1.1). \end{matrix}$$

Daar de priemgetallen van de vormen $p = 4n + 1$ en $p = 4n + 3$ zich verschillend gedragen, moeten deze beide gevallen afzonderlijk behandeld worden. Ik begin met het eerste.

---

2. Voor $p = 4n + 1$ is -1 quadraat-rest, zoodat de getallen α en $p - \alpha$ tegelijkertijd in A voorkomen. Evenzoo komen de getallen β en $p - \beta$ gelijktijdig in B voor.

Nu is (0.0) blijkbaar gelijk aan het aantal oplossingen van de congruentie

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \quad \text{mod. } p,$$

waarin α en α' uit de groep A te kiezen zijn; en daar $\alpha' = p - \alpha''$ zoo kan men ook zeggen, dat (0.0) het aantal oplossingen voorstelt van de congruentie:

$$a + \alpha'' + 1 \equiv 0 \text{ mod. } p.$$

Op gelijke wijze omtrent de aantallen (0.0), (1.0), (1.1) redeneerende, blijkt dat het

teeken	voorstelt het aantal oplossingen van
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$ alles mod. p

Men ziet hieruit onmiddellijk dat

$$(0.1) = (1.0) \text{ is;}$$

een tweede betrekking tusschen de getallen van het schema S levert de volgende beschouwing. Bij elk getal β van de groep B behoort één bepaald getal van die zelfde groep β'' zoodanig dat

$$\beta \beta'' \equiv 1 \text{ mod. } p.$$

en tevens is dan $\beta' \beta''$ congruent met een getal α van de groep A. Door vermenigvuldiging van de congruentie

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$

met β'' volgt dus

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0$$

en door deze laatste congruentie met β te vermenigvuldigen, verkrijgt men de eerste terug. Hieruit valt onmiddellijk op te maken dat $(1.1) = (0.1)$ is, zoodat het schema S dezen vorm heeft:

$$\begin{matrix} h & j \\ j & j \end{matrix}$$

Nu komt in den groep A het getal $p-1$ dus in A' het getal p voor, welk laatste getal noch in A noch in B voorkomt. Alle overige getallen van A' en B' echter komen, zooals evident is, òf in A òf in B voor.

Hieruit volgt

$$h + j = \frac{p-1}{2} - 1$$

$$2j = \frac{p-1}{2}$$

dus

$$h = \frac{p-5}{4} \qquad j = \frac{p-1}{4}$$

De identieke congruentie

$$(x-\beta)\,(x-\beta')\,(x-\beta'')\,.\,. \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \text{ mod. } p$$

geeft nu voor $x = -1$, daar $\frac{p-1}{2}$ even is:

$$(\beta + 1)\ (\beta' + 1)\ (\beta'' + 1) \,.\,. \equiv 2 \text{ mod. } p.$$

Het aantal niet-resten onder de getallen $\beta + 1$, $\beta' + 1$, $\beta'' + 1$ .. is nu $(1.1) = j = \frac{p-1}{4}$.

Is dus j *even* of

$$p = 8n + 1$$

dan is 2 quadraat-rest van p.

Is daarentegen j *oneven*, of

$$p = 8n + 5$$

dan is 2 niet-rest van p.

---

3. Voor $p = 4n + 3$ is -1 niet-rest, en de groep B komt overeen met de groep getallen $p-\alpha$, $p-\alpha'$, $p-\alpha''$...

Het teeken (0.0) stelt nu voor het aantal oplossingen van de congruentie $\alpha + 1 \equiv \alpha'$ mod. p of ook daar $\alpha' = p - \beta$ is, het aantal oplossingen van $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$.

Op deze wijze blijkt dat het

teeken	voorstelt het aantal oplossingen van
(0.0)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$ mod. p

derhalve $(0.0) = (1.1)$. Is verder weder $\beta\beta'' \equiv 1$, $\beta'\beta'' \equiv \alpha$ dan volgt uit $\beta + \beta' + 1 \equiv 0$ door vermenigvuldiging met β''

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0$$

waaruit op soortgelijke wijze als boven, deze betrekking volgt $(1.0) = (0.0)$. Het schema S heeft dus voor $p = 4n + 3$ dezen vorm

$$\begin{matrix} h & j \\ h & h \end{matrix}$$

Daar het getal $p-1$ in de groep B, dus p in B' voorkomt, maar overigens alle getallen van A' en B' òf in A òf in B voorkomen, zoo volgt

$$h+j=\frac{p-1}{2}$$

$$2h=\frac{p-1}{2}-1 \text{ dus}$$

$$h=\frac{p-3}{4} \quad j=\frac{p+1}{4}$$

Uit de identieke congruentie

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}}-1 \text{ mod. } p$$

volgt voor $x=-1$ daar $\frac{p-1}{2}$ oneven is,

$$(\alpha+1)(\alpha'+1)(\alpha''+1)\ldots \equiv 2 \text{ mod. } p$$

en het aantal nietresten onder de getallen $\alpha+1, \alpha'+1, \alpha''+1\ldots$ is $=(0.1)=j=\frac{p+1}{4}$.

Is dus j *even* of

$$p=8n+7$$

dan is 2 quadraat-rest p.

Is daarentegen j *oneven* of

$$p=8n+3,$$

dan is 2 niet-rest van p.

Nadat hiermede dus het karakter van 2 als quadraat-rest of niet-rest ten opzichte van een willekeurig oneven priemgetal bepaald is, ga ik er toe over het overeenkomstige te ontwikkelen in de theorie der

VIERDE-MACHTS-RESTEN.

4. Het oneven (d. w. z. niet door $1+i$ deelbare) priem-

getal $m = a + bi$ zal steeds *primair*, in den zin van GAUSS ondersteld worden, zoodat $a - 1$ en b volgens den modulus 4 òf beide $\equiv 0$, òf beide $\equiv 2$ zijn.

Zooals bekend is bestaan de priemgetallen in de theorie der geheele complexe getallen van den vorm $a + bi$:

vooreerst uit de reële priemgetallen q van den vorm $4n + 3$, deze getallen moeten negatief genomen worden om primair te zijn;

ten tweede uit de complexe priemfactoren van de reële priemgetallen van den vorm $4n + 1$. Deze complexe priemgetallen zijn van den vorm $a + bi$, waarin b niet gelijk nul is, en worden door vermenigvuldiging met ééne bepaalde der vier eenheden, $1, i, -1, -i$ primair. Zij kunnen verder in twee soorten onderscheiden worden al naar gelang, wanneer $a + bi$ primair is, $a - 1$ en b beide door 4 deelbaar, of beide het dubbel van een oneven getal zijn.

Ik onderscheid hierna deze drie klassen van primaire priemgetallen:

I. De reële priemgetallen q van den vorm $4r + 3$, negatief genomen.

II. De complexe priemgetallen van den vorm $4r + 1 + 4si$.

III. De compl. priemgetallen van den vorm $4r + 3 + (4s + 2)i$.

Het priemgetal (in de complexe theorie) zal steeds door M aangeduid worden, de norm van M door μ. Verder zal steeds p een reëel (positief) priemgetal van den vorm $4r + 1$, q een reëel (positief) priemgetal van den vorm $4r + 3$ voorstellen. De priemgetallen van de eerste soort zijn dus $M = -q$, $\mu = q^2$, voor de tweede en derde soort is $\mu = p$.

Ik bemerk nog dat voor de beide soorten I en II de norm μ van den vorm $8r + 1$, en voor III van den vorm $8r + 5$ is. Deze omstandigheid maakt, dat de beide eerste soorten van priemgetallen tot op zekere hoogte gemeenschappelijk behandeld kunnen worden.

De beschouwingen van het volgende Art. 5 gelden nog gelijkelijk voor de drie klassen van priemgetallen.

---

5. Zij dan M het priemgetal, μ de norm. Een volle-

dig systeem van incongruente, en niet door den modulus M deelbare getallen, bestaat uit $\mu-1$ getallen, welke volgens hun biquadratisch karakter ten opzichte van M, tot vier klassen, elk $\frac{\mu-1}{4}$ getallen bevattende, gebracht kunnen worden:

A	α,	α',	α'' . .
B	β,	β',	β'' . .
C	γ,	γ',	γ'' . .
D	δ,	δ',	δ'' . .

Tot de eerste klasse A worden gebracht alle getallen α, α', α'', met het biquadratisch karakter 0, tot de groepen B, C, D de getallen met het biquadratisch karakter 1, 2, 3.

Ten overvloede zij gezegd dat hier het biquadratische karakter in den zin van Gauss genomen wordt, zoodat de getallen der vier klassen gekarakteriseerd zijn door de congruenties:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1,\ \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \mod. M.$$

Ik zal mij echter, voor het gemak, eveneens van het door Jacobi ingevoerde symbool bedienen, en dus kunnen schrijven:

$$\left(\left(\frac{\alpha}{M}\right)\right) = 1,\ \left(\left(\frac{\beta}{M}\right)\right) = i,\ \left(\left(\frac{\gamma}{M}\right)\right) = -1,\ \left(\left(\frac{\delta}{M}\right)\right) = -i$$

Eindelijk zij eens vooral bemerkt, dat in het vervolg alle congruenties betrekking zullen hebben op den priemmodulus M, zoolang niet uitdrukkelijk een andere modulus is aangegeven.

Ik laat hier een voorbeeld volgen van de verdeeling der resten mod. M, met uitzondering van den rest 0, in de vier klassen A, B, C, D voor elk der drie soorten van priemgetallen, die in Art. 4 onderscheiden werden.

$M = -7 \qquad \mu = 49$

A $1, 3i, -2, i, -3, -2i, -1, -3i, 2, -i, 3, 2i$

B $1-2i, -1+3i, -2-3i, 2+i, -3-i, 3-2i, -1+2i, 1-3i, 2+3i, -2-i, 3+i, -3+2i.$

C $-3+3i, -2-2i, -1+i, -3-3i, 2-2i, -1-i, 3-3i, 2+2i, 1-i, 3+3i, -2+2i, 1+i.$

D $3+2i, 1+2i, 1+3i, -2+3i, -2+i, -3+i, -3-2i, -1+2i, -1-3i, 2-3i, 2-i, 3-i.$

$M = -3-8i \qquad \mu = 73$

A $1, 3+2i, -1-4i, -3i, 1+2i, -4, -1-3i, -2, -3+4i, -1, -3-2i, 1+4i, 3i, -1-2i, 4, 1+3i, 2, 3-4i.$

B $1-2i, -1-i, 2+3i, 5+2i, -3+3i, 1-3i, 1-4i, -2+4i, 2+2i, -1+2i, 1+i, -2-3i, -5-2i, 3-3i, -1+3i, -1+4i, 2-4i, -2-2i.$

C $4i, -3+i, 2i, 4+3i, i, -2+3i, 4-i, 3, -2+i, -4i, 3-i, -2i, -4-3i, -i, 2-3i, -4+i, -3, 2-i.$

D $-3-i, -4-i, 4+2i, 2-2i, 2+i, 1-i, -3+2i, -2+5i, -3-3i, 3+i, 4+i, -4-2i, -2+2i, -2-i, -1+i, 3-2i, 2-5i, 3+3i.$

$M = -5+6i \qquad \mu = 61$

A $1, -4, -1-4i, -3, 1+i, 2+i, -2+i, 3+2i, 2i, 1+3i, -3-i, -5, -2+2i, 3-2i, 4+i.$

B $1-i, 1-2i, 1+2i, 2-3i, 2, 3-i. -1+3i, 5i, 2+2i, -2-3i, 1-4i, -i. 4i, -4+i, 3i.$

C $-2i, -1-3i, 3+i, 5, 2-2i, -3+2i, -4-i, -1, 4, 1+4i, 3, -1-i, -2-i, 2-i, -3-2i.$

D $-2-2i, 2+3i, -1+4i, i, -4i, 4-i, -3i, -1+i, -1+2i, -1-2i, -2+3i, -2, -3+i, 1-3i, -5i.$

Evenals in Art. 1 overtuigt men zich onmiddellijk dat de nu volgende congruenties identiek zijn:

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} - 1 \text{ mod } M.$$

$$(x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} - i$$

$$(x-\gamma)(x-\gamma')(x-\gamma'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + 1$$

$$(x-\delta)(x-\delta')(x-\delta'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + i$$

waaruit voor $x = -1$ volgt, de gevallen $\mu = 8n + 1$ en $\mu = 8n + 5$ onderscheidende:

$$\mu = 8n + 1 \quad (\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots \equiv 1 - i \text{ mod. } M.$$
$$(\gamma + 1)(\gamma' + 1)(\gamma'' + 1)\ldots \equiv 2$$
$$(\delta + 1)(\delta' + 1)(\delta'' + 1)\ldots \equiv 1 + i$$

$$\mu = 8n + 5 \quad (\alpha + 1)(\alpha' + 1)(\alpha'' + 1)\ldots \equiv 2 \qquad \text{mod. } M.$$
$$(\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots \equiv 1 + i$$
$$(\delta + 1)(\delta' + 1)(\delta'' + 1)\ldots \equiv 1 - i$$

---

6. Laten wij nu verder de nieuwe groepen van getallen A', B', C' en D' beschouwen, die ontstaan door bij de getallen van A, B, C en D de eenheid op te tellen:

$$A' \quad \alpha + 1,\ \alpha' + 1,\ \alpha'' + 1\ldots$$
$$B' \quad \beta + 1,\ \beta' + 1,\ \beta'' + 1\ldots$$
$$C' \quad \gamma + 1,\ \gamma' + 1,\ \gamma'' + 1\ldots$$
$$D' \quad \delta + 1,\ \delta' + 1,\ \delta'' + 1\ldots$$

en noemen wij nu: de *aantallen* getallen van A' die congruent zijn met getallen van A, B, C, D respectievelijk

$$(0.0),\ (0.1),\ (0.2),\ (0.3);$$

de aantallen getallen van B' die congruent zijn met getallen van A, B, C, D respectievelijk

$$(1.0),\ (1.1),\ (1.2),\ (1.3).$$

Evenzoo hebben de getallen

(2.0), (2.1), (2.2), (2.3) betrekking hebben op de groep C' en

(3.0), (3.1), (3.2), (3.3) op de groep D'.

Men kan al deze 16 getallen (0.0), (0.1) enz. vereenigen in het volgende quadratische schema S:

(0.0)	(0.1)	(0.2)	(0.3)
(1.0)	(1.1)	(1.2)	(1.3)
(2.0)	(2.1)	(2.2)	(2.3)
(3.0)	(3.1)	(3.2)	(3.3)

en voor de voorbeelden in Art. 5 gegeven, verkrijg ik

	$M=-7$	$\mu=49$			$M=-3-8\ i$	$\mu=73$			$M=-5+6\ i$	$\mu=61$		
S	5	2	2	2	5	6	4	2	4	3	2	6
	2	2	4	4	6	2	5	5	3	3	6	3
	2	4	2	4	4	5	4	5	4	3	4	3
	2	4	4	2	2	5	5	6	3	6	3	3

Volgens de congruenties van het voorgaande artikel is

voor $\mu = 8n + 1 \quad (\delta + 1)(\delta' + 1)(\delta'' + 1)\ldots \equiv 1+i$
en voor $\mu = 8n + 5 \quad (\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots \equiv 1+i.$

Daar nu de aantallen getallen van

$$\delta + 1,\ \delta' + 1,\ \delta'' + 1\ldots$$

die respectievelijk tot de klassen A, B, C, D behooren, bedragen (3.0), (3.1), (3.2), (3.3), zoo volgt onmiddellijk dat

van $u = 8n + 1$ het biquadratisch karakter van $1 + i$, volgens den modulus 4 congruent zal zijn met

$$(3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3)$$

en evenzoo voor het geval $\mu = 8n + 5$ met

$$(1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3).$$

Zoodra dus de getallen (0.0), (0.1)... enz bepaald zijn is hiermede ook onmiddellijk het biquadratisch karakter van $1 + i$ bekend.

Het komt er dus nu op aan, de getallen van het schema S onmiddellijk uit het gegeven primaire priemgetal $M = a + bi$ af te leiden. De hiertoe noodige beschouwingen zijn wezenlijk dezelfde als die van GAUSS in Art. 16—20 der *Theoria residuorum biquadraticorum commentatio prima.*

GAUSS handelt daar over detheorie der reële getallen, maar het blijkt gemakkelijk dat het daar gegevene in zeer nauw verband staat met het vraagstuk, dat ons hier bezighoudt.

Om de geheele ontwikkeling voor oogen te hebben, zal het noodig zijn hier de argumentatie van GAUSS met de geringe noodige wijzigingen te laten volgen.

Hierbij valt ook nog op te merken dat, voor een priemgetal $M = -q$ tot de eerste klasse van Art. 4 behoorende, er in de reële theorie van GAUSS niets analoogs bestaat, met wat hier in de theorie der geheele complexe getallen ontwikkeld zal worden.

Voor de verdere beschouwingen is het in de eerste plaats noodig, de beide gevallen dat de norm μ van den vorm $8n + 1$ of van den vorm $8n + 5$ is, afzonderlijk te behandelen. Ik zal met het eerstgenoemde geval. waarin dus het priemgetal M tot een der beide eerste klassen van Art. 4 behoort, beginnen.

---

7. Voor $\mu = 8n + 1$, is $(-1)^{\frac{\mu - 1}{4}} = +1$ zoodat -1

biquadratische rest van M is en in de klasse A voorkomt, of eigenlijk met een getal van A volgens den modulus M congruent is. Maar het is bij deze beschouwingen geoorloofd om congruente getallen, daar zij elkander vervangen kunnen, als gelijk te beschouwen en ik zal voor het gemak van deze zienswijze gebruik maken, zonder dat daardoor eenige onduidelijkheid zal kunnen ontstaan.

Daar dus het biquadratisch karakter van -1 gelijk nul is, zoo volgt dat wanneer α, β, γ, δ respectievelijk tot de klassen A, B, C, D behooren, ook $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ in deze zelfde klassen voorkomen, $-\alpha$ in A, $-\beta$ in B, $-\gamma$ in C en $-\delta$ in D.

Nu is blijkbaar het getal (0.0) gelijk aan het aantal oplossingen van de congruentie:

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \text{ mod. } M.$$

waarbij α en α' op willekeurige wijze uit de groep A te nemen zijn, maar daar bij elk getal α' een getal $\alpha'' = p - \alpha'$ behoort, zoo is dit aantal oplossingen hetzelfde als dat van de congruentie:

$$\alpha + \alpha'' + 1 \equiv 0$$

waarin weder α en α'' uit A te nemen zijn.

Geheel op dezelfde wijze omtrent de getallen (0.1), (0.2) enz. redeneerende, overtuigt men zich dat:

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$ mod. M.
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(0.3)	$\alpha + \delta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.3)	$\beta + \delta + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(2.1)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$ mod. M.
(2.2)	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$
(2.3)	$\gamma + \delta + 1 \equiv 0$
(3.0)	$\delta + \alpha + 1 \equiv 0$
(3.1)	$\delta + \beta + 1 \equiv 0$
(3.2)	$\delta + \gamma + 1 \equiv 0$
(3.3)	$\delta + \delta' + 1 \equiv 0$

Hieruit volgen dus onmiddellijk deze zes betrekkingen:

$$(0.1) = (1.0),\ (0.2) = (2.0),\ (0.3) = (3.0)$$
$$(1.2) = (2.1),\ (1.3) = (3.1)$$
$$(2.3) = (3.2).$$

Vijf nieuwe betrekkingen tusschen de getallen (0.0) (0.1) enz. verkrijgt men door de volgende beschouwing. Zijn α, β, γ getallen van A, B, C en bepaalt men x, y, z zoodanig dat:

$$\alpha x \equiv 1,\ \beta y \equiv 1,\ \gamma z \equiv 1 \ \text{mod.}\ M$$

dan behoort blijkbaar x tot de klasse A. y tot D, z tot C zoodat men kan schrijven:

$$\alpha \alpha' \equiv 1,\ \beta \delta' \equiv 1,\ \gamma \gamma' \equiv 1.$$

Vermenigvuldigt men nu, terwijl men een bepaalde oplossing van $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$ beschouwt, deze congruentie met δ dan volgt $\delta' + 1 + \delta \equiv 0$, waarin $\delta' \equiv \alpha \delta$ tot D behoort. Omgekeerd volgt uit $\delta' + 1 + \delta \equiv 0$ door vermenigvuldiging met β weder $\alpha + \beta + 1 \equiv 0$. Hieruit blijkt dus dat het aantal oplossingen van de beide congruenties:

$$\alpha + \beta + 1 \equiv 0 \ \text{en}\ \delta + \delta' + 1 \equiv 0$$

evengroot is of $(0.1) = (3.3)$.

Geheel op dezelfde wijze heeft men:

$$\gamma' (\alpha + \gamma + 1) \equiv \gamma'' + 1 + \gamma$$
$$\beta\ (\alpha + \delta + 1) \equiv \beta' + 1 + \beta$$
$$\delta\ (\beta + \gamma + 1) \equiv 1 + \beta' + \delta$$
$$\gamma' (\beta + \gamma + 1) \equiv \delta + 1 + \gamma'$$

waaruit men op dezelfde besluit tot:

$$(0.2) = (2.2), \ (0.3) = (1.1), \ (1.2) = (1.3) = (2.3).$$

Hiermede zijn dus *elf* betrekkingen tusschen de zestien getallen van het schema S gevonnen, en deze getallen worden hierdoor teruggebracht tot *vijf* verschillende, die door h, j, k, l, m aangeduid zullen worden. Het schema S neemt nu deze gedaante aan:

$$\begin{matrix} h & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j \end{matrix}$$

---

8. Het getal -1 komt in A voor, waarmede dus het getal 0 van A' correspondeert. Dit getal 0 van A' komt in geen der klassen A, B, C, D voor, maar elk ander getal van A' komt blijkbaar in een der groepen A, B, C of D voor. Daar $\mu = 8n + 1$, $\frac{\mu - 1}{4} = 2n$ zoo volgt dus:

$$(0.0) + (0.1) + (0.2) + (0.3) = 2n - 1$$

Alle getallen van B', C', D' komen in één der klassen A, B, C, D voor, zoodat men heeft:

$$(1.0) + (1.1) + (1.2) + (1.3) = 2n$$

$$(2.0) + (2.1) + (2.2) + (2.3) = 2n$$

$$(3.0) + (3.1) + (3.2) + (3.3) = 2n$$

Deze vier vergelijkingen herleiden zich tot de volgende drie betrekkingen tusschen h, j, k, l en m:

$$h + j + k + l = 2n - 1$$

$$j + l + 2m = 2n$$

$$k + m = n$$

---

9. Eindelijk wordt nog een verdere, niet lineaire, betrekking tusschen h, j, k, l, m verkregen door de beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M$$

waarin α, β, γ op alle mogelijke wijzen uit de klassen A, B, C te kiezen zijn.

Neemt men nu vooreerst voor α achtereenvolgens alle getallen van A, dan gebeurt het respectievelijk h, j, k, l malen dat $\alpha + 1$ tot A, B, C, D behoort, en de enkele maal dat $\alpha + 1 \equiv 0$ wordt kan buiten beschouwing blijven daar de congruentie $\beta + \gamma \equiv 0$ geen enkele oplossing toelaat.

Voor elke bepaalde der h waarden die $\alpha + 1 \equiv \alpha_0$ maken, zijn dan nog verder β en γ zóó te kiezen, dat:

$$\alpha_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

wordt. Het aantal oplossingen dezer congruentie (voor een gegeven waarde van α_0) is $= m$, zooals onmiddellijk blijkt door vermenigvuldiging met α_0', wanneer $\alpha_0 \, \alpha_0' = 1$ mod. M waardoor zij overgaat in:

$$1 + \beta' + \gamma' \equiv 0.$$

Daar deze redeneering toepasselijk is voor elke der h waarden, die maken dat $\alpha + 1$ weder tot A behoort, zoo verkrijgt men op deze wijze hm oplossingen van de congruentie:

$$1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0.$$

Het gebeurt verder j malen dat $\alpha + 1$ tot B behoort, en voor elke bepaalde waarde $\alpha + 1 \equiv \beta_0$ heeft de congruentie:

$$\beta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

hetzelfde aantal oplossingen als deze:

$$1 + \alpha + \beta' \equiv 0$$

dus is dit aantal $= j$. Het gezegde blijkt onmiddellijk uit:

$$\delta_0 (\beta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \alpha + \beta'$$

wanneer $\beta_0 \delta_0 \equiv 1$.

Deze waarden van α, die $\alpha + 1$ tot B doen behooren, geven dus in het geheel $j j$ oplossingen van de beschouwde congruentie.

Voor $\alpha + 1 \equiv \gamma_0$, wat k malen gebeurt, heeft de congruentie:

$$\gamma_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

l oplossingen, want:

$$\gamma_0' (\gamma_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \delta + \alpha.$$

De waarden van α die $\alpha + 1$ tot C doen behooren leveren dus in het geheel $k l$ oplossingen.

Is eindelijk $\alpha + 1 = \delta_0$, wat l malen gebeurt, dan heeft de congruentie:

$$\delta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

wegens:

$$\beta_0 (\delta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \gamma + \delta$$

m oplossingen, en deze waarden van α geven dus $l m$ oplossingen.

Het totale aantal oplossingen van de congruentie:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M$$

is derhalve:

$$= h m + j j + k l + l m.$$

Maar men kan dit aantal nog op andere wijze berekenen. Neemt men namelijk voor β achtereenvolgens alle getallen van B dan gebeurt het j, l, m, m malen dat $\beta + 1$ behoort tot de groepen A, B, C, D. En voor elk dezer vier getallen vindt men, dat er respectievelijk k, m, k, m oplossin-

gen van de gegeven congruentie zijn, zoodat het totale aantal oplossingen bedraagt:

$$jk + lm + mk + mm.$$

---

10. De gelijkstelling van deze beide uitdrukkingen voor het aantal oplossingen van $\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0$ geeft:

$$0 = hm + jj + kl - jk - km - mm$$

of wel h elimineerende met behulp van $h = 2m - k - 1$ welke waarde gemakkelijk uit de in Art. 8 verkregen vergelijkingen tusschen h, j, k, l, m volgt:

$$0 = (k - m)^2 + jj + kl - jk - kk - m$$

Volgens de relaties in Art. 8 is:

$$k = \tfrac{1}{2}(j + l)$$

en deze waarde in $jj + kl - jk - kk$ overbrengende, wordt deze uitdrukking $= \frac{1}{4}(l - j)^2$ zoodat de voorgaande vergelijking, na vermenigvuldiging met 4, overgaat in:

$$0 = 4(k - m)^2 + (l - j)^2 - 4m$$

maar:

$$4m = 2(k + m) - 2(k - m) = 2n - 2(k - m)$$

dus:

$$2n = 4(k - m)^2 + 2(k - m) + (l - j)^2$$

of wel:

$$\mu = 8n + 1 = (4(k - m) + 1)^2 + 4(l - j)^2$$

dus stellende:

$$4(k - m) + 1 = A,\ 2(l - j) = B$$

$$\mu = A^2 + B^2.$$

Hierin is $A \equiv 1$ mod. 4, en B even.

Men kan nu met behulp van A en B gemakkelijk h, j, k, l, m uitdrukken en verkrijgt zoodoende:

$$8\,h = 4\,n - 3\,A - 5$$

$$8\,j = 4\,n + A - 2\,B - 1$$

$$8\,k = 4\,n + A - 1$$

$$8\,l = 4\,n + A + 2\,B - 1$$

$$8\,m = 4\,n - A + 1$$

Tot hiertoe onderstelden wij alleen dat de norm μ den vorm $8\,n + 1$ had; voor de verdere bepaling van A en B is het evenwel nu noodig, de gevallen I en II van Art. 4 afzonderlijk te behandelen.

---

11. Zij dan vooreerst:

$$M = -q = -(4\,r + 3).$$

In dit geval is:

$$\mu = M^2 = q^2$$

en dus:

$$q^2 = A^2 + B^2$$

q een priemgetal van den vorm $4\,r + 3$ zijnde, weet men dat q^2 op geen andere wijze als som van twee quadraten voorgesteld kan worden, dan door voor de basis van het eene (oneven) quadraat $\pm\,q$, voor die van het andere quadraat 0 te nemen; inderdaad was geen der getallen A en B gelijk 0 of door q deelbaar, dan zou men een van 0 verschillend getal x kunnen bepalen, zóódat:

$$A\,x \equiv B \text{ mod. } q.$$

Nu volgt uit $q^2 = A^2 + B^2$

$$A^2 \equiv -\,B^2 \text{ mod. } q$$

en ook $A^2 x^2 \equiv B^2$ dus

$$x^2 \equiv -1 \text{ mod. } q.$$

Deze laatste congruentie nu, is onmogelijk omdat -1 quadratische nietrest van q is.

Uit $q^2 = A^2 + B^2$ volgt dus noodzakelijk

$$A = \pm q, \qquad B = 0$$

en daar $A \equiv 1$ mod. 4 zoo wordt hierdoor nog het teeken van A volkomen bepaald en is

$$A = -q = M.$$

Nadat op deze wijze A en B gevonden zijn, heeft men nu

$$8h = 4n - 3M - 5$$
$$8j = 4n + M - 1$$
$$8k = 4n + M - 1$$
$$8l = 4n + M - 1$$
$$8m = 4n - M + 1$$

waarin $8n + 1 = M^2$.

Door deze formulen wordt dus de afhankelijkheid der getallen van het schema S van het priemgetal M op de eenvoudigste wijze uitgedrukt, voor het geval dat M tot de eerste klasse van Art. 4 behoort.

---

12. Is in de tweede plaats $M = a + bi$ waarin $a - 1 \equiv b \equiv 0$ mod 4 en de norm $\mu = a^2 + b^2$ een reëel priemgetal, dan is dus

$$\mu = a^2 + b^2 = A^2 + B^2.$$

Nu kan een priemgetal voor den vorm $4k + 1$ slechts op ééne wijze voorgesteld worden door de som van twee qua-

draten, en daar a en A beide $\equiv 1$ mod. 4 zijn, zoo volgt $A = a$, $B = \pm b$.

Het teeken van B wordt door de volgende beschouwing bepaald, waarbij het noodig is deze hulpstelling vooraf te bewijzen:

»Doorloopt z een volledig restsysteem mod. M met uitzondering van de door M deelbare term, dan is

$$\Sigma z^t \equiv -1 \quad \text{of} \quad \equiv 0 \quad \text{mod. } M$$

al naardat t door $\mu - 1$ deelbaar is op niet."

Het eerste gedeelte is duidelijk, want is t door $\mu - 1$ deelbaar dan is $z^t \equiv 1$, dus $\Sigma z^t \equiv \mu - 1 \equiv - 1$ mod. M.

Om ook het tweede gedeelte aan te toonen, zij g een primitieve wortel voor het priemgetal M, zoodat de waarden die z doorloopt, congruent zijn met

$$g^0, \; g^1, \; g^2, \; g^3 \, . \, . \quad g^{\mu-2}.$$

Hieruit volgt dus

$$\Sigma z^t \equiv 1 + g^t + g^{2t} + \, . \, . + g^{(\mu-2)t} \text{ mod. } M$$

of

$$(1 - g^t) \, \Sigma z^t \equiv 1 - g^{(\mu-1)t} \equiv 0 \quad \text{mod. } M.$$

Is nu t niet door $\mu - 1$ deelbaar, dan is $1 - g^t$ niet door M deelbaar en dus $\Sigma z^t \equiv 0$ w. t. b. w.

Deze hulpstelling geldt blijkbaar voor een willekeurig priemgetal M.

Volgens de binomiaal-ontwikkeling is nu

$$(z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} = z^{\frac{\mu-1}{2}} + \ldots + 1$$

en hieruit volgt dus, wanneer het teeken Σ op dezelfde waarden van z betrekking heeft als zooeven:

$$\Sigma \, (z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \quad \text{mod. } M.$$

Maar aan den anderen kant vormen de getallen z^2 in

hun geheel blijkbaar alle getallen van de groepen A en C te samen genomen, elk dezer getallen tweemaal genomen. Van de getallen

$$z^2 + 1$$

behooren er dus $2\,(0.0) + 2\,(2.0)$ tot A

$2\,(0.1) + 2\,(2.1)$ tot B

$2\,(0.2) + 2\,(2.2)$ tot C

$2\,(0.3) + 2\,(2.3)$ tot D

en daar de $\frac{\mu - 1}{4}^{de}$ machten der getallen van A, B. C, D respectievelijk congruent zijn met 1, i, -1, $-i$ zoo volgt dus

$$\begin{aligned} \Sigma\,(z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv 2\,[(0.0) + (2.0) - (0.2) - (2.2)] \\ &+ 2\,i\,[(0.1) + (2.1) - (0.3) - (2.3)] \\ &\equiv 2\,(h - k) + 2i\,(j - l) \end{aligned}$$

of de waarden van Art. 10 invoerende, daar $A = a$ is:

$$\Sigma\,(z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -a - 1 - B\,i.$$

Uit de vergelijking met het eerste resultaat

$$\Sigma\,(z^2 + 1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1$$

volgt nu

$$a + B\,i \equiv 0 \text{ mod. } (M = a + b\,i)$$

dus:

$$B = b$$

Hierdoor gaan dan ten slotte de waarden van h, j, k. l, m van Art. 10 over in:

$$\begin{aligned} 8\,h &= 4\,n - 3\,a - 5 \\ 8\,j &= 4\,n + a - 2\,b - 1 \\ 8\,k &= 4\,n + a - 1 \\ 8\,l &= 4\,n + a + 2\,b - 1 \\ 8\,m &= 4\,n - a + 1 \end{aligned}$$

waarin dus $8n + 1 = a^2 + b^2$ de norm is van het priemgetal M.

---

13. Nadat hiermede de beide gevallen, waarin $\mu = 8n + 1$ is, afgehandeld zijn, moet nu het geval $\mu = 8n + 5$ beschouwd worden.

Daar dan $\dfrac{\mu - 1}{4}$ oneven is, zoo behoort -1 tot de groep C, en zooals gemakkelijk te zien, behooren de getallen:

$p - \alpha,\ p - \alpha',\ p - \alpha'' \ldots$ allen tot C.
$p - \beta,\ p - \beta',\ p - \beta'' \ldots$ allen tot D.

Met behulp van deze bemerkingen volgt nu zonder moeite dat

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(0.0)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha + \delta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
(0.3)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \delta + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.3)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$
(2.1)	$\gamma + \delta + 1 \equiv 0$
(2.2)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$
(2.3)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$
(3.0)	$\delta + \gamma + 1 \equiv 0$
(3.1)	$\delta + \delta' + 1 \equiv 0$
(3.2)	$\delta + \alpha + 1 \equiv 0$
(3.3)	$\delta + \beta + 1 \equiv 0$

waaruit dan zes betrekkingen voortvloeien:

$$(0.0) = (2.2) \qquad (0.1) = (3.2) \qquad (0.3) = (1.2)$$
$$(1.0) = (2.3) \qquad (1.1) = (3.3)$$
$$(2.1) = 3.0).$$

Daar evenals vroeger $\alpha\alpha' \equiv \beta\,\delta \equiv \gamma\,\gamma' \equiv 1$, zoo heeft men:

$$
\begin{aligned}
\gamma' (\alpha + \gamma + 1) &\equiv \gamma'' + 1 + \gamma' \\
\beta\; (\alpha + \delta + 1) &\equiv \beta' + 1 + \beta \\
\delta\; (\alpha + \beta + 1) &\equiv \delta' + 1 + \delta \\
\delta\; (\beta + \gamma + 1) &\equiv 1\; + \beta' + \delta \\
\gamma' (\beta + \gamma + 1) &\equiv \delta\; + 1 + \gamma',
\end{aligned}
$$

waaruit men besluit tot:

$$
(0.0) = (2.0), \qquad (0.1) = (1.3), \qquad (0.3) = (3.1),
$$
$$
(1.0) = (1.1) = (2.1).
$$

Ten gevolge van deze elf betrekkingen neemt het schema S dezen vorm aan:

$$
\begin{matrix}
h & j & k & l \\
m & m & l & j \\
h & m & h & m \\
m & l & j & m.
\end{matrix}
$$

Daar -1 in de groep C, dus 0 in C' voorkomt, zoo volgt geheel op dezelfde wijze als in Art. 8:

$$
h + j + k + l = \frac{\mu - 1}{4} = 2n + 1
$$

$$
2m + l + j = \; 2n + 1
$$

$$
h + m = \; n.
$$

De beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie:

$$
\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0
$$

levert eindelijk nog eene vergelijking tusschen h, j, k, l, m, op. Neemt met eerst voor α alle waarden die tot A behooren, dan gebeurt het respectievelijk h, j, k, l malen dat $\alpha + 1$ tot de groepen A, B, C, D behoort. En verder vindt men, op dezelfde wijze als in Art. 9, dat, voor elk dezer

gevallen, de congruentie respectievelijk m, l, j, m oplossingen heeft, waaruit dus voor het totale aantal oplossingen volgt:

$$hm + jl + kj + lm.$$

Neemt men daarentegen eerst voor β alle waarden van B, dan gebeurt het respectievelijk m, m, l, j malen dat $\beta +$ tot de groepen A, B, C, D behoort. En verder vindt men dat, voor elk dezer gevallen, de congruentie respectievelijk h, m, h, m oplossingen heeft, zoodat het totale aantal oplossingen ook bedraagt:

$$mh + mm + lh + jm.$$

---

14. De gelijkstelling van de beide uitdrukkingen voor net aantal oplossingen der congruentie:

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } M.$$

geeft:

$$0 = m^2 + lh + jm - jl - kj - lm$$

of daar $k = 2m - h$ is, zooals uit de lineaire betrekkingen tusschen h, j, k, l, m in Art. 13 dadelijk volgt:

$$0 = m^2 + lh + hj - jl - jm - lm.$$

Drukt men nu met behulp van $j + l = 1 + 2h$, j en l beide uit, door hun verschil:

$$2j = 1 + 2h + (j - l)$$

$$2l = 1 + 2h - (j - l)$$

dan gaat de voorgaande vergelijking door invoering van deze waarden, over in:

$$0 = 4m^2 - 4m - 1 + 4h^2 - 8hm + (j - l)^2$$

of daar:

$$4\,m = 2\,(h + m) - 2\,(h - m) = 2\,n - 2\,(h - m)$$

$$0 = 4\,(h - m)^2 - 2\,n + 2\,(h - m) - 1 + (j - l)^2$$

en eindelijk:

$$\mu = 8\,n + 5 = (4\,(h - m) + 1)^2 + 4\,(j - l)^2$$

dus voor:

$$A = 4\,(h - m) + 1,\;\; B = 2\,j - 2\,l$$

$$\mu = A^2 + B^2.$$

Met behulp van A en B kan men nu gemakkelijk h, j, k, l, m uitdrukken, als volgt:

$$\begin{aligned} 8\,h &= 4\,n + A - 1 \\ 8\,j &= 4\,n + A + 2\,B - 3 \\ 8\,k &= 4\,n - 3\,A + 3 \\ 8\,l &= 4\,n + A - 2\,B + 3 \\ 8\,m &= 4\,n - A + 1 \end{aligned}$$

Er blijft nog over A en B te bepalen. Nu is μ als reëel priemgetal van den vorm $4\,n + 1$ slechts op ééne wijze voor te stellen door een som van twee tweedemachten, en daar:

$$M = a + b\,i$$

ook:

$$\mu = a^2 + b^2$$

waarin:

$$a \equiv -1,\, b \equiv 2 \text{ mod. } 4.$$

Hieruit volgt dus:

$$A = -a \text{ en } B = \pm\, b.$$

Om het teeken van B te bepalen dient eene beschouwing analoog aan die in Art. 12.

Men vindt gemakkelijk:

$$\Sigma (z^2 + 1)^{\frac{1}{4}(\mu - 1)} \equiv -1 \equiv 2(h - k) + 2i(j - l) \text{ mod. } M.$$

Nu is:

$$2(h - k) = A - 1, \quad 2(j - l) = B$$

dus:

$$-1 \equiv A - 1 + Bi$$

$$0 \equiv A + Bi \text{ mod. } (M = a + bi)$$

Daar nu reeds gevonden werd $A = -a$, zoo volgt $B = -b$ en ten slotte is dus nu:

$$\begin{aligned}
8h &= 4n - a - 1, \\
8j &= 4n - a - 2b + 3, \\
8k &= 4n + 3a + 3, \\
8l &= 4n - a + 2b + 3, \\
8m &= 4n + a + 1.
\end{aligned}$$

15. De verkregen resultaten samenstellende, is dus voor $\mu = 8n + 1$ het schema S van den vorm:

$$\begin{matrix}
h & j & k & l \\
j & l & m & m \\
k & m & k & m \\
l & m & m & j
\end{matrix}$$

waarin: voor $M = -q$

$$\begin{aligned}
8h &= 4n - 3M - 5 \\
8j = 8k = 8l &= 4n + M - 1 \\
8m &= 4n - M + 1.
\end{aligned}$$

voor $M = a + bi$

$$
\begin{aligned}
8h &= 4n - 3a - 5 \\
8j &= 4n + a - 2b - 1 \\
8k &= 4n + a - 1 \\
8l &= 4n + a + 2b - 1 \\
8m &= 4n - a + 1.
\end{aligned}
$$

Voor $\mu = 8n + 5$, $M = a + bi$ is het schema S van den vorm:

$$
\begin{matrix}
h & j & k & l \\
m & m & l & j \\
h & m & h & m \\
m & l & j & m
\end{matrix}
$$

waarin:

$$
\begin{aligned}
8h &= 4n - a - 1 \\
8j &= 4n - a - 2b + 3 \\
8k &= 4n + 3a + 3 \\
8l &= 4n - a + 2b + 3 \\
8m &= 4n + a + 1.
\end{aligned}
$$

Zooals uit deze formules blijkt, correspondeert de verandering van b in $-b$ met eene verwisseling van j en l, zoowel in het geval $\mu = 8n + 1$, als wanneer $\mu = 8n + 5$.

Volgens de congruenties van Art. 5 is nu voor $\mu = 8n + 1$ het karakter van $1 + i$ naar den mod. 4:

$$\equiv (3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3) = 3m + 3j \equiv -m - j$$

en dat van $1 - i$:

$$\equiv (1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3) = l + 5m \equiv l + m$$

en dus voor $M = -q$:

$$\text{Karakter } (1 + i) \equiv -n = -\frac{q^2 - 1}{8}$$

$$\text{Karakter } (1 - i) \equiv \quad n = \frac{q^2 - 1}{8}$$

Nu zijn $\frac{q+1}{4}$ en $\frac{q-3}{4}$ geheele, op elkaar volgende getallen, dus is hun product even, en $\frac{(q+1)(q-3)}{8}$ door 4 deelbaar, zoodat men heeft:

$$\frac{q^2-1}{8} \equiv \frac{q^2-1}{8} - \frac{(q+1)(q-3)}{8} = +\frac{q+1}{4}$$

en dus

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(M-1)}, \qquad \left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{4}(M-1)}$$

en daar -1 biquadratische rest is

$$\left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(M-1)}, \qquad \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{4}(M-1)}$$

terwijl uit $2 = (1-i)(1+i)$ nog volgt:

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-2}{M}\right)\right) = 1.$$

Voor $M = a + bi$ daarentegen, is

$$\begin{aligned} -m-j &= -n + \tfrac{1}{4}b \\ l+m &= n + \tfrac{1}{4}b \end{aligned}$$

en

$$n = \frac{a^2+b^2-1}{8}.$$

Nu is blijkbaar $\frac{a-1}{4} \cdot \frac{a+3}{4}$ even, dus $\frac{(a-1)(a+3)}{8}$ door 4 deelbaar, waaruit volgt:

$$\frac{a^2-1}{8} \equiv \frac{-a+1}{4} \text{ mod. } 4.$$

en b door 4 deelbaar zijnde, is dus één der getallen b, $b \pm 4$ door 8 deelbaar, derhalve $\frac{b(b-4)}{8}$ door 4 deelbaar en

$$\frac{b^2}{8} \equiv \frac{b^2}{8} - \frac{b(b \mp 4)}{8} = \pm \tfrac{1}{2} b$$

zoodat

$$n \equiv \tfrac{1}{4}(-a + 1 \pm 2b) \quad \text{mod. } 4$$

en ten slotte

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)}$$

$$\left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a+1-b)}$$

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = i^{-\frac{1}{2}b}.$$

Is eindelijk $\mu = 8n + 5$, $M = a + bi$ dan:

Karakter $(1+i) \equiv (1.1) + 2(1.2) + 3(1.3) = m + 2l + 3j$ mod. 4
Karakter $(1-i) \equiv (3.1) + 2(3.2) + 3(3.3) = l + 2j + 3m$ mod. 4

Hierin is, alle congruenties betrekking hebbende op den modulus 4:

$$m + 2l + 3j = 3n + \tfrac{1}{4}(-2a - b + 8)$$

$$l + 2j + 3m = 3n + \tfrac{1}{4}(-b + 6) \equiv -n + \tfrac{1}{4}(-b + 6)$$

$$n = \frac{a^2 + b^2 - 5}{8}$$

$\frac{a-3}{4} \cdot \frac{a+1}{4}$ even zijnde, is $\frac{(a-3)(a+1)}{8}$ door 4 deelbaar, evenzoo ook $\frac{(b-2)(b+2)}{8}$, dus

$$n \equiv \frac{a^2+b^2-5}{8} - \frac{(a-3)(a+1)}{8} - \frac{b^2-4}{8} = \tfrac{1}{4}(+a+1)$$

zoodat er ten slotte komt

$$m+2l+3j \equiv \tfrac{1}{4}(a-b+11) \equiv (a-b-5)$$
$$l+2j+3m \equiv \tfrac{1}{4}(-a-b+5)$$

en hiermede:

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b-5)}, \qquad \left(\left(\frac{1-i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a-b+5)}$$

en het karakter van -1 gelijk twee zijnde:

$$\left(\left(\frac{-1-i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b+3)}, \quad \left(\left(\frac{-1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(-a-b-3)}$$

en

$$\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right) = i^{-\frac{1}{2}b}.$$

Hiermede is het quadratisch karakter van $1+i$, als ook dat van $1-i$, $-1-i$, $-1+i$ ten opzichte van een primair priemgetal in elk geval bepaald. De uitkomsten stemmen geheel overeen met die door GAUSS in Art. 63, 64 van de Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda gegeven, en daar in Art. 68—76 op geheel verschillende wijze bewezen.

---

16. Met betrekking tot de analogie van een groot gedeelte der voorafgaande beschouwingen met die van GAUSS in Art 8 en vv. van zijne *eerste* verhandeling over de theorie der vierde-machtsresten, valt het volgende op te merken.

GAUSS beschouwt reëele getallen, en de priemmodulus p is van den vorm $4n+1$, terwijl de beide getallen $p=8n+1$, $p=8n+5$ onderscheiden moeten worden; p heeft dus dezelfde beteekenis als de norm μ in de gevallen II en III van Art. 4.

De getallen 1, 2, 3 .. $p-1$ worden nu bij GAUSS in 4 klassen A, B, C, D verdeeld. De getallen dezer klassen door α, β, γ, δ aanduidende, is deze klassificatie gegrond op de congruenties:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1 \text{ mod. } \mu = p$$

$$\beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv f$$

$$\gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1$$

$$\delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -f$$

waarin $f^2 \equiv -1$ mod. p, en voor $\mu = a^2 + b^2$

$$a \equiv 1 \text{ mod. } 4, \quad a + bf \equiv 0 \text{ mod. } p.$$

Voor $p = \mu = 8n + 1$ hebben a en b dezelfde beteekenis als in het bovenstaande, voor $p = 8n + 5$ verschillen a en b bij GAUSS alleen in teeken met de waarden die zij in het voorgaande hebben, waar $M = a + bi$ eene *primair* complex priemgetal is.

Laat men nu echter ook complexe getallen toe, dan is het duidelijk dat de bovenstaande congruenties, die betrekking hebben op den modulus $p = \mu$, blijven gelden voor den modulus $a + bi$, zoodat ook $a + bf \equiv 0$ mod. $a + bi$ is, waaruit blijkt $f \equiv i$ mod. $a + bi$, en dus:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1, \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i, \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1, \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \text{ mod.} (a + bi).$$

De klassificatie van GAUSS valt derhalve samen met die volgens het biquadratisch karakter 0, 1, 2, 3 met betrekking tot den modulus $a + bi$.

Inderdaad, de reëele getallen 1, 2, 3 .. , $p-1$ vormen voor den modulus $a + bi$ een volledig systeem incongruente, niet door den modulus deelbare resten.

Vervangt men dan ook in de beide laatste voorbeelden

van Art. 5. de complexe resten door de congruente reële getallen, wat met behulp van $i \equiv 27$ mod. $(-3-8i)$ en $i \equiv 11$ mod. $(-5+6i)$ zonder moeite kan geschieden, dan verkrijgt men:

$$\text{mod.} -3-8i \qquad \mu = 73$$

A 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72.
B 5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68.
C 3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70.
D 11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62.

$$\text{mod.} -5+6i \qquad \mu = 61$$

A 1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58.
B 2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55.
C 3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60.
D 6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59.

volmaakt overeenkomende met de voorbeelden door Gauss gegeven in Art. 11 der eerste verhandeling.

Alleen voor het geval I van Art. 4, bestaat in de reële theorie van Gauss niets analoogs, wat daarmede samenhangt dat men in dit geval uit reële getallen geen volledig restsysteem kan vormen.

De bemerking, dat de verdeeling in klassen *A*, *B*, *C*, *D* bij Gauss in zijne eerste verhandeling identiek is met die volgens het biquadratisch karakter ten opzichte van den modulus $a + bi$, levert ook terstond het middel op, om al die theorema's te bewijzen, die door Gauss in zijne tweede verhandeling, Art. 28, opgesteld zijn, en welke door inductie

ontdekt zijn; maar die tot nog toe, voor zoover ik zie, niet bewezen zijn.

Deze theorema's hebben betrekking op het voorkomen van een reëel priemgetal m in de vier klassen A, B, C, D, of na het voortgaande, op het biquadratisch karakter van m ten opzichte van $a + b\,i$ als modulus.

---

17. Ik laat nu hier de door GAUSS in Art. 28 opgestelde bemerkingen volgen. De priemmodus $p = \mu$ zij van den vorm $4\,n + 1$, volgens de bemerking van het vorig artikel is het nu te doen om de bepaling van de waarde van het symbool:

$$\left(\left(\frac{m}{a + b\,i}\right)\right)$$

waarin m een reëel priemgetal is; de omstandigheid dat voor $\mu = 8\,n + 5$ a en b bij GAUSS in teeken verschillen van de waarden in Art. 14 heeft op de uitspraak der theorema's geen invloed. Het priemgetal m zal met zulk teeken genomen worden, dat het steeds $\equiv 1$ mod. 4 is, dus negatief wanneer het positief genomen, van den vorm $4\,k + 3 = Q$ is, terwijl een positief priemgetal van den vorm $4\,k + 1$ door P zal aangeduid worden. De bemerkingen van GAUSS kunnen nu aldus uitgedrukt worden:

I. Is $a \equiv o$ mod. (m) dan is de waarde van $\left(\left(\frac{m}{a + bi}\right)\right) = +1$, of $= -1$; en wel $+1$ wanneer m van den vorm $8\,r \pm 1$, gelijk -1 wanneer m van den vorm $8\,r \pm 3$ is.

II. Is a niet door m deelbaar, dan hangt de waarde van het symbool af, alléén van het volkomen bepaalde getal x, dat voldoet aan:

$$b \equiv a\,x \text{ mod. } m$$

Voor $m = P$ kan x hier de volgende waarden aannemen:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ .\ P - 1,$$

met uitzondering van de beide waarden f, en $P - f$ die voldoen aan $y\,y \equiv -1$ mod. P. Deze kunnen blijkbaar niet voorkomen, want uit $b \equiv a\,y$ zoude volgen:

$$b^2 \equiv -a^2 \text{ of } a^2 + b^2 = p \equiv 0 \text{ mod. } P$$

d. w. z. p zoude door P deelbaar zijn.

Voor $m = -Q$ daarentegen kan x alle waarden:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ Q-1 \text{ aannemen.}$$

Deze waarden van x, kunnen nu in 4 klassen α, β, γ, δ verdeeld worden, zoodanig dat voor

$b \equiv a\,\alpha$ mod. m	de	waarde	van	het	symbool		$= 1$
voor $b \equiv a\,\beta$	»	»	»	»	»		$= i$
voor $b \equiv a\,\gamma$	»	»	»	»	»		$= 1 - 1$
voor $b \equiv a\,\delta$	»	»	»	»	»		$= 1 - i$

is, of wat op hetzelfde neerkomt, dat in deze gevallen m respectievelijk tot de klassen A, B, C, D behoort.

Omtrent het *aantal* der getallen α, β, γ, δ geldt nu deze regel, dat 3 dezer aantallen gelijk zijn, terwijl dan het 4[de] aantal één kleiner is; en wel is dit vierde aantal dat der α's wanneer voor $a \equiv 0$ m tot A behoort, en dat der γ's wanneer voor $a \equiv 0$ m tot C behoort.

De verdere bemerkingen van Gauss in Art. 28 kunnen voor het oogenblik daargelaten worden, daar hun bewijs geen bezwaar ondervindt, zoodra eenmaal het bovenstaande getoond is, waartoe ik nu overga.

---

18. Zij dan vooreerst $m = -Q$, volgens de reciprociteitswet is, dan:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

en voor $a \equiv o$ mod. Q:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{Q}\right)\right) = \left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{Q}\right)\right) = i^{\frac{Q^2-1}{4}}$$

want $\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1$, immers:

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) \equiv b^{\frac{Q^2-1}{4}} \quad \text{mod. } Q.$$

en daar Q van den vorm $4r+3$, dus $\frac{Q^2-1}{4} = (Q-1)\ \frac{Q+1}{4}$ een veelvoud van $Q-1$ is, zoo volgt uit het theorema van Fermat:

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1$$

Voor $Q = 8n+3$ volgt nu:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = -1$$

voor $Q = 8n+7$:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = +1$$

Voor $m = P = (A+Bi)\ (A-Bi)$ daarentegen, waarin $A+Bi$ en $A-Bi$ de primaire factoren van P zijn, volgt uit de reciprociteitswet:

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right)\ \left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

en voor $a \equiv 0$ mod. P.

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{A+Bi}\right)\right)\ \left(\left(\frac{bi}{A-Bi}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{-bi}{A+Bi}\right)\right)\ \left(\left(\frac{+bi}{A-Bi}\right)\right)\ \left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right).$$

Nu is, zooals bekend, in 't algemeen:

$$\left(\left(\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right)\right)\ \left(\left(\frac{\alpha-\beta i}{A-Bi}\right)\right)=1\text{, dus:}$$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right)=(-1)^{\frac{P-1}{4}}$$

of voor $P=8n+1$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=1$$

en voor $P=8n+5$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=-1\,.$$

Hiermede is dus het in het voorgaande Art. onder I gezegde, geheel bewezen.

---

19. Onderstellen wij dan nu dat a niet door m deelbaar is, en beschouwen wij eerst het eenvoudigste geval

$$m=-Q\,,$$

dan is dus:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

en voor $b\equiv ax$ mod. Q:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a(1+xi)}{Q}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+xi}{Q}\right)\right)$$

daar $\left(\left(\frac{a}{Q}\right)\right)=1$ is, zooals reeds in het voorgaand artikel bewezen werd. Uit de verkregen uitkomst:

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+b\,i}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+x\,i}{Q}\right)\right)$$

blijkt nu reeds dat de waarde van het symbool links, alleen van het getal x afhangt, welk getal de Q waarden:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ Q-1$$

kan aannemen.

Wij hebben dus nu nog slechts deze vraag te beantwoorden: wanneer de modulus Q een priemgetal van den vorm $4\,n+3$ is, hoeveel der getallen:

$$1,\ 1+i,\ 1+2\,i,\ 1+3\,i\ \ldots\ldots\ 1+(Q-1)\,i$$

behooren er dan respectievelijk tot de klassen A, B, C, D?

Ik bemerk hiertoe vooreerst dat, als een volledig systeem niet door Q deelbare resten, de getallen:

$$\alpha+\beta\,i$$

genomen kunnen worden, waarin α en β de waarden $0, 1, 2, 3 \,.\, Q-1$ doorloopen, met uitzondering der combinatie $\alpha=0$, $\beta=0$; en ten tweede dat de getallen:

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ q-1$$

allen tot A behooren, zoodat wanneer:

$$\alpha'+\beta'\,i$$

tot een zekere klasse behoort, ook:

$$2\,(\alpha'+\beta'\,i),\ 3\,(\alpha'+\beta'\,i)\ \ldots\ldots\ (q-1)\,(\alpha'+\beta'\,i)$$

tot diezelfde klasse behooren, al welke getallen door het weglaten van veelvouden van q weder tot den vorm $\alpha+\beta\,i$, waarin α en β kleiner dan q zijn, teruggebracht kunnen worden. Nu zijn de resten van:

$$\alpha',\ 2\,\alpha',\ 3\,\alpha'\ \ldots\ldots\ (q-1)\,\alpha'$$

zoolang α' niet $= 0$ is, volgens den modulus q in zekere volgorde met de getallen:

$$1, 2, 3 \ldots . q-1$$

congruent.

In de groep der $q-1$ getallen

$$\alpha' + \beta' i,\ 2(\alpha' + \beta' i) \ldots \quad (q-1)(\alpha' + \beta' i)$$

die allen tot dezelfde klasse behooren, komt er dus één voor, congruent met een der getallen

$$1 + xi \qquad x = 0, 1, 2 \ldots q-1.$$

Nu is het aantal getallen van elke klasse $\frac{q^2-1}{4} = (q-1) \times \frac{q+1}{4}$, een veelvoud van $q-1$, en de $q-1$ getallen zonder reëel gedeelte

$$i, 2i, 3i, \ldots (q-1)i$$

behooren voor $q = 8n + 7$ tot A, voor $q = 8n + 3$ tot C.

Daar men nu alle getallen van elke klasse, waarvan het reëel gedeelte niet $= 0$ is, op bovenstaande wijze in groepen van $q-1$ getallen kan vereenigen, zoodanig dat er in elke groep één getal met het reëele gedeelte 1, voorkomt, zoo volgt dat voor

$Q = 8n + 7$ er in de klassen A, B, C, D respectievelijk

$$\frac{q-3}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}$$

getallen $1 + xi$ voorkomen.

Voor $Q = 8n + 3$ zijn deze aantallen:

$$\frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q-3}{4}, \quad \frac{q+1}{4};$$

terwijl volgens Art. 18 in het geval $a \equiv 0$ mod. Q voor $Q = 8n + 7$, en $8n + 3$, Q respectievelijk tot de klassen A en C behoorde.

Alles wat op het geval $m = -Q$ had, is dus hiermede afgehandeld.

---

20. Voor $m = P = (A + Bi)(A - Bi)$ vonden wij reeds:

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

en dus wanneer

$$b \equiv ax \quad \text{mod. } P$$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a}{A-Bi}\right)\right)$$

of daar, volgens een reeds in Art. 18 gemaakte bemerking het product der beide laatste factoren rechts $= 1$ is:

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right),$$

waaruit reeds blijkt dat de waarde van het symbool links alleen van het getal x afhangt, zoodat nog slechts de volgende vraag te beantwoorden blijft: voor hoeveel waarden van $1 + xi$ neemt

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

respectievelijk de waarden $1, i, -1, -i$ aan? Voor x heeft men hier de waarden:

$$0, 1, 2, 3 \ldots . P-1$$

te nemen, *uitgezonderd* de beide wortels van $y^2 \equiv -1$ mod. P.

Om deze vraag te antwoorden beschouw ik een volledig systeem incongruente niet door den modulus $A + Bi$ deel-

bare resten, en breng deze volgens hun biquadratisch karakter tot 4 groepen A, B, C, D. Hierbij denk ik mij elke rest zoo gekozen dat het reëele deel $= 1$, en de factor van i kleiner dan P is.

Men kan dit aldus voorstellen:

$$\text{mod. } A + B\,i \qquad A^2 + B^2 = P$$

$$\begin{array}{lll} \text{Klasse } A & & \alpha = 1 + a\,i \\ \phantom{\text{Klasse }} B & & \beta = 1 + b\,i \\ \phantom{\text{Klasse }} C & & \gamma = 1 + c\,i \\ \phantom{\text{Klasse }} D & & \delta = 1 + d\,i \end{array}$$

De getallen a, b, c, d in hun geheel stemmen overeen met:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots (P-1)$$

behalve dat de waarde f, die $\equiv i$ is, ontbreekt, want $1 + f\,i \equiv 0$ mod. $A + B\,i$.

Evenzoo met $A - B\,i$ handelende, ziet men gemakkelijk dat de klassificatie deze zal zijn:

$$\text{mod. } A - B\,i$$

$$\begin{array}{lll} \text{Klasse } A & & 1 + (P - a)\,i \\ \phantom{\text{Klasse }} B & & 1 + (P - d)\,i \\ \phantom{\text{Klasse }} C & & 1 + (P - c)\,i \\ \phantom{\text{Klasse }} D & & 1 + (P - b)\,i \end{array}$$

want gelijktijdig heeft men:

$$(1 + x\,i)^{\frac{P-1}{4}} - i^{\rho} = (A + B\,i)\,(C + D\,i)$$

$$(1 - x\,i)^{\frac{P-1}{4}} - i^{3\rho} = (A - B\,i)\,(C - D\,i)$$

Heeft dus $1 + x\,i$ volgens den modulus $A + B\,i$ het karakter ϱ, dan heeft $1 - x\,i \equiv 1 + (P - x)\,i$ volgens den modulus $A - B\,i$ het karakter $3\,\varrho$.

---

21. Zal nu:

$$\left(\left(\frac{1 + x\,i}{A + B\,i}\right)\right)\left(\left(\frac{1 + x\,i}{A - B\,i}\right)\right)$$

gelijk 1 worden, dan moet, wanneer:

$$\left(\left(\frac{1 + x\,i}{A + B\,i}\right)\right)$$

een der waarden 1, i, — 1, — i heeft, tegelijkertijd:

$$\left(\left(\frac{1 + x\,i}{A + B\,i}\right)\right)$$

een der waarden 1, — i, — 1, i aannemen, of op de beide verdeelingen in klassen lettende: wanneer x respectievelijk tot a, b, c, d behoort, dan moet telijkertijd ook $p - x$ tot de getallen a, b. c, d behooren. Men kan dus zeggen dat het aantal der waarden van van x waarvoor:

$$\left(\left(\frac{1 + x\,i}{A + B\,i}\right)\right)\left(\left(\frac{1 + x\,i}{A - B\,i}\right)\right) = 1$$

wordt, gelijk is aan de som van de aantallen oplossingen der congruenties:

$$a + a' \equiv 0$$
$$b + b' \equiv 0$$
$$c + c' \equiv 0$$
$$d + d' \equiv 0$$

ten opzichte van den modulus P, of wat op hetzelfde neêrkomt ten opzichte van den modulus $A + B\,i$.

Men bedenke hierbij, dat wel de voor x uitgesloten waarde $p - f$ onder a, b, c, d voorkomt, maar dat deze waarde toch in geen der bovenstaande congruenties kan optreden, omdat dit zoude vereischen dat ook f voorkwam onder de getallen a, b, c, d, wat niet het geval is.

Nu is $\alpha = 1 + a\,i$, zoodat men de voorgaande congruenties na vermenigvuldiging met i, overgaan in

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &\equiv 2 \quad \text{mod. } (A + B\,i) \\ \beta + \beta' &\equiv 2 \\ \gamma + \gamma' &\equiv 2 \\ \delta + \delta' &\equiv 2. \end{aligned}$$

Behoort $\frac{p-1}{2}$ tot de klasse A, dan gaan de voorgaande congruenties door vermenigvuldiging met $\frac{p-1}{2}$ over in

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + 1 &\equiv 0 \quad \text{mod. } (A + B\,i) \\ \beta + \beta' + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \delta' + 1 &\equiv 0, \end{aligned}$$

zoodat de som van het aantal oplossingen dezer congruenties gelijk is aan het aantal waarden van x, die

$$\left(\left(\frac{1 + x\,i}{A + B\,i}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1 + x\,i}{A - B\,i}\right)\right)$$

gelijk 1 maken.

Maar zooals men zich onmiddellijk overtuigt, blijft dit resultaat hetzelfde, ook wanneer $\frac{p-1}{2}$ tot de klassen B, C, D behoort. Behoort bijv. $\frac{p-1}{2}$ tot B, dan volgt uit $\alpha + \alpha' \equiv 2$ door vermenigvuldiging met $\frac{p-1}{2}$

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$

en uit $\beta + \beta' \equiv \gamma + \gamma' \equiv \delta + \delta' \equiv 2$ respectievelijk

$$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0, \quad \delta + \delta' + 1 \equiv 0, \quad \alpha + \alpha' + 1 \equiv 0.$$

Noemt men de aantallen der waarden van x, die respectievelijk

$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)$ $\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$ gelijk 1, i, -1, $-i$ maken t, u, v, w, dan is dus t de som van de aantallen oplossingen der congruenties

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + 1 &\equiv 0 \quad \text{mod. } A + Bi \\ \beta + \beta' + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \delta' + 1 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Geheel op dezelfde wijze vindt men dat

$u =$ de som van de aantallen oplossingen der congruenties:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \alpha + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \beta + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \gamma + 1 &\equiv 0, \end{aligned}$$

terwijl men voor v en w de congruenties:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma + 1 &\equiv 0 & \qquad \alpha + \beta + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \delta + 1 &\equiv 0 & \text{en} \qquad \beta + \gamma + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \alpha + 1 &\equiv 0 & \qquad \gamma + \delta + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \beta + 1 &\equiv 0 & \qquad \delta + \alpha + 1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

te beschouwen heeft.

Is dus $P = 8n + 1$ dan heeft men volgens Art. 7, 8:

$$\begin{aligned} t &= (0.0) + (1.1) + (2.2) + (3.3) = h + l + k + j = 2n - 1 \\ u &= (0.3) + (1.0) + (2.1) + (3.2) = l + j + m + m = 2n \\ v &= (0.2) + (1.3) + (2.0) + (3.1) = k + m + k + m = 2n \\ w &= (0.1) + (1.2) + (2.3) + (3.0) = j + m + m + l = 2n \end{aligned}$$

en voor $P = 8n + 5$ volgens Art. 13.

$$\begin{aligned} t &= (0.2) + (1.3) + (2.0) + (3.1) = k + j + h + l = 2n + 1 \\ u &= (0.1) + (1.2) + (2.3) + (3.0) = j + l + m + m = 2n + 1 \\ v &= (0.0) + (1.1) + (2.2) + (3.3) = h + m + h + m = 2n \\ w &= (0.3) + (1.0) + (2.1) + (3.2) = l + m + m + j = 2n + 1 \end{aligned}$$

22. Al het voorgaande samenstellende, hebben dus de kenmerken, om te onderscheiden of een reëel priemgetal tot de klassen A, B, C, D behoort, wanneer de modulus p van den vorm $4n + 1$ en $a + bi$ een primaire complexe priemfactor van p is, de volgende gedaante:

Het priemgetal $P = 8n + 1$ behoort tot:

A voor	$a \equiv 0,\ b \equiv a\alpha$	mod. P. Aantal der	α's $= 2n - 1$
B voor	$b \equiv a\beta$	» »	β's $= 2n$
C voor	$b \equiv a\gamma$	» »	γ's $= 2n$
D voor	$b \equiv a\delta$	» »	δ's $= 2n$

Het priemgetal $P = 8n + 5$ behoort tot:

A voor	$b \equiv a\alpha$	mod. P. Aantal der	α's $= 2n + 1$
B voor	$b \equiv a\beta$	» »	β's $= 2n + 1$
C voor	$b \equiv a\gamma$ $\quad a \equiv 0$	» »	γ's $= 2n$
D voor	$b \equiv a\delta$	» »	δ's $= 2n + 1$

Het priemgetal $-Q = -(8n + 3)$ behoort tot:

A voor	$b \equiv a\alpha$	mod. Q. Aantal der	α's $= 2n + 1$
B »	$b \equiv a\beta$	» » »	β's $= 2n + 1$
C »	$b \equiv a\gamma,\ a \equiv 0$	» » »	γ's $= 2n$
D »	$b \equiv a\delta$	» » »	δ's $= 2n + 1$

Het priemgetal $-Q = -(8n + 7)$ behoort tot:

A voor	$b \equiv a\alpha,\ a \equiv 0$	mod. Q. Aantal der	α's $= 2n + 1$
B »	$b \equiv a\beta$	» » »	β's $= 2n + 2$
C »	$b \equiv a\gamma$	» » »	γ's $= 2n + 2$
D »	$b \equiv a\delta$	» » »	δ's $= 2n + 2$

Ik voeg hierbij nog de volgende bemerkingen van GAUSS (Art. 28), waarvan het bewijs na al het voorgaande niet het minste bezwaar oplevert.

1. Het getal 0 behoort altijd tot de α's, en de getallen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ behooren (mod. m) respectievelijk tot de α's, δ's, γ's en β's.

2. Voor $P = 8n + 1$, $Q = (8n + 7)$ behooren de waarden van $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ (mod. m) respectievelijk tot de

α's, δ's, γ's, β's; en voor $P = 8n + 5$, $Q = (8n + 3)$ behooren deze waarden respectievelijk tot de γ's, β's, α's δ's.

DERDEMACHTS-RESTEN.

23. Nu tot de derdemachts-resten overgaande, is het noodig het een en ander omtrent de theorie der geheele getallen van den vorm $a + b\varrho$ in herinnering te brengen; ϱ is hierin een complexe derdemachts-wortel der eenheid, dus $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$.

Zooals dan bekend is gelden ook in deze theorie omtrent de deelbaarheid der getallen, hunne ontbinding in priemfactoren, het bestaan van primitive wortels der priemgetallen enz. geheel analoge theorema's als die in de gewone theorie der reëele getallen, en verreweg het grootste gedeelte der onderzoekingen in de vier eerste sectiën der Disquisitiones arithmeticae kunnen bijna onveranderd ook voor de theorie der geheele getallen $a + b\varrho$ doorgevoerd worden.

Het product van twee geconjugeerde getallen $a + b\varrho$, $a + b\varrho^2$

$$(a + b\varrho)(a + b\varrho^2) = a^2 - ab + b^2$$

heet de *norm* van het getal $a + b\varrho$ en zal steeds door μ aangeduid worden.

Het getal 3 is in deze theorie geen priemgetal, want:

$$3 = (1 - \varrho)(1 - \varrho^2) = -\varrho^2 (1 - \varrho)^2$$

Als priemgetallen, behalve $1 - \varrho$, in deze theorie doen zich voor:

ten eerste de reële priemgetallen van den vorm $3n - 1$, de norm is dan $= (3n - 1)^2$;

ten tweede de complexe priemfactoren van de reële priemgetallen van den vorm $3n + 1$. Dit reële priemgetal is dan te gelijk de norm van de complexe priemfactor.

Bijv. is: $7 = (2 + 3\varrho)(2 + 3\varrho^2) = (2 + 3\varrho)(-1 - 3\varrho)$.

De priemgetallen $2 + 3\varrho$, $-1 - 3\varrho$ hebben beide 7 tot norm.

In beide gevallen is dus de norm van den vorm $3k+1$.

Verder is het voldoende alleen *primaire* priemgetallen te beschouwen, waarbij ik mij van dit woord in den zin van EISENSTEIN (Cr. 27, pag. 301) zal bedienen, zoodat $a + b\varrho$ primair heet, wanneer $a+1$ en b beide door 3 deelbaar zijn. De reëele priemgetallen van den vorm $3n-1$ moeten dus positief genomen worden om primair te zijn.

Zij dan M een primair priemgetal, μ de norm van den vorm $3n+1$. Een volledig stelsel incongruente, niet door den modulus M deelbare resten bevat dan $\mu - 1 = 3n$ getallen. Deze getallen kunnen tot 3 klassen, elk n getallen bevattende, gebracht worden, al naar dat hun $\frac{\mu-1}{3}$ de macht volgens mod. M congruent is met 1, ϱ of ϱ^2. Deze verdeeling kan aldus voorgesteld worden:

$$\begin{array}{llll} A & \alpha, & \alpha', & \alpha'' \,.. \\ B & \beta, & \beta', & \beta'' \,.. \\ C & \gamma, & \gamma', & \gamma'' \,.. \end{array}$$

waarin dus:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1, \qquad \beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho, \qquad \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho^2 \text{ mod. } M.$$

Het cubisch karakter der getallen $\alpha, \alpha', \alpha'', ..$ is $= 0$, dat der getallen $\beta, \beta' .. = 1$, dat der getallen $\gamma, \gamma' .. = 2$.

Het zal ondertusschen ook gemakkelijk zijn, van het EISENSTEIN'sche symbool gebruik te maken, en dus te schrijven:

$$\left[\frac{\alpha}{M}\right] = 1, \quad \left[\frac{\beta}{M}\right] = \varrho, \quad \left[\frac{\gamma}{M}\right] = \varrho^2.$$

Het doel van de eerstvolgende beschouwingen is nu de bepaling van het cubisch karakter van $1-\varrho$, of wel de bepaling van de waarde van het symbool $\left[\frac{1-\varrho}{M}\right]$.

24. Door bij alle getallen van A, B, C de eenheid op te tellen, ontstaan de 3 groepen van getallen A', B', C':

$$\begin{array}{ll} A' & \alpha+1,\ \alpha'+1,\ \alpha''+1\ .. \\ B' & \beta+1,\ \beta'+1,\ \beta''+1\ .. \\ C' & \gamma+1,\ \gamma'+1,\ \gamma''+1\ .. \end{array}$$

en ik noem nu (0.0), (0.1), (0.2) de aantallen getallen van A' die respectievelijk congruent zijn met getallen van A, B, C; (1.0), (1.1), (1.2) de aantallen getallen van B' die resp. congruent zijn met getallen van A, B, C; eindelijk (2.0, (2.1), (2.2) de aantallen getallen C' die respect. congruent zijn met getallen A, B, C.

Al deze getallen kunnen in het schema S vereenigd worden:

$$\begin{array}{ccc} (0.0) & (0.1) & (0.2) \\ (1.0) & (1.1) & (1.2) \\ (2.0) & (2.1) & (2.2) \end{array}$$

en met de bepaling van deze getallen is ook onmiddellijk het cubisch karakter van $1-\varrho$ gevonden. Want uit de blijkbaar identieke congruenties:

$$(x-\alpha)\,(x-\alpha')\,(x-\alpha'')\ .\ .\equiv x)^{\frac{\mu-1}{3}}-1 \text{ mod. } M.$$

$$(x-\beta)\,(x-\beta')\,(x-\beta'')\ .\ .\equiv x)^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho$$

$$(x-\gamma)\,(x-\gamma')\,(x-\gamma'')\ .\ .\equiv x)^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho^2$$

volgt voor $x=-1$, daar $\dfrac{\mu-1}{3}$ even is (behalve voor $M=2$, welk geval uit te zonderen is):

$$(\beta+1)\,(\beta'+1)\,(\beta''+1)\ .\ .\equiv 1-\varrho \text{ mod. } M$$
$$(\gamma+1)\,(\gamma'+1)\,(\gamma''+1)\ .\ .\equiv 1-\varrho^2$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{(1.1)+2(1.2)}$$

$$\left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{(2.1)+2(2.2)}$$

---

25. Het getal -1 behoort, als volkomen derde-macht tot de klasse A, en de getallen α en $-\alpha$, β en $-\beta$, γ en $-\gamma$ komen tegelijkertijd in de klassen A, B, C voor.

Met behulp van deze bemerking overtuigt men zich nu dadelijk dat

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van:
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$ mod. M
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
(0.2)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
(1.2)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
(2.0)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$
(2.1)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$
(2,2)	$\gamma + \gamma + 1 \equiv 0$

zoodat men heeft:

$$(0.1) = (1.0), \quad (0.2) = (2.0), \quad (1.2) = (2.1).$$

Is $x\,y = 1$ mod. M en behoort x tot A, dan behoort blijkbaar ook y tot A, behoort echter x tot B of C, dan behoort y respect. tot C of B; wat men kan uitdrukken door te schrijven

$$\alpha\,\alpha' \equiv 1, \quad \beta\,\gamma \equiv 1 \text{ mod. } M.$$

Uit

$$\gamma(\alpha + \beta + 1) \equiv \gamma' + 1 + \gamma$$
$$\beta(\alpha + \gamma + 1) \equiv \beta' + 1 + \beta$$

besluit men nu tot deze betrekkingen:

$$(0.1) = (2.2), \quad (0.2) = (1.1),$$

zoodat het schema S dezen vorm heeft:

$$\begin{matrix} h & j & k \\ j & k & l \\ k & l & j. \end{matrix}$$

Daar -1 tot A, dus 0 tot A' behoort, maar behalve dit getal 0 van A' overigens alle getallen van A', B', C' met één getal van A, B of C congruent zijn, zoo volgt verder

$$h + j + k = n - 1$$
$$j + k + l = n.$$

De beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \quad \text{mod. } M,$$

waarin α, β, γ respectievelijk uit de klassen A, B, C te kiezen zijn, levert eindelijk nog eene betrekking tusschen h, j, k, l. Neemt men namenlijk eerst voor α de getallen van A, dan verkrijgt men voor dit aantal

$$h\,l + j\,j + k\,k.$$

Neemt men daarentegen achtereenvolgens voor β alle getallen van B, dan vindt men voor ditzelfde aantal:

$$j\,k + k\,l + l\,j$$

dus

$$0 = h\,l + j\,j + k\,k - j\,k - k\,l - l\,j.$$

---

26. Elimineert men uit deze laatste vergelijking h met behulp van $h = l - 1$, dan is

$$0 = l\,(l - 1) + j\,j + k\,k - j\,k - k\,l - l\,j,$$

welke vergelijking, met 4 vermenigvuldigd, wegens

$$(j + k)^2 + 3\,(j - k)^2 = 4\,(j\,j + k\,k - j\,k)$$

dezen vorm aanneemt:

$$0 = 4\,l^2 - 4\,l + (j+k)^2 + 3\,(j-k)^2 - 4\,l\,(k+j)$$

of wel, daar $l = n - (j+k)$ is en met 9 vermenigvuldigend:

$$36\,n = 36\,l^2 + 9\,(j+k)^2 + 27\,(j-k)^2 - 36\,l\,(j+k) + 36(j+k)$$

en

$$24\,n = 24\,(j+k+l).$$

dus aftrekkende:

$$12\,n = 36\,l^2 + 9(j+k)^2 + 27(j-k)^2 - 36\,l(j+k) + 12(j+k) - 24\,l$$

of wel

$$12\,n + 4 = 4\,\mu = (6\,l - 3\,j - 3\,k - 2)^2 + 27\,(j-k)^2.$$

Stellen wij nu:

$$A = 6\,l - 3j - 3\,k - 2$$
$$B = 3j - 3\,k\ ,$$

dan is dus:

$$4\,\mu = A^2 + 3\,B^2$$

en men kan verder h, j, k, l met behulp van A en B gemakkelijk aldus uitdrukken:

$$9\,h = 3\,n + A - 7$$
$$18j = 6\,n - A + 3\,B - 2$$
$$18\,k = 6\,n - A - 3\,B - 2$$
$$9\,l = 3\,n + A + 2\ .$$

Om nog A en B te bepalen zijn nu twee gevallen te onderscheiden.

---

27. Is vooreerst M reëel van den vorm $3\,n - 1$, dus $\mu = M^2$, dan volgt uit

$$4\,\mu = 4\,M^2 = A^2 + 3\,B^2$$

dat $A = \pm 2 M$, $B = 0$ is. Want was B niet $= 0$, dan zou men een geheel getal x kunnen bepalen, zóó dat

$$A \equiv B x \text{ mod. } M,$$

waaruit volgt

$$A^2 \equiv - 3 B^2 \equiv B^2 x^2 \text{ mod. } M.$$

dus

$$x^2 \equiv - 3 \text{ mod. } M$$

wat onmogelijk is, daar men weet dat -3 niet-rest is van M.

Stellig is dus $B = 0$, $A = \pm 2 M$. Maar ook het teeken van A volgt onmiddellijk uit de bemerking dat $A \equiv 1$ mod. 3 is, en M als *primair* priemgetal $\equiv -1$ mod. 3; waaruit dus blijkt:

$$A = 2 M$$

en ten slotte

$$\begin{aligned} 9 h &= 3 n + 2 M - 7 \\ 9 j = 9 k &= 3 n - M - 1 \\ 9 l &= 3 n + 2 M + 2. \end{aligned}$$

---

28. Is in de tweede plaats $M = a + b \varrho$ een primaire complexe priemfactor van een reëel priemgetal p van den vorm $3 n + 1$, dan is:

$$4 \mu = (2 a - b)^2 + 3 b^2 = A^2 + 3 B^2$$

en daar $a + b \varrho$ primair is, $a + 1 \equiv b \equiv 0$ mod. 3.

Nu is ook B door 3 deelbaar, en daar, zooals gemakkelijk te bewijzen valt, 4μ slechts op éene wijze voorgesteld kan worden als de som van een quadraat en het 27 voud van een tweede quadraat, zoo volgt:

$$A = 2 a - b, \ B = \pm b$$

Het teeken van A wordt namenlijk weder bepaald door $A \equiv 1$ mod. 3.

Om nog het teeken van B te bepalen dient deze beschouwing: doorloopt z alle getallen van A, B en C dan vindt men, op geheel dezelfde wijze als in Art. 12:

$$\Sigma (z^3 + 1)^{\frac{\mu - 1}{3}} \equiv -2 \equiv 3 (h + j \varrho + k \varrho^2) \text{ mod. } M$$

of:

$$-2 \equiv 3 ((h - k) + \varrho (j - k))$$

en nu h, j, k door A en B uitdrukkende, en voor A de waarde $2a - b$ schrijvende, na een kleine herleiding:

$$0 \equiv 2a - b + B + 2B\varrho \text{ mod. } (M = a + b\varrho)$$

waaruit blijkt dat $B = b$ is.

Nadat op deze wijze A en B gevonden zijn, heeft men:

$$9h = 3n + 2a - b - 7$$
$$9j = 3n - a + 2b - 1$$
$$9k = 3n - a - b - 1$$
$$9l = 3n + 2a - b + 2$$

---

29. Volgens Art. 24 is nu het cubisch karakter van $1 - \varrho$ volgens den modulus 3:

$$\equiv (1.1) + 2 (1.2) \equiv k - l$$

dat van $1 - \varrho^2$:

$$\equiv (2.1) + 2 (2.2) \equiv l - j$$

dus wanneer M reëel van den vorm $3n - 1$ is, volgens Art. 27

$$\text{Karakter } (1 - \varrho) \equiv -\frac{M + 1}{3}$$

$$\text{»} \quad (1 - \varrho^2) \equiv +\frac{M + 1}{3}$$

of wel:

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{-\frac{M+1}{3}}, \left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{+\frac{M+1}{3}}$$

waaruit nog volgt:

$$\left[\frac{3}{M}\right] = 1.$$

Is daarentegen $M = a + b\varrho$ een primaire complexe factor van een reëel priemgetal van den vorm $3n+1$ dan is, volgens de waarden in Art. 28 gevonden:

$$\text{Karakter } (1-\varrho) \equiv \frac{1}{3}(-a-1)$$

$$\text{»} \qquad (1-\varrho^2) \equiv \frac{1}{3}(a-b+1)$$

of:

$$\left[\frac{1-\varrho}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{a+1}{3}}, \left[\frac{1-\varrho^2}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{\frac{a-b+1}{3}}$$

$$\left[\frac{3}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{1}{3}b}$$

Deze resultaten verschillen niet wezenlijk van die door EISENSTEIN gegeven in het 28ste Deel van CRELLE's *Journal*, pag. 28 en v.v.

---

30. Omtrent het geval dat het priemgetal M een factor is van een reëel priemgetal p van den vorm $3n+1$ moge nog het volgende opgemerkt worden.

Daar in $M = a + b\varrho$, a en b geen gemeene deeler hebben en derhalve ook b en $a-b$ relatief priem zijn, zoo kan men altijd twee geheele getallen α en β vinden, zoodanig dat:

$$b\alpha + (a-b)\beta = 1$$

en dan is:

$$(a + b\varrho)(\alpha + \beta\varrho) = a\alpha - b\beta + \varrho$$

dus:

$$\varrho \equiv b\beta - a\alpha \text{ mod. } (M = a + b\varrho).$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat elk geheel getal $c + d\varrho$ volgens den modulus $a + b\varrho$ congruent is met een reëel getal, welk reëel getal kleiner dan de modulus $\mu = p$ aangenomen kan worden, zoodat de reëele getallen:

$$0, 1, 2, 3 \ldots \mu - 1$$

een volledig restsysteem vormen. Verdeelt men nu deze reëele getallen (met uitzondering van 0) volgens hun cubisch karakter in drie klassen:

A	α	α'	α''	..
B	β	β'	β''	..
C	γ	γ'	γ''	..

en noemen wij f het reëele getal dat $\equiv \varrho$ is (mod. M), dan is dus:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1 \equiv \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f \equiv \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2 \equiv 0 \text{ mod. } M = (a + b\varrho)$$

en daar:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2$$

reëele getallen zijn, zoo moeten zij niet alleen door $a + b\varrho$ maar ook door den modulus:

$$p = \mu = (a + b\varrho)(a + b\varrho^2)$$

deelbaar zijn, of:

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1 \text{ mod. } (p = \mu)$$

$$\beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f$$

$$\gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f^2 \quad .$$

Hieruit blijkt dus dat de klassificatie der getallen

$$1, 2, 3 \ldots, p-1$$

met behulp dezer drie laatste congruenties, samenvalt met die volgens hun cubisch karakter ten opzichte van den modulus $a + b\varrho$.

Het resultaat

$$\left[\frac{3}{a + b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{1}{3}b}$$

kan nu aldus uitgesproken worden: dat het getal 3 tot de klasse A, B of C behoort, al naardat $-\frac{1}{3}b$ van den vorm $3m$, $3m+1$ of $3m+2$ is.

Ik laat hier eenige voorbeelden volgen.

$p = 7 \quad a = 2 \quad b = 3 \quad f = 4$ — Schema S.

A	1, 6	$h\ j\ k$	0 1 0
B	2, 5	$j\ k\ l$	1 0 1
C	3, 4	$k\ l\ j$	0 1 1

$p = 13 \quad a = -1 \quad b = 3 \quad f = 9$

A	1, 5, 8, 12	0 2 1
B	4, 6, 7, 9	2 1 1
C	2, 3, 10, 11	1 1 2

$p = 19 \quad a = 5 \quad b = 3 \quad f = 11$

A	1, 7, 8, 11, 12, 18	2 2 1
B	4, 6, 9, 10, 13, 15	2 1 3
C	2, 3, 5, 14, 16, 17	1 3 2

$p = 31 \quad a = 5 \quad b = 6 \quad f = 25$

A	1, 2, 4, 8, 15, 16, 23, 27, 29, 30	3 4 2
B	3, 6, 7, 12, 14, 17, 19, 24, 25, 28	4 2 4
C	5, 9, 10, 11, 13, 18, 20, 21, 22, 26	2 4 4

$p = 37 \quad a = -4 \quad b = 3 \quad f = 26$

A	1, 6, 8, 10, 11, 14, 23, 26, 27, 29, 31, 36	2 5 4
B	2, 9, 12, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 25, 28, 35	5 4 3
C	3, 4, 5, 7, 13, 18, 19, 24, 30, 32, 33, 34	4 3 5

$p = 43 \quad a = -1 \quad b = 6 \quad f = 36$

A	1, 2, 4, 8, 11, 16, 21, 22, 27, 32, 35, 39, 41, 42	3 6 4
B	3, 5, 6, 10, 12, 19, 20, 23, 24, 31, 33, 37, 38, 40	6 4 4
C	7, 9, 13, 14, 15, 17, 18, 25, 26, 28, 29, 30, 34, 36	4 4 6

$p = 61 \quad a = 5 \quad b = 9 \quad f = 13$

A	1, 3, 8, 9, 11, 20, 23, 24, 27, 28, 33, 34, 37,	6 8 5
	38, 41, 50, 52, 53, 58, 60	8 5 7
B	4, 10, 12, 14, 17, 19, 25, 26, 29, 30, 31, 32,	5 7 8
	35, 36, 42, 44, 47, 49, 51, 57	
C	2, 5, 6, 7, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 39, 40, 43,	
	45, 46, 48, 54, 55, 56, 59	

Terwijl over het voorkomen van het getal 3 in de groepen A, B, C op bovenstaande wijze vooruit beslist is, kan men nu, met behulp van de reciprociteits-wet, in de theorie der cubische resten gemakkelijk de kenmerken opstellen, noodig om het voorkomen ook van andere getallen in deze klassen te onderkennen. Het is hierbij blijkbaar voldoende om alleen priemgetallen te beschouwen.

Wat het priemgetal 2 betreft, kan men deze criteria, zonder hulp der reciprociteits-wet, aldus afleiden.

---

31. Daar het getal $p-1$ altijd tot A behoort, zoo volgt onmiddellijk, dat 2 tot de klasse A, B of C zal behooren al naar gelang $\frac{p-1}{2}$ tot de klasse A, C of B behoort.

De getallen h, k, j zijn nu respectievelijk de aantallen oplossingen der congruenties:

$$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0 \text{ mod. } p.$$
$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$
$$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$$

en daar men α met α', β met β', γ met γ' mag verwisselen, zijn deze drie aantallen even, uitgezonderd het eerste, wanneer $\alpha = \alpha' = \frac{p-1}{2}$ tot A behoort, of, uitgezonderd het tweede, wanneer $\beta = \beta' = \frac{p-1}{2}$ tot B behoort, of, uitgezonderd het derde, wanneer $\gamma = \gamma' = \frac{p-1}{2}$ tot C behoort.

Hieruit blijkt dus dat 2 tot de klasse A, B of C behoort, al naardat van de drie getallen h, j, k het eerste, tweede of derde oneven is.

Daar $p = 3n + 1$ (n even) en volgens Art. 28

$$9h = 3n + 2a - b - 7$$
$$9j = 3n - a + 2b - 1$$
$$9k = 3n - a - b - 1$$

is, zoo is h oneven wanneer b even is, j oneven wanneer a even is, eindelijk k oneven wanneer a en b beide oneven zijn. Daar a en b geen gemeenen deeler hebben, zoo zijn geen andere gevallen mogelijk, dus 2 behoort tot:

A	wanneer	$b \equiv 0$	mod. 2
B	«	$a \equiv 0$	mod. 2
C	«	$a \equiv b \equiv 1$	mod. 2

32. Wat het voorkomen van 5 betreft, volgens de cubische reciprociteits-wet is

$$\left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a + b\varrho}{5}\right]$$

want 5 is ook in de theorie der geheele getallen $a + b\varrho$ een priemgetal.

Voor $a \equiv 0$ mod. 5 is dus:

$$\left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{b\varrho}{5}\right] = \left[\frac{\varrho}{5}\right] = \varrho^8 = \varrho^2$$

dus behoort 5 tot C.

Is a niet door 5 deelbaar, dan kan men x bepalen uit:

$$b \equiv a\,x \text{ mod. } 5$$

en x kan de waarden 0, 1, 2, 3, 4 aannemen:

$$\left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a(1 + x\varrho)}{5}\right] = \left[\frac{1 + x\varrho}{5}\right]$$

en men vindt nu:

$$x = 0 \qquad \left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 1 \qquad \left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = \varrho$$

$$x = 2 \qquad \left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 3 \qquad \left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2$$

$$x = 4 \qquad \left[\frac{5}{a + b\varrho}\right] = \varrho,$$

zoodat 5 behoort tot

$$\begin{array}{llll} A & \text{wanneer} & b \equiv 0, & b \equiv 2a \mod. 5 \\ B & \text{»} & b \equiv a, & b \equiv 4a \\ C & \text{»} & b \equiv 3a, & a \equiv 0. \end{array}$$

Om het voorkomen van 7 te beoordeelen heeft men:

$$\left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{2 + 3\varrho}{a + b\varrho}\right] \left[\frac{2 + 3\varrho^2}{a + b\varrho}\right]$$

en nu volgens de reciprociteits-wet

$$\left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a + b\varrho}{2 + 3\varrho}\right] \left[\frac{a + b\varrho}{2 + 3\varrho^2}\right].$$

Voor $a \equiv 0 \mod. 7$ volgt, daar in 't algemeen

$$\left[\frac{\alpha + \beta\varrho}{a + b\varrho}\right] \left[\frac{\alpha + \beta\varrho^2}{a + b\varrho^2}\right] = 1 \text{ is,}$$

$$\left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{\varrho}{2 + 3\varrho}\right] \left[\frac{\varrho}{2 + 3\varrho^2}\right] = \left[\frac{\varrho^2}{2 + 3\varrho}\right] = \varrho^4 = \varrho;$$

zoodat 7 tot B behoort.

Is a niet door 7 deelbaar, maar

$$b \equiv a x \mod. 7,$$

dan volgt:

$$\left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{1 + x\varrho}{2 + 3\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{2 + 3\varrho^2}\right]$$

en voor x kunnen de waarden

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6$$

voorkomen, niet $x = 3$ en $x = 5$, daar deze waarden

$$p = a^2 - ab + b^2 \equiv a^2(1 - x + x^2)$$

door 7 deelbaar zouden maken.

Men vindt nu

$$x = 0 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 1 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2$$

$$x = 2 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = 1$$

$$x = 4 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \varrho$$

$$x = 6 \qquad \left[\frac{7}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2,$$

zoodat 7 behoort tot

A wanneer $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$ mod. 7
B » $b \equiv 4a$, $a \equiv 0$
C » $b \equiv a$, $b \equiv 6a$

Op gelijke wijze, of door inductie, zal men vinden dat 11 behoort tot

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 4a$, $b \equiv 5a$ mod. 11
B » $b \equiv 3a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 9a$, $a \equiv 0$
C » $b \equiv a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 8a$, $b \equiv 10a$

13 behoort tot

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 3a$, $b \equiv 8a$ mod. 13
B » $b \equiv a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 12a$
C » $b \equiv 5a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 9a$, $a \equiv 0$

17 behoort tot mod. 17

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv a$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 9a$, $b \equiv 16a$, $a \equiv 0$
B » $b \equiv 3a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 8a$, $b \equiv 12a$, $b \equiv 13a$, $b \equiv 14a$
C » $b \equiv 4a$, $b \equiv 5a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 10a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 15a$

19 behoort tot mod. 19

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv a$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 10a$, $b \equiv 18a$, $a \equiv 0$
B » $b \equiv 5a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 13a$, $b \equiv 14a$, $b \equiv 16a$, $b \equiv 17a$
C » $b \equiv 3a$, $b \equiv 4a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 9a$, $b \equiv 15a$

23 behoort tot mod. 23

A voor $b\equiv 0$, $b\equiv 2a$, $b\equiv 5a$, $b\equiv 6a$, $b\equiv 7a$, $b\equiv 8a$, $b\equiv 11a$, $b\equiv 15a$
B » $b\equiv a$, $b\equiv 9a$, $b\equiv 13a$, $b\equiv 16a$, $b\equiv 17a$, $b\equiv 18a$, $b\equiv 19a$, $b\equiv 22a$
C » $b\equiv 3a$, $b\equiv 4a$, $b\equiv 10a$, $b\equiv 12a$, $b\equiv 14a$, $b\equiv 20a$, $b\equiv 21a$, $b\equiv 0$

---

33. De beschouwing van deze bijzondere theorema's geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen.

Voor het gemak zal ik in 't volgende de reëele priemgetallen van den vorm $3n-1$, die ook in de complexe theorie priemgetallen blijven, door Q, de priemgetallen van den vorm $3n+1$ door P aanduiden.

1. Een priemgetal Q behoort, wanneer $a\equiv 0$ mod. Q tot de klassen A, B, C al naardat $\frac{Q+1}{3}$ van den vorm $3m$, $3m+1$, $3m+2$ is.

2. Een priemgetal P behoort, wanneer $a\equiv 0$ mod. P tot de klassen A, B, C al naardat $\frac{P-1}{6}$ van den vorm $3m$, $3m+1$, $3m+2$ is.

3. In de gevallen $b\equiv 0$, $b\equiv 2a$ behoort het priemgetal P of Q altijd tot de klasse A.

4. Behoort het priemgetal tot A voor $a\equiv 0$, dan behoort het ook tot A voor $b\equiv a$ en $b\equiv -a$. Komt het priemgetal echter in de klasse B of C voor wanneer $a\equiv 0$, dan komt het voor $b\equiv a$ en $b\equiv -a$ in de klasse C of B voor.

5. In het algemeen zijn de criteria van den navolgenden vorm:

Is $a\equiv 0$, dan behoort het priemgetal tot een bepaalde klasse.

Is a niet $\equiv 0$, dan is $b\equiv ax$ en voor elke waarde van x behoort het priemgetal in een bepaalde klasse, zoodat men de waarden van x in 3 groepen α, β, γ kan onderscheiden, zoodanig dat voor

$b\equiv a\alpha$ het priemgetal tot A
$b\equiv a\beta$ » » » B
$b\equiv a\gamma$ » » » C behoort.

Hierbij komt dan nog het geval $u \equiv 0$, dat ook met een bepaalde klasse correspondeert.

Het totale aantal congruenties nu, die men op deze wijze voor elk der drie klassen vindt, is even groot en $= \dfrac{Q+1}{3}$ of $= \dfrac{P-1}{3}$.

6. Zijn x en y twee getallen die voldoen aan de congruentie:

$$x + y - xy \equiv 0$$

en behoort x tot α, dan behoort ook y tot α. Is echter $x = \beta$ of $= \gamma$, dan behoort respectievelijk y tot de γ's of β's.

Is $xy \equiv 1$ en behoort 1 tot de α's, dan is:

voor $x = \alpha'$ $\quad y = \alpha''$
voor $x = \beta'$ $\quad y = \gamma'$
voor $x = \gamma'$ $\quad y = \beta'$

Is $xy \equiv 1$ en $1 = \beta$, dan is:

voor $x = \alpha$ $\quad y = \gamma$
voor $x = \beta'$ $\quad y = \beta'$
voor $x = \gamma'$ $\quad y = \alpha'$

Is $xy \equiv 1$ en $1 = \gamma$, dan is:

voor $x = \alpha$ $\quad y = \beta$
voor $x = \beta$ $\quad y = \alpha$
voor $x = \gamma$ $\quad y = \gamma$

---

34. Wat het *bewijs* van de bovenstaande bemerkingen betreft, alleen het onder 5 gezegde vereischt eenige nieuwe beschouwingen; al het overige levert na het voorafgaande geen moeielijkheden op.

Ik ga er dan nu toe over het onder 5 opgemerkte algemeen aan te toonen. Hierbij zijn de gevallen dat het priemgetal $= Q$ of $= P$ is, afzonderlijk te behandelen, en wel zal eerst het eerste geval (verreweg het eenvoudigste) beschouwd worden.

---

35. Is dan het priemgetal Q van den vorm $3n - 1$, dus ook in de theorie der complexe getallen van den vorm $a + b\varrho$ priem, dan is dus volgens de wet van reciprociteit:

$$\left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a + b\varrho}{Q}\right]:$$

Is vooreerst $a \equiv 0$ mod. Q, dan heeft men verder:

$$\left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{b\varrho}{Q}\right] = \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = \varrho^{\frac{Q^2-1}{3}}.$$

Nu is:

$$\frac{Q+1}{3} \times (Q - 2)$$

een veelvoud van 3 en

$$\frac{Q^2 - 1}{3} - \frac{(Q + 1)(Q - 2)}{3} = \frac{Q+1}{3}$$

derhalve:

$$\text{voor } a \equiv 0 \text{ mod. } Q, \left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \varrho^{\frac{Q+1}{3}}$$

waarmede de juistheid van het in Art. 33 onder 1 gezegde aangetoond is.

Is a niet door Q deelbaar, dan is x volkomen bepaald door:

$$b \equiv a x \text{ mod. } Q$$

en:

$$\left[\frac{Q}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a(1 + x\varrho)}{Q}\right] = \left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right]$$

waaruit reeds blijkt dat de klasse waartoe Q behoort alleen van het getal x afhangt; terwijl voor x blijkbaar de getallen:

$$0, 1, 2, 3, \ldots Q-1$$

kunnen voorkomen.

Wij hebben nu nog slechts deze vraag te beantwoorden: hoeveel der Q grootheden:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right] \qquad x = 0, 1, 2, 3 \ldots Q-1$$

zijn gelijk aan 1, hoeveel gelijk aan ϱ, hoeveel gelijk aan ϱ^2? Wij beschouwen een volledig systeem niet door den modulus deelbare getallen, voor hetwelk de getallen:

$$\alpha + \beta\varrho \qquad \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} = 0, 1, 2, 3 \ldots Q-1$$

genomen kunnen worden, waarbij alleen de combinatie $\alpha = 0$, $\beta = 0$ weg te laten is. Brengen wij deze $Q^2 - 1$ getallen naar hun cubische karakter tot 3 groepen A, B, C

$$\begin{matrix} A & \alpha_0 + \beta_0\varrho \ldots \\ B & \alpha_1 + \beta_1\varrho \ldots \\ C & \alpha_2 + \beta_2\varrho \ldots \end{matrix}$$

dan bevat elk dezer groepen:

$$\frac{Q^2-1}{3} = (Q-1) \times \frac{Q+1}{3}$$

getallen, welk aantal dus een veelvoud van $Q-1$ is; en de reëele getallen die met $\beta = 0$ correspondeeren:

$$1, 2, 3 \ldots Q-1$$

behooren allen tot A, waaruit voortvloeit dat zoo $\alpha + \beta\varrho$ tot zekere klasse behoort, ook de met:

$$1(\alpha+\beta\varrho), 2(\alpha+\beta\varrho), \ldots (Q-1)(\alpha+\beta\varrho)$$

congruente getallen tot dezelfde klasse behooren. Is nu α niet gelijk nul, dan zijn:

$$\alpha \qquad 2\alpha \qquad 3\alpha \;.\,. \qquad (Q-1)\alpha$$

volgens den modulus Q in zekere volgorde congruent met

$$1, \qquad 2, \qquad 3, \;.\,. \qquad Q-1.$$

Men kan dus de getallen van een klasse, waarbij het reëele deel niet $=0$ is, in groepen van $Q-1$ getallen verdeelen, zóódat in elke groep één getal voorkomt van den vorm $1+x\varrho$.

Hieruit blijkt dus dat de aantallen getallen $1+x\varrho$ die $\left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right]=1,\ =\varrho,\ =\varrho^2$ maken, zijn:

$$\frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3} \quad \text{wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=1$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3} \quad \text{wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3} \quad \text{wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho \text{ is.}$$

en daar verder boven gevonden werd dat voor:

$$a \equiv 0 \quad \text{mod. } Q$$

Q tot de klassen A, B of C behoort al naardat $\left[\frac{\varrho}{Q}\right]=1$, $=\varrho$ of $=\varrho^2$ is, zoo is hiermede het in Art. 33 onder 5 gezegde geheel bewezen voor het geval dat het priemgetal van den vorm $3n-1$ is.

---

36. Is het priemgetal, waarvan men het voorkomen in de klassen A, B, C wil onderzoeken, van den vorm

$P = 3n + 1$ dan komt het er dus op aan de waarde van:

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right]$$

te bepalen: daar P geen priemgetal is in de complexe theorie, zoo is het in de eerste plaats noodig, vóórdat de wet van reciprociteit toegepast kan worden, P in zijne primaire priemfactoren te ontbinden

$$P = (A + B\varrho)(A + B\varrho^2)$$

en dan is:

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{a + b\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{a + b\varrho}{A + B\varrho^2}\right].$$

Dus:

voor $a \equiv 0$ mod. P

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho^{2\frac{P-1}{3}} = \varrho^{\frac{P-1}{6}}$$

voor $ax \equiv b$ mod. P

$$\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right]$$

Uit de eerste uitkomst voor $a \equiv 0$ blijkt de juistheid van de tweede bewerking in Art. 33.

Daar P van den vorm $3n + 1$ is, zoo heeft de congruentie

$$x^3 \equiv 1 \quad \text{mod. } P.$$

drie verschillende wortels, 1, f, g (waarbij $f \equiv g^2$).

De beide waarden $-f$, $-g$ kunnen nu niet $= x$ zijn in de congruentie:

$$b \equiv a x$$

want uit $b \equiv -af$ zoude volgen:

$$a^2 - ab + b^2 \equiv a^2(1 + f + f^2) \equiv 0 \text{ mod. } P$$

zoodat het priemgetal:

$$p = a^2 - ab + b^2$$

door P deelbaar zoude zijn.

De waarden die x dus kan aannemen zijn:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ P-1$$

met weglating der beide getallen $P-f$ en $P-g$. Hun aantal is dus $P-2$, en nu is te onderzoeken voor hoeveel dezer $P-2$ waarden van x de uitdrukking:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

de waarden 1, ϱ en ϱ^2 aanneemt.

Ik bemerk nog dat:

$$\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^{\frac{P-1}{3}}$$

en voor $a\equiv 0$ mod. P was:

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{2\frac{P-1}{3}}$$

Behoort dus ϱ voor den modulus $A+B\varrho$ tot de klasse A, B of C dan behoort gelijktijdig P voor den modulus $a+b\varrho$ (of wat hetzelfde is, voor den reëelen modulus p) tot de klasse A, C of B.

37. Men kan steeds, wanneer een willekeurig getal $\alpha+\beta\varrho$ gegeven is, een daarmede volgenden modulus $A+B\varrho$ congruent getal vinden, waarbij het reëele deel $=1$ is.

De verdeeling van een volledig systeem niet door den modulus deelbare getallen in drie klassen, volgens hun cubisch karakter, kan dus aldus voorgesteld worden:

modulus $A+B\varrho$

A	$\alpha=1+a\varrho$	$\alpha'=1+a'\varrho$	$\alpha''=1+a''\varrho\,..$
B	$\beta=1+b\varrho$	$\beta'=1+b'\varrho$	$\beta''=1+b''\varrho\,..$
C	$\gamma=1+c\varrho$	$\gamma'=1+c'\varrho$	$\gamma''=1+c''\varrho\,..$

en daar uit:

$$(1 + a\varrho)^{\frac{P-1}{3}} - \varrho^k \equiv (A + B\varrho)(C + D\varrho)$$

volgt:

$$(1 + a\varrho^2)^{\frac{P-1}{3}} - \varrho^{2k} = (A + B\varrho^2)(C + D\varrho^2)$$

kan dan te gelijkertijd de klassificatie voor den modulus $A + B\varrho^2$ aldus voorgesteld worden:

modulus $A + B\varrho^2$

A	$1 + a\varrho^2$	$1 + a'\varrho^2$	$1 + a''\varrho^2 \ldots$
B	$1 + c\varrho^2$	$1 + c'\varrho^2$	$1 + c''\varrho^2 \ldots$
C	$1 + b\varrho^2$	$1 + b'\varrho^2$	$1 + b''\varrho^2 \ldots$

De getallen $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' \ldots$ vormen in hun geheel alle getallen van deze groep:

$$0, 1, 2, 3 \ldots P - 1,$$

met uitzondering van het enkele getal, dat $\equiv -\varrho^2$ mod $A + B\varrho$ is, en dat volgens mod. P congruent is met een der getallen $-f$, $-g$. De gevallen nu, dat

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = 1$$

is, zijn blijkbaar deze:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = 1 \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = 1$$

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho^2$$

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho^2 \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] = \varrho.$$

Nu is $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=1$ voor $x=a, a', a''..$ en zal nu te gelijkertijd $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1$ zijn, dan moet dus $1+a\varrho$ volgens den modulus $A+B\varrho^2$ congruent zijn met een der getallen $1+a\varrho^2$, $1+a'\varrho^2..$ dus:

$$1+a\varrho \equiv 1+a'\varrho^2 \text{ mod. } (A+B\varrho^2)$$

en omgekeerd, zoo aan deze congruentie voldaan is, dan heeft men:

$$\left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho}\right]=1,\ \left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1.$$

Het aantal malen dat dit geval zich dus voordoet is gelijk aan het aantal oplossingen van bovenstaande congruentie. Op soortgelijke wijze voor de beide overige gevallen:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho,\ \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^2$$

en:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^2,\ \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho$$

redeneerende, volgt dat het geheele aantal malen dat de uitdrukking:

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

gelijk 1 is, voorgesteld wordt door de som van het aantal oplossingen der drie congruenties:

$$\begin{aligned} 1+a\varrho &\equiv 1+a'\varrho^2 \text{ mod. } A+B\varrho^2 \\ 1+b\varrho &\equiv 1+b'\varrho^2 \\ 1+c\varrho &\equiv 1+c'\varrho^2 \end{aligned}$$

Evenzoo blijkt dat het aantal malen dat bovenstaande uitdrukking $=\varrho$ en $=\varrho^2$ wordt, uitgedrukt wordt, in het eerste geval door de som van het aantal oplossingen der congruenties:

$$1 + b\varrho \equiv 1 + a\varrho^2 \text{ mod. } A + B\varrho^2$$
$$1 + c\varrho \equiv 1 + b\varrho^2$$
$$1 + a\varrho \equiv 1 + c\varrho^2$$

en in het tweede geval door de som van het aantal oplossingen der congruenties:

$$1 + c\varrho \equiv 1 + a\varrho^2 \text{ mod. } A + B\varrho^2$$
$$1 + a\varrho \equiv 1 + b\varrho^2$$
$$1 + b\varrho \equiv 1 + c\varrho^2$$

Om onmiddellijk de ontwikkelingen van Art. 25—28 te kunnen toepassen, is het iets gemakkelijker alleen congruenties voor den modulus $A + B\varrho$ te beschouwen, zoodat wij, in de voorgaande formules overal ϱ door ϱ^2 vervangende, zullen schrijven, wanneer t, u, v de aantallen malen zijn dat:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \times \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right]$$

respectievelijk $= 1$, $= \varrho$, $= \varrho^2$ is:
$t =$ som aantal oplossingen van:

$$1 + a\varrho^2 \equiv 1 + a'\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$1 + b\varrho^2 \equiv 1 + b'\varrho \qquad \text{»}$$
$$1 + c\varrho^2 \equiv 1 + c'\varrho \qquad \text{»}$$

$u =$ som aantal oplossingen van:

$$1 + b\varrho^2 \equiv 1 + a\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$1 + c\varrho^2 \equiv 1 + b\varrho \qquad \text{»}$$
$$1 + a\varrho^2 \equiv 1 + c\varrho \qquad \text{»}$$

$v =$ som aantal oplossingen van:

$$1 + c\varrho^2 \equiv 1 + a\varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$1 + a\varrho^2 \equiv 1 + b\varrho \qquad \text{»}$$
$$1 + b\varrho^2 \equiv 1 + c\varrho \qquad \text{»}$$

---

38. Hierbij dient nog het volgende opgemerkt te worden. Onder de getallen $a\, b\, c\, a'\, b'\, c' \ldots$ komt één der getallen $-f$, $-g$ niet voor. Laten we onderstellen dat $-f$ niet voorkomt zoodat $-g$ *wel* voorkomt. Dan is het toch duidelijk dat niettemin deze waarde $-g$ nergens in een der bovenstaande congruenties kan voorkomen, want bijv. uit $1 + a\,\varrho^2 \equiv 1 + a'\,\varrho$ of $a\,\varrho^2 \equiv a'\,\varrho$ zou voor $a = -g$ volgen $a' \equiv a\,\varrho \equiv -\varrho^2 \equiv -f$ (want $f \equiv \varrho^2$ en $g \equiv \varrho$ mod. $A + B\varrho$) en de waarde $a' \equiv -f$ komt niet voor. Daar nu onder de voor x te nemen waarden zoowel $-f$ als $-g$ *niet* voorkwamen, zoo is hierdoor klaar dat werkelijk de bovenstaande uitdrukkingen voor t, u en v juist zijn, wanneer de in de congruenties voorkomende getallen a, a', b, b', c, c' op alle mogelijke wijzen uit de groepen $a, a', a'' \ldots\; b, b', b'' \ldots\; c, c', c'' \ldots$ gekozen worden.

Voeren wij nu in plaats van a, b enz. liever de getallen $\alpha = 1 + a\,\varrho$, $\beta = 1 + b\,\varrho$ enz. in, dan gaat bijv.

$$a\,\varrho^2 \equiv a'\,\varrho \text{ over in } \varrho\,(\alpha - 1) \equiv \alpha' - 1$$

of

$$\alpha' - \varrho\,\alpha = 1 - \varrho$$

en, evenzoo met de overige congruenties handelende, vinden wij het volgende:

$t =$ som aantal oplossingen van:

$$\begin{aligned} \alpha' - \varrho\,\alpha &\equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\,\varrho) \\ \beta' - \varrho\,\beta &\equiv 1 - \varrho \qquad \text{»} \\ \gamma' - \varrho\,\gamma &\equiv 1 - \varrho \qquad \text{»} \end{aligned}$$

$u =$ som aantal oplossingen van:

$$\begin{aligned} \alpha - \varrho\,\beta &\equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\,\varrho) \\ \beta - \varrho\,\gamma &\equiv 1 - \varrho \qquad \text{»} \\ \gamma - \varrho\,\alpha &\equiv 1 - \varrho \qquad \text{»} \end{aligned}$$

v = som aantal oplossingen van:

$$\alpha - \varrho\gamma \equiv 1 - \varrho \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta - \varrho\alpha \equiv 1 - \varrho \quad »$$
$$\gamma - \varrho\beta \equiv 1 - \varrho \quad »$$

In het eerste lid dezer congruenties kan het teeken – overal door + vervangen worden, daar twee getallen λ en $-\lambda$ steeds tot dezelfde klasse behooren. Doen wij dit, en vermenigvuldigen wij bovendien nog alle congruenties met het geheele getal $\frac{P-1}{1-\varrho} = \frac{3n}{1-\varrho} = n(1-\varrho^2)$, dan volgt:

t = som aantal oplossingen van:

$$\alpha' + \varrho\alpha + 1 \equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta' + \varrho\beta + 1 \equiv 0 \quad »$$
$$\gamma' + \varrho\gamma + 1 \equiv 0 \quad »$$

u = som aantal oplossingen van:

$$\alpha + \varrho\beta + 1 \equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta + \varrho\gamma + 1 \equiv 0 \quad »$$
$$\gamma + \varrho\alpha + 1 \equiv 0 \quad »$$

v = som aantal oplossingen van:

$$\alpha + \varrho\gamma + 1 \equiv 0 \text{ mod. } (A + B\varrho)$$
$$\beta + \varrho\alpha + 1 \equiv 0 \quad »$$
$$\gamma + \varrho\beta + 1 \equiv 0 \quad »$$

en wel komt men tot dit besluit in elk der drie onderstellingen die men kan maken, namelijk dat $n(1-\varrho^2)$ tot de klasse A, B of C behoort. Dit is blijkbaar daaraan toe te schrijven dat de bovenstaande groepen van 3 congruenties zoodanig zijn, dat zij bij een cyclische verwisseling van α, β, γ onveranderd blijven.

Er zijn nu drie gevallen te onderscheiden.

I. ϱ behoort tot A of $\left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = 1$

In dit geval is $\varrho\,\alpha = \alpha''$, $\varrho\,\beta = \beta''$, $\varrho\,\gamma = \gamma''$ en derhalve zijn u, v, w de sommen der aantallen oplossingen van de volgende congruenties:

u	v	w
$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$
$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$
$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$

of volgens Art. 25, wanneer wij de daar voor het priemgetal $a + b\varrho$ gevonden resultaten overdragen op den modulus $A + B\varrho$ met den norm $3n + 1$

$$u = h + k + j = n - 1$$
$$v = j + l + k = n$$
$$w = k + j + l = n$$

Volgens Art. 36 is in dit geval voor $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = 1$.

II. ϱ behoort tot B of $\left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho$.

Dan zijn u, v, w de sommen der aantallen oplossingen van de volgende congruenties:

u	v	w
$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$
$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$
$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$

of wel:

$$u = n$$
$$v = n$$
$$w = n - 1$$

Volgens Art. 36 is in dit geval voor $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \varrho^2$

III. ϱ behoort tot C of $\left[\frac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho^2$

u, v, w zijn de sommen der aantallen oplossingen van:

u	v	w
$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$
$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$
$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$

of wel:

$$u = n$$

$$v = n - 1$$

$$w = n$$

Volgens Art. 36 is in dit geval voor $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \varrho$.

Hiermede is nu alles bewezen wat in Art. 33 gezegd is omtrent den algemeenen vorm der criteria, waaraan men het voorkomen van een priemgetal in de drie klassen kan onderkennen.

---

39. Wat de overige bemerkingen in Art. 33 betreft, zal het volstaan op te merken, dat het daar onder 6 voorkomende onmiddellijk volgt uit deze formules:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{Q}\right] = \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{Q}\right]$$

en:

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho}\right]\left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho^2}\right]$$

Uit de bemerking dat voor $b \equiv 2a$ het priemgetal (2, 5, 7, 11 . .) steeds tot de klasse A behoort, kan nog een gevolgtrekking opgemaakt worden, die het goed schijnt hier te plaatsen. Daar namelijk wegens:

$$4p = 4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2$$

3 *niet* tot de priemfactoren van $2a - b$ behoort, zoo volgt dat alle priemfactoren van $2a - b$ cubische resten van p zijn en derhalve is $2a - b$ zelf cubische rest van p.

---

40. Tot ditzelfde resultaat voert ook de volgende geheel verschillende beschouwing.

Zij $p = 3n + 1$ en laat z een volledig systeem incongruente, niet door den modulus $a + b\varrho$ deelbare, getallen doorloopen, dan volgt uit:

$$(z^3 + 1)^{2n} = z^{6n} + \ldots + \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} z^{3n} + \ldots + 1$$

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv -2 - \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } (a + b\varrho)$$

Maar aan den anderen kant vormen de getallen z^3 . . alle cubische resten van $a + b\varrho$, elke rest 3 maal geschreven, en van de getallen $z^3 + 1$ behooren er dus $3h$ tot de klasse A, $3j$ tot B, $3k$ tot C, derhalve is ook:

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv 3h + 3k\varrho + 3j\varrho^2 \text{ mod. } (a + b\varrho)$$

of volgens de waarden van Art. 28

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv a - b - 2 - b\varrho$$

dus:

$$-\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} \equiv a - b - b\varrho \equiv 2a - b \text{ mod. } (a + \varrho)$$

zoodat ook:

$$2a - b \equiv - \frac{2n(2n-1)..(n+1)}{1.2.3..n} \text{ mod. } p = 3n + 1$$

is, welke merkwaardige congruentie het eerst door JACOBI in CRELLE's Journ. Bd. 2 gegeven werd, en waarvan het bewijs gewoonlijk uit formules afgeleid wordt, die in de theorie der cirkelverdeeling voorkomen.

Schrijft men deze congruentie aldus:

$$(1.\ 2.\ 3\,..\,n)^2\,(2a - b) \equiv -1.\ 2.\ 3\,..\,(2n) \text{ mod. } p$$

en bedenkt dat:

$$\begin{aligned} 2n + 1 &\equiv -n \\ 2n + 2 &\equiv -(n-1) \\ 2n + 3 &\equiv -(n-2) \\ &\;\;.\;. \\ 3n &\equiv -1 \end{aligned}$$

terwijl n even en $1.\ 2.\ 3\,..\,(3n) \equiv -1$ is, zoo volgt:

$$(1,\ 2,\ 3\,..\,n)^3\,(2a - b) \equiv 1 \text{ mod. } p$$

waaruit onmiddellijk blijkt dat $2a - b$ cubische rest van p is, zooals reeds boven op geheel andere wijze werd aangetoond. Uit dit eerste bewijs bleek bovendien dat alle deelers van $2a - b$ cubische resten zijn.

Leiden, December 1881.

EENE NIEUWE CATEGORIE VAN KLIMPLANTEN.

DOOR

M. TREUB.

Darwin heeft de klimplanten in vier klassen verdeeld, naarmate zij bij het klimmen gebruik maken van windende stengeldeelen, van adventief-wortels, van gekromde doornen of stekels, of eindelijk van prikkelbare organen.

De laatste klasse kan in vier categorieën worden onderverdeeld, volgens de organen welke met prikkelbaarheid bedeeld zijn, namelijk: ranken, prikkelbare bladen, prikkelbare takken en organen welke door mij *haken* zullen worden genoemd. De vierde dezer onderverdeelingen is tot nog toe niet onderscheiden, hoewel de planten, die er toe gerekend moeten worden, in systematische werken beschreven zijn.

Ten einde wel in te zien welke verschillen er bestaan tusschen de planten, die met behulp van prikkelbare organen klimmen, moet men in het oog houden dat de prikkelbaarheid bij deze op drie verschillende wijzen zich kan openbaren, welke soms aan een zelfde orgaan bijna te gelijker tijd, hoewel meestal achtereenvolgens, zijn waar te nemen.

In de eerste plaats kunnen er door inwerking van prikkels krommingen ontstaan. In de eerste drie afdeelingen zijn deze krommingen de meest in het oog vallende, en tevens de belangrijkste, uitingen der irritabiliteit. Vervolgens moet worden genoemd de spiraalvormige samentrekking van dat gedeelte van het prikkelbare orgaan, hetwelk tusschen de basis en de plaats van vasthechting aan het steunsel gelegen is.

Deze kurketrekkerachtige oprolling, als gevolg der prikkelbaarheid, wordt bij bijna alle ranken en bij eenige weinige prikkelbare takken of bladen aangetroffen.

In de derde plaats kan de prikkelbaarheid zich uiten in een dikker worden: hetzij van het geheele orgaan, hetzij alleen van dat gedeelte, hetwelk met het steunsel in aanraking is. Het ontstaan van hechtschijven is gewoonlijk slechts een bijzondere vorm van dit verschijnsel. Dit dikker worden, onder den invloed van een prikkel, openbaart zich in de eerste drie categorieën nooit alleen; altijd wordt het voorafgegaan door eene kromming om het steunsel, en dikwijls nog door eene spiraalvormige oprolling van het vrije gedeelte van het orgaan.

In de vierde, de nieuw door mij opgestelde, categorie, welke de *haken dragende planten* omvat, is integendeel een buitengewone toeneming in de dikte de *eenige* zichtbare uiting der prikkelbaarheid

Ik noem dan *haken* die organen van klimplanten, bij welke de prikkelbaarheid uitsluitend door een dikker worden zich openbaart, hetwelk door drukking of wrijving wordt te voorschijn geroepen. Het is overbodig, in deze definitie den vorm der bedoelde organen te noemen: eensdeels omdat het woord »haak" hieromtrent reeds genoeg zegt, anderdeels omdat de haakvormige gedaante eene »conditio sine qua non" genoemd mag worden voor die organen van klimplanten, wier prikkelbaarheid zich alleen door een aanzienlijk toenemen in dikte kenbaar maakt.

De haken vormen eene groep van prikkelbare organen, welke niet minder goed gekenmerkt is dan die der ranken; gene zijn echter veel minder algemeen verspreid dan deze. De prikkelbare organen in de geslachten *Strychnos* en *Olax*, vormen in zekere mate overgangen tusschen ranken en takken.

De haken, welke ik ken, zijn veranderde bloemstelen (pedunculi), takken of doornen. Hoewel zij zeldzaam zijn, twijfel ik er toch niet aan of zij zullen bij nog andere geslachten gevonden worden dan die, voor welke ik in staat ben hunne tegenwoordigheid aan te geven.

Het is duidelijk dat mijne haken-dragende planten ver verwijderd zijn van de planten, door Darwin tot zijne klasse

der »hook-climbers" gerekend; deze toch doen in geen enkel opzicht prikkelbaarheid waarnemen. Het scheen mij overbodig toe voor gene een nieuwen term in te voeren. Wel is waar wordt nu door mij het woord »haak", dat reeds af en toe in gebruik was, in geheel nieuwen, scherp omschreven, zin gebezigd; doch dit komt mij gerechtvaardigd voor, omdat tot nog toe overal, waar bij het bespreken van klimplanten de term »haak" werd aangewend, deze slechts als onbestemd en overtollig synoniem der uitdrukkingen »omgebogen stekel" of »gekromde doorn" te beschouwen is.

In een nieuw gedeelte der *Annales du Jardin botanique de Buitenzorg*, door mij naar Europa ter perse gezonden, worden mijne onderzoekingen over haken-dragende planten uitvoerig behandeld en met naar de natuur gemaakte teekeningen toegelicht.

Het boven gezegde is dáár inleiding tot de afzonderlijke behandeling van elk der bijzondere gevallen. Bij gelegenheid dezer korte mededeeling, moet ik mij bepalen tot het noemen der onderzochte geslachten en het bijvoegen van enkele, zeer korte, toelichtingen.

Bij het geslacht *Uncaria* zijn de haken veranderde pedunculi; hoewel, in normale gevallen, hetzelfde orgaan daar niet als prikkelbare haak en als drager van een bloemhoofdje tegelijk dienst doet, zoo ben ik er toch in geslaagd, met name bij *Uncaria ovalifolia*, alle gewenschte overgangen tusschen haken en pedunculi te vinden.

In het Anonaceeën-geslacht *Artabotrys*, hebben de haken dezelfde morphologische waarde als bij *Uncaria;* de differentieering is er echter iets minder ver gegaan, daar de *Artabotrys*-haken, voor het meerendeel, bloemdragend zijn en tegelijk als prikkelbare organen dienst kunnen doen.

Geheel anders is het met de *An istrocladus*-soorten, bij welke de differentieering het sterkst is onder al de door mij onderzochte gevallen. De haak, uit den top van een tak gevormd, is daar geheel een orgaan sui generis geworden. De hakendragende sympodiën van *Ancistrocladus* behooren tot de voornaamste bijzonderheden van dit, in ieder opzicht, merkwaardig geslacht.

Bij *Luvunga eleutherandra*, tot de familie der Aurantiaceeën behoorend, zijn de haken niets anders dan gekromde doornen. Betrekkelijk zelden slagen zij er in een steunsel te vatten; geschiedt dit echter, dan veroorzaken zij zeer hechte verbindingen, daar zij uitermate in dikte toenemen.

Dit laatste kan evenzeer gezegd worden van de haken eener door mij bestudeerde *Olax*-soort, welke, met vervormde takken gelijk te stellen, eenigszins aan ranken doen denken. Misschien geldt hetzelfde voor de haken der *Hugonia's* (fam. Linaceae); ik ken dit geslacht echter alleen uit beschrijvingen en afbeeldingen, want levende of gedroogde exemplaren van eene zijner soorten had ik niet ter mijner beschikking.

De prikkelbare organen bij het geslacht *Strychnos* eindelijk, zijn ranken, welke veel overeenkomst met haken hebben.

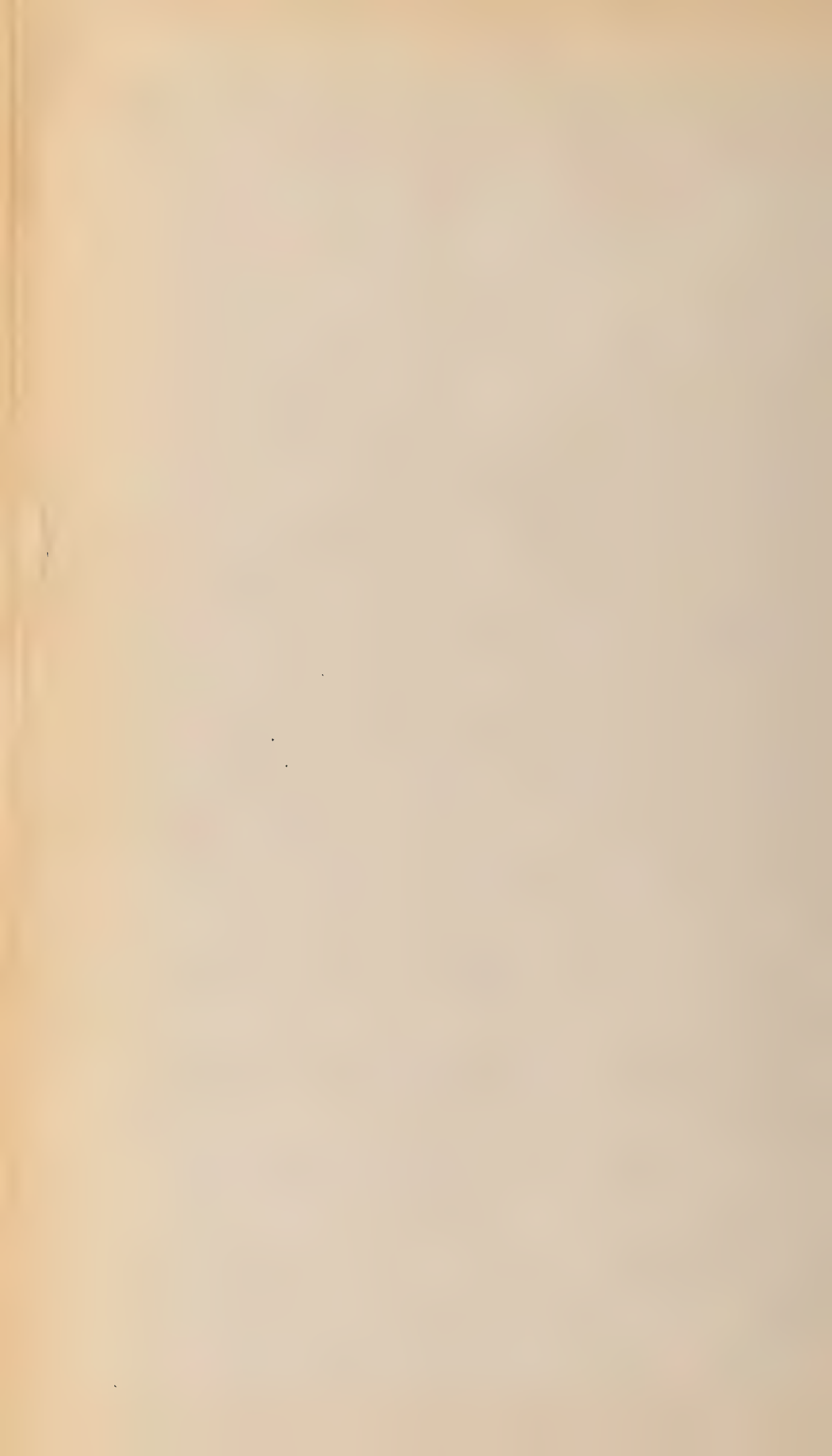
Het dikker worden van haken, na het omvatten van eenig steunsel, is gewoonlijk veel aanzienlijker dan dat, hetwelk bij andere prikkelbare organen van klimplanten is waargenomen. Een enkel, zeer sprekend, voorbeeld kan er een denkbeeld van geven. Van twee op elkander volgende haken der bovengenoemde *Luvunga*-soort, was de eene *wel*, de andere *niet* met een steunsel in verbinding; van de ellipsvormige horizontale doorsnede bij den laatsten, waren de lange en korte as $3\frac{1}{2}$ en 2 mm., bij den eersten $17\frac{1}{2}$ en $16\frac{1}{2}$ mm. (in beide gevallen was de snede terzelfder hoogte genomen). Uit deze cijfers valt een oordeel over de buitengewone toeneming in dikte op te maken.

Zoowel bij *Luvunga* als bij *Uncaria* heb ik opgemerkt, dat soms de top van den zich verdikkenden haak *in* het steunsel dringt.

In het algemeen geven haken, veel meer dan ranken, tot blijvende verbindingen en vasthechtingen aanleiding; in hooge mate nam ik dit waar bij *Olax* en *Luvunga*.

Dat haken-dragende gewassen tot de beste klimmers kunnen behooren, hiervan leveren verscheidene *Uncaria's*, *Ancistrocladus Vahlii*, *Ancistrocladus pinangianus* en *Artabotrys suaveolens*, het bewijs

Buitenzorg, November 1881.



OVERZICHT

VAN DE

BOEKWERKEN

DOOR DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

ONTVANGEN EN AANGEKOCHT

1881—1882.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND APRIL 1881.

Catalogus der Bibliotheek van het Koninklijk Zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra" te Amsterdam. 1881. roy. 8⁰.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Amsterdam 1881. Deel VII. St. 2. 8⁰.

Jaarboek van de Koninklijke Nederlandsche Zeemagt, 1879—1880; uitgegeven door het Departement van Marine. 's Gravenhage 1881. 8⁰.

Nieuwe Bijdragen voor rechtsgeleerdheid en wetgeving. Amsterdam 1880. Nieuwe Reeks. Deel VI. Rechtsgeleerd Bijblad. Nieuwe Reeks. Deel VI. Afd. A—C. 8⁰.

C. Bake. Beschouwingen over den statenbond en den

bondsstaat. Amsterdam 1881. (Academisch Proefschrift) 8°.

Midden-Sumatra. Reizen en onderzoekingen der Sumatra-expeditie, uitgerust door het Aardrijkskundig Genootschap, 1877—1879. Leiden 1881. Deel I-IV (2de Aflevering) roy. 8°.

Bijdragen tot de geneeskundige plaatsbeschrijving van Nederland. 5de Stuk. Natuurkundige plaatsbeschrijving van de provincie Limburg. 's Gravenhage 1881. 8°.

Mededeelingen betreffende het zeewezen. 's Gravenhage 1881. Deel XXII. Afl. 5. 8°.

J. A. Fruin. De Nederlandsche Wetboeken, enz. Utrecht en 's Gravenhage 1881. Afl. 15. roy. 8°.

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1880. Utrecht 1881. Jaarg. 32. Deel I. 4°. Oblong.

A. D. van Riemsdijk. Mededeelingen uit de laboratoria van 's Rijks Munt. Utrecht 1881. N°. 4. 8°.

Mededeelingen en berichten der Geldersche Maatschappij van landbouw over 1881. Zutphen 1881. 8°.

J. Dirks. Penningkundig Repertorium. N°. XXII—XXIII. 8°.

Publications de la Société historique et archéologique dans le duché de Limbourg. Ruremonde 1880. Tome XVII. 8°.

Beantwoording door de Staatscommissie, benoemd bij Koninklijk besluit van 4 December 1877, N°. 1, tot het instellen van een onderzoek omtrent de verbetering van den waterweg langs Rotterdam naar zee, van eenige door den Minister van Waterstaat, Han-

del en Nijverheid, bij schrijven van 23 Augustus 1880, N°. 15, gestelde vragen. 4°.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Waal, enz. gedurende de maand October 1880. 's Gravenhage 1880. fol.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Februarij 1881. 's Gravenhage 1881. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1880. Deel XLI. St. 2. roy. 8°.

Inhoud:

E. Netscher. Padang in het laatst der XVIIIe eeuw.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1880. Deel XXVI. Afl. 2—4. 8°.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1880. Deel XVIII. N°. 1—3. 8°.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1880. Deel XXV. Afl. 11—12. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der

geneeskundige wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1881. Nieuwe Serie. Deel X. Afl. 2. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome I. N°. 2. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N°. 3. 8°.

Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1881. Tome X. 8°.

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Lubbeek par M. le baron O. VAN ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1881. 8°.

F. DE POTTER en J. BROECKAERT. Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1881. Deel XXVIII. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881. Tome XCII. N°. 13—16. 4°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1880. Tome XXVII. Revue Bibliographique D-E. 8°.

Mémoires de la Société Académique Indo-Chinoise. Paris 1879. Tome II. 4°.

Inhoud:

J. DUPUIS. L'ouverture du fleuve rouge au commerce et les évènements du Tong Kin 1872—1873.

Annales de l'extrême orient. Bulletin de la Société Académique Indo-Chinoise. Paris 1881. N°. 33. 8°.

V. Duruy. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'a l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr. 162—164. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 236—239. 4°.

Bulletin de l'Académie de medécine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N°. 13—16. 8°.

Recueil de mémoires de médecine, de chirurgie et de pharmacie militaires, publié par ordre du Ministre de la guerre. Paris 1880. 3e Série. Tome XXXVI. 8°.

H. Levittoux. Philosophie de la nature. Paris 1874. 8°.

Exposition universelle de Paris 1878. La Galerie de l'Égypte ancienne à l'exposition rétrospective du Trocadéro. Description sommaire par A. Mariette-Bey. Paris 1878. 8°.

Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. 1880. 8e Série. Tome II. 2e Sem. 8°.

Inhoud:

JOLY. Note sur le prosopistema.
JOULIN. L'immunité charbonneuse acquise à la suite d'inoculations préventives.
ESQUIÉ. Note sur une cuve baptismale en plomb.
PRADEL. Note sur l'origine de la réforme à Verfeil.
BARRY. Note sur une copie manuscrite d'un livre de raison, de noble Gabriël Dupuy, seigneur de la Roquette.

Bulletin de la Société Académique de Brest. 1880. 2e Série. Tome VI. 2e fasc. 8⁰.

Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres de Caen. 1880. 8⁰.

Inhoud:

DITTE. Etudes relatives à la dissociation des sels métalliques sous l'influence de l'eau, et à certaines réactions inverses qui s'accomplissent en présence de ce liquide.
A. DE SAINT-GERMAIN. Sur la série de Laplace.
MORIÈRE. Note sur l'opercule du neritopsis.
A. JOLY. Mademoiselle Navarre, Comtesse de Mirabeau, d'après les documents inédits.
J. DENIS. Une tradition sur le IVe livre des Géorgiques.
J. CAUVET. L'empereur Justinien et son oeuvre législative.
A. GASTÉ. Notes critiques sur un manuscrit de Juvénal ayant appartenu au Cardinal de Richelieu.
G. DUPONT. Louis IX et la Basse-Normandie de 1461 à 1464.
CAILLEMER. Etudes sur les antiquités juridiques d'Athènes. La naturalisation à Athènes.
E. CHAUVET. La famille chez les bêtes.
J. TESSIER. Relation de Pierre Millet, soldat de l'armée d'Égypte.
E. DE ROBILLARD DE BEAUREPAIRE. La commission militaire et révolutionnaire de Granville.

Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres de Caen. Séance publique du 4 Décembre 1879. Caen 1880. 8⁰.

Mémoires de la Société d'émulation de Cambrai. 1880. Tome XXXVI. 8⁰.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Savoie. Chambéry 1880. 3e Série. Tome VIII. 8°.

Inhoud:

G. Vallier. Quelques mots sur les découvertes archéologiques et numismatiques de Francin.
F. Rabut. Le P. Monod et le Cardinal de Richelieu. Episode de l'histoire de France et de Savoie du XVIIe Siècle.
P. Mayeul Lamey. Mémoire sur l'égalité de rotation et de révolution des satellites du système solaire.
J. Carret. Notice historique sur les eaux de la Boisse.
G. Claretta. La mission du seigneur de Barres, envoyé extraordinaire de Francois 1er, Roi de France, à la cour de Charles III, duc de Savoie.
De Loche. Notice sur la fabrique de faïence de la Forest.
A. Dufour et F. Rabut. Notes diplomatiques inédites du P. Monod.

Bulletin historique de la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1880. Nouvelle Série. Livr. 115—116. 8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. Valenciennes 1881. Tome XXXIV. N°. 1—3. 8°.

GROOT BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLI. N°. 5. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 4. 8°.

OOSTENRIJK.

Verhandlungen der k. k. Zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. 1881. Band XXX. 8°.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark. Graz 1881. Jahrg. 1880. 8°.

HONGARIJE.

Magyarországi régészeti emlékek. Monumenta Hungariae archaeologica. Budapest 1880. Kötet IV.Resz. 1—2. 8⁰.

Archaeologiai közlemények. a hazai muemlékek ismeretének elömozditására. Budapest 1880. Kötet XIII. Füzet 2. 4⁰.

A magyar tudományos Akadémia 1880. évi május 23-án tartott XL dik közülésének tárgyai. Budepest 1880. Kötet 16. Darab 6. 4⁰.

Értekezések a mathematikai tudományok Köréböl. Buda- 1879—1880. Kötet VII. Szám 6—22. 8⁰.

Értekezések a történelmi tudományok Köréböl. Budapest 1880. Kötet VIII. Szam 10. Kötet IX. Szam 1—3. 8⁰.

Értekezések a tarsadalmi tudományok Köréböl. Budapest 1879—1880. Kötet V. Szám 9. Kötet VI. Szám 1—8. 8⁰.

Értekezések a nyelv-es szép tudományok Köréböl. Budapest 1880. Kötet VIII. Szám 5—10. Kötet IX. Szám 1—2. 8⁰.

Értekezések a természet tudományok Köreböl. Budapest 1879—1880. Kötet IX. Szám 20—25. Kötet X. Szam 1—18. 8⁰.

A magyar tudományos Akademia ertesitöje. Budapest 1879—1880. Evfolyam 13. Szam 7—8. Evfolyam 14. Szam 1—8. 8⁰.

Nyelvtudományi közlemények. Budapest 1880. Kötet 15. Füzet 3. Kötet 16. Füzet 1. 8⁰.

Archaeologiai értesitö. A magyar tud. Akademia archae-

ologiai bizottsaganak közlönye. Budapest 1879. Kötet XIII. 8⁰.

Regi magyar költök tára. Budapest 1880. Kötet II. 8⁰.

A. Szilady. Temesvári Pelbart élete és munkái. Budapest 1880. 8⁰.

G. Wenzel. Magyarország bányászatának kritikai története. Budapest 1880. 8⁰.

K. Thaly. Ocskay Lászlo II. Rákóczi ferencz fejedelem dandárnoka és a felsö-magyarországi hadjáratok 1703—1710. Budapest 1880. 8⁰.

J. Abel. Adalékok a humanismus történeté hez magyarországon. Budapest 1880. 8⁰.

F. Pesty. Az eltünt régi vármegyek. Budapest 1880. Kötet I—II. 8⁰.

Monumenta comitialia regni transylvaniae. Budapest 1880. Kötet VI. 8⁰.

Monumenta hungariae historica. Budapest 1880. Kötet XXX. 8⁰.

K. Szász. Gróf Széchenyi István és az akadémia megalapitása. Budapest 1880. 8⁰.

P. Hunfalvy. Literarische Berichte aus Ungarn. Budapest 1880. Band IV. Heft 1—4. 8⁰.

———— Ungarische Revue. Leipsig & Wien 1881. Heft 1—2. 8⁰.

K. Torma. Repertorium ad literaturam daciae archaeologicam et epigraphicam. Budapest 1880. 8⁰.

K. Géza. Codex cumanicus. Bibliothecae ad templum divi marci venetiarum. Budapestini 1880. roy. 8⁰.

Magyar tudom, Akadémiai Almanach. Budapest 1881. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1881. December 1880. 8⁰.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1881. Jahrg. 1880. Heft 11—12. Oblong.

Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Kiel 1881. Band IV. Heft 1. 8⁰.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. 1880. Jahrg. 1879 und 1880. 8⁰.

V. Carus. Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. Jahrg. 4. N⁰. 79—80. 8⁰.

H. von Schlagintweit-Sakünlünski. Die Regenverhältnisse in Indien, nebst dem Indischen Archipel und in Hochasiën. Theil I. Die Beobachtungen im nördlichen Indien, von Ost gegen West. München 1881. 4⁰. (Separat-Abdrück aus den Abhandlungen der k. b. Akademie der Wissensch.).

26ster Jahres-Bericht des Germanischen Nationalmuseums. Nürnberg 1880. 4⁰.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Nürnberg 1880 Neue Folge. Jahrg. 27. N⁰. 1—12. 4⁰.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Transunti. Roma 1881. Serie 3. Vol. V. Fasc. 8—9. 4⁰.

Bollettino della Societa Adriatica di scienze naturali. Trieste 1881. Vol. VI. 8⁰.

NOORWEGEN EN ZWEDEN.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. (Zoology-Chemistry). Christiania 1880. gr. 4⁰.

RUSLAND.

Bulletin de l'Académie impériale des sciences. St. Pétersbourg 1881. Tome XXVII. N⁰. 2. gr. 4⁰.

Acta horti petropolitani. St. Petersburg 1881. Tomus VII. Fasc. 1. 8⁰.

Travaux de la 3e session du Congrès international des orientalistes à St. Pétersbourg 1876. St. Pétersbourg 1879—1880. Tome I. roy. 8⁰.

Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1881. Band V. Heft 3. 8⁰.

Archiv für die Naturkunde Liv-, Ehst- und Kurlands, herausgegeben von der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1880. Band IX. Lief. 1—2. 8⁰.

AZIË.

J. F. Eykman, Ueber den giftigen Bestandtheil, das aetherische und das fette Oel von Illicium religiosum v. Sieb. Yokohama 1881. gr. 4⁰.
(Separat-Abdruck aus den Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ost-Asiens).

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. N°. 1—8. 1881. N°. 2. 8°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. Vol. XLIX. Part. I. N°. 1—2. Part. 2. N°. 1—2. 8°.

NOORD-AMERIKA.

Index-Catalogue of the Library of the Surgeon-General's-Office, U. S. Army. Washington 1880. Vol. I. (A.-Berlinski). 4°.

Report of the superintendent of the United States Coast Survey showing the progress of the work for the fiscal year ending with June 1877. Washington 1880. 4°.

Bulletin of the U. S. geological and geographical survey of the territories. Washington 1881. Vol VI. N°. 1. 8°.

C. Spinzig. Variola, its causes, nature and prophylaxis and the danger of vaccination. St. Louis 1878. 8°.

C. Spinzig. Failure of vaccination. Variolous infection an illusion, vaccination an injury to health and a danger to life, and as a protection against small-pox, a vanity. St. Louis 1881. 8°.

Boletin del Ministerio de Fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tome VI. N°. 18—32. fol.

ZUID-AMERIKA.

A. de Castro Lopes. Memoria sobre a possibilidade e conveniencia da suppressão dos annos bissextos escripta em Portuguez, Latim e Francez. (Suppression des années bissextiles) Rio de Janeiro 1881. 8°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1881. Tome XI. Entr 2—3. 8⁰.

AUSTRALIË.

Journal and proceedings of the Royal Society of N. S. W. Sydney 1880. Vol. XIII. 8⁰.

Annual report of the department of mines, N. S. W. for the years 1878 and 1879. Sydney 1879—1880. With maps. 4⁰.

Reports of the council of education upon the condition of the public schools and of the certified denominational schools, for the year 1879. Sydney 1880. 8⁰.

A. Liversidge. Report upon certain museums for technology, science, and art, also upon scientific, professional, and technical instruction, and systems of evening classes in Great Britain and on the continent of Europe. Sydney 1880. fol.

AANGEKOCHT.

Bibliotheca Belgica. Livr. 11—12. 8⁰.

Journal des savants. Paris Mars 1881. 4⁰.

Annales de chimie et de physique. Paris 1881. 5e Série. Tome XXII. Mars. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VII. N⁰. 40. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XI. N°. 68. 8°.

G. Wiedemann. Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Neue Folge. Band XII. Heft 4. Band XIII. Heft 1. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1881. St. 12—17. Nachrichten. N°. 6—7. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band CCXL. Heft 1. 8°.

Allgemeine deutsche Biographie. Leipzig 1880. Band XII. 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome IX. N°. 27. 8°.

Bibliothèque Universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Gèneve 1881. 3e Période. Tome V. N°. 4. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MEI 1881.

Congrès périodique international des sciences médicales, 6me Session, Amsterdam, Septembre 1879. Compte-rendu publié avec le concours des Secrétaires des Sections par M. M. Guye, de Perrot, Stokvis et Zeeman. Amsterdam 1881. Tome II. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1881. 4e. Reeks. Deel V. N°. 4. 8°.

Catalogus der Bibliotheek van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde. Leiden 1877. 3e gedeelte. (Nederlandsch tooneel) roy. 8°.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1881. 3e Afl. 1e en 2e gedeelte. 4e Afl. 1e gedeelte. 4°.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche Entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1881. Deel XXIV. Afl. 2. 8°.

Werken van het Historisch Genootschap te Utrecht. Utrecht 1880—1881. N°. 30, 32. 8°.

Inhoud:

N°. 30. H. G. HAMAKER. De rekeningen der Grafelijkheid van Zeeland onder het Henegouwsche huis. Deel II.

N°. 32. Journal van Constantijn Huygens, den zoon, gedurende de veldtochten der jaren 1673, 1675, 1676, 1677 en 1678.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap te Utrecht. Deel IV. 8°.

Anna Roemers Visscher. Gedichten uitgegeven door N. BEETS. Utrecht 1881. 2 Dl. roy. 8°.

C. P. J. VAN DEN BERG. De theorie van het arbeidsloon. Utrecht 1879. 8°.

Stedelijk Museum te Alkmaar. Verslag over het jaar 1880. Alkmaar 1881. 8°.

C. UBAGHS. Notice sur J. A. H. BOSQUET. 8°.

Penningkundig Repertorium. Mededeelingen door Mr. J. Dirks. N°. XXIV. 8°.

G. C. J. Vosmaer. Voorloopig berigt omtrent het onderzoek, aan de Nederlandsche werktafel in het Zoölogisch Station te Napels verrigt, 20 November 1880 tot 20 Februarij 1881. (den Haag 1881). 8°.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Maart 1881. 's Gravenhage 1881. Nieuwe Serie. fol.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N°. 4. 8°.

Jaarboek van het Willems-Fonds voor 1881. Gent 1881. (Bijvoegsel). 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881. Tome XCII. N°. 17—20. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N°. 17—20. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1880. Tome IX. N°. 2. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1881. Tome XXVIII. Comptes rendus 1. 8°.

Bulletin de la Société zoölogique de France. Paris 1880. Année 1880. 5e et 6e partie. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 240—244. 4°.

V. Duruy. Histoire des romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr. 165—169. roy. 8°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1878. 1e Année. N°. 1—20. 1881. 4e. Année. N°. 4. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Transactions of the Zoological Society of London. 1881. Vol XI. Part. 3—4. 4°.

Inhoud:

Part. 3. F. Moore. On the genera and species of the lepidopterous subfamilly Ophiderinae inhabiting the indian region.
W. K. Parker. On the structure of the skull in the chameleons.
Part. 4. W. A. Forbes. On the male generative organs of the Sumatran Rhinoceros (Ceratorhinus sumatrensis).
M. Watson. On the anatomy of the female organs of the Proboscidea.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London for the year 1880. London 1881. Part. IV. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 5. 8°.

The Journal of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1881. New Series. Vol. XIII. Part. 2. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol XLI. N°. 6. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1881. Series 2. Vol. I. Part. 2. 8°.

Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1880. Vol X. N⁰. 2. 8⁰.

C. P. J. VAN DEN BERG. The theory of wages. London 1880. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1880. Band XXIII. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Januar 1881. 8⁰.

R. VIRCHOW. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1881. Band LXXXIII. Heft 2—3. Band LXXXIV. Heft 1. 8⁰.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der Medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1881. Band XIV. Supplement-Heft 1. Band XV. Heft 1. 8⁰.

R. VON IHERING. Gesammelte Aufsätze aus den Jahrbüchern für die Dogmatik des heutigen römischen und deutschen Privatrechts. Jena 1881. Band I. (Abhandlungen aus den vier ersten Bänden der Jahrbücher). 8⁰.

Abhandlungen der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1880. Band XXVI. 4⁰.

Inhoud :

M. STERN. Beiträge zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.

A. ENNEPER. Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungsliniën.

F. WÜSTENFELD. Das Heerwesen der Muhamedaner, nach dem Arabischen.

TH. BENFEY. Die Quantitätsverschiedenheiten in den Samhitâ- und Pada-Texten der Veden.

F. WÜSTENFELD. Die Arabische Uebersetsung der Taktik des Aelianus.

————— Geschichte der Fatimiden-Chalifen.

B. LAGARDE. Erklärung hebräischer Wörter.

————— Ueber den Hebräer Ephraims von Edessa.

C. KLEIN. Zur Erinnerung an Karl von Seebach.

Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen 1880. 8°.

E. PRIJM und A. SOCIN. Der Neu-Aramaeische Dialekt des Tûr' Abdîn. Göttingen 1881. 2 Th. 8°.

R. HOPPE. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1881. Theil LXVI. Heft 2. 8°.

V. CARUS. Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. Jahrg. IV. N°. 81—83. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Gotha 1881. Band XXVII. N°. 2—4. Ergänzungsheft N°. 64. 4°.

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a. M. 1880. Band XII. Heft 1—2. 4°.

Inhoud:

A. TURNER. Die Geologie der primitiven Formationen.

J. NOTTHAFT. Ueber die Gesichtswahrnehmungen vermittelst des Facettenaugens.

C. v. LEJTÉNYI. Ueber den Bau des Gastrodiscus polymastos Leuckart.

A. HANSEN. Vergleichende Untersuchungen über Adventivbildungen bei den Pflanzen.

H. TH. GEYLER. Ueber Culturversuche mit dem Japanischen Lackbaum (Rhus vernicifera D. C.) im botanischen Garten zu Frankfurt a. M.

J. L. SEOANE. Neue Boiden-Gattung und Art von den Phillippinen.

Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft. 1879—1880. Frankfurt a./M. 1880. 8⁰.

Der Zoologische Garten. Frankfurt a./M. 1880. Jahrg. 21. N⁰. 7—12. 8⁰.

Verhandlungen der physikalisch medicinischen Gesellschaft in Würzburg. 1881. Neue Folge. Band XV. Heft 3—4. 8⁰.

Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1881. Band XV. Abth. 3. 4⁰.

Inhoud:

E. Trumpp. Der Kampf Adams (gegen die Versuchungen des Satans), oder Das christliche Adambuch des Morgenlandes. Aethiopischer Text, verglichen mit dem arabischen Originaltext.

K. Maurer. Ueber die Wasserweihe des germanischen Heidenthumes.

Abhandlungen der historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Band XV. Abth. 3. 8⁰.

Inhoud:

F. Stieve. Der Kalenderstreit des sechzehnten Jahrhunderts in Deutschland.

L. Rockinger. Ueber ältere Arbeiten der baierischen und pfälzischen Geschichte im geheimen Haus- und Staatsarchive.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1881. Heft 1—2. 8⁰.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Heft 4—6. 1881. Heft 1. 8⁰.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1880. München 1881. 8⁰.

H. von Schlagintweit-Sakünlünski. Die Regenverhältnisse in Indien, nebst dem Indischen Archipel und in Hochasien. Theil II. Die Beobachtungen im centralen und im südlichen Indien. München 1881. 4⁰. (Separat-Abdrück aus den Abhandlungen der k. b. Akademie der Wissenschaften).

Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Stuttgart 1880. Jahrg. 1880. Band I und II. 2te Hälfte nebst Supplement Band. roy. 8⁰.

ZWITSERLAND.

F. W. C. Trafford. Souvenir de l'amphiorama ou la vue du monde pendant son passage dans une cométe. Zürich 1881. (Edition corrigée). 8⁰.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. (Transunti) Roma 1881. Série 3. Vol. V. Fasc. 10—11. 4⁰.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. 1880—1881. Vol. XVI. Disp. 1—3. 8⁰.

Atti dell' Accademia delle scienze fisische e matematiche. Napoli 1866—1869. Vol. III—IV. 4⁰.

Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Napoli 1867—1869. Anno VI. Fasc. 7—12. Anno VII. Fasc. 1—12. Anno VIII. Fasc. 1—12. 4⁰.

Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel. Leipzig 1881. Band II. Heft 4. 8⁰.

3ter Nachtrag zum Bibliothekskatalog der Zoologischen Station zu Neapel. Leipzig 1881. 8⁰.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di medicina e chirurgia. Firenze 1880. roy. 8⁰.

Inhoud:

F. Pacini. Del processo morboso del colera asiatico, del suo stadio di morte apparente e della legge matematica da cui e regolato.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. Firenze 1880. Vol. II. Disp. 6. roy. 8⁰.

Inhoud:

C. N. Caix. Le origini della lingua poetica italiana. Principii di grammatica storica italiana.

E. F. Trois. Contribuzione allo studio del sistema linfatico dei teleostei. (Estr. degli Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti). 8⁰.

Atti della Società Toscana di scienze naturali. Processo verbale del 13 Marzo 1881. 8⁰.

GRIEKENLAND.

Θ. Ν. Φλογαΐτου ἐγχειρίδιον συνταγματίκου δικαίου, Ἀθήνῃσι. 1879. 8⁰.

DENEMARKEN.

Aarböger for nordisk oldkyndighed og historie udgivne af det kong. Nordiske Oldskrift Selskab. Kjöbenhavn 1880. Hefte 3—4. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Astronomiskā iakttagelser och undersökningar anstälda

på Stockholms Observatorium. Stockholm 1880. Bandet 1. Häftet 2. kl. 4°.

RUSLAND.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. 1880. Jahrg. 23. 8°.

AZIË.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Yokohama 1881. Heft 23. 4°.

Report on the meteorology of India in 1878 by H. F. Blanford. Calcutta 1880. 4th. Year. Fol.

Meteorological observations recorded at six stations in India (April 1879 till March 1880) Calcutta 1881. Fol.

Report on the administration of the meteorological department of the government of India in 1879—80. Fol.

NOORD-AMERIKA.

Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Cambridge 1881. Vol. VIII. pp. 95—230. 8°.

The American journal of otology. New-York 1881. Vol. III. N°. 2. 8°.

Jahres-Bericht des Naturhistorischen Vereins von Wisconsin für das Jahr 1880—81. Milwaukee 1881. 8°.

Proceedings at the annual meeting of the Natural history Society of Montreal for the year ending May, 1869, and May 1878. Montreal 1869 and 1879. 8°.

29th Annual report of the Natural History Society of Montreal. 1857. 8⁰.

Constitution and by-laws of the Natural History Society of Montreal 1859. 8⁰.

List of premiums offered bij the Montreal horticultural Society and Fruit-growers' association of the Province of Quebec, amounting to $ 16,000.00, open to the province of Quebec. Exhibition to be held in Montreal, in September 1881, Montreal 1881. 8⁰.

The Canadian antiquarian and numismatic journal. Montreal 1875. Vol. IV. N⁰. 1—2. 8⁰.

Boletin del Ministerio de Fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo VI. N⁰. 35—49. Fol.

Revista mensual climatologica. Mexico 1881. Tomo I. N⁰. 3. 4⁰.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1881. Tomo XI. Entr. 4. 8⁰.

AANGEKOCHT.

Journal des Savants. Paris Mars—Avril 1881. 4⁰.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1880. 2e Série. Tome IV. Septembre—Novembre. 8⁰.

ERRATA.

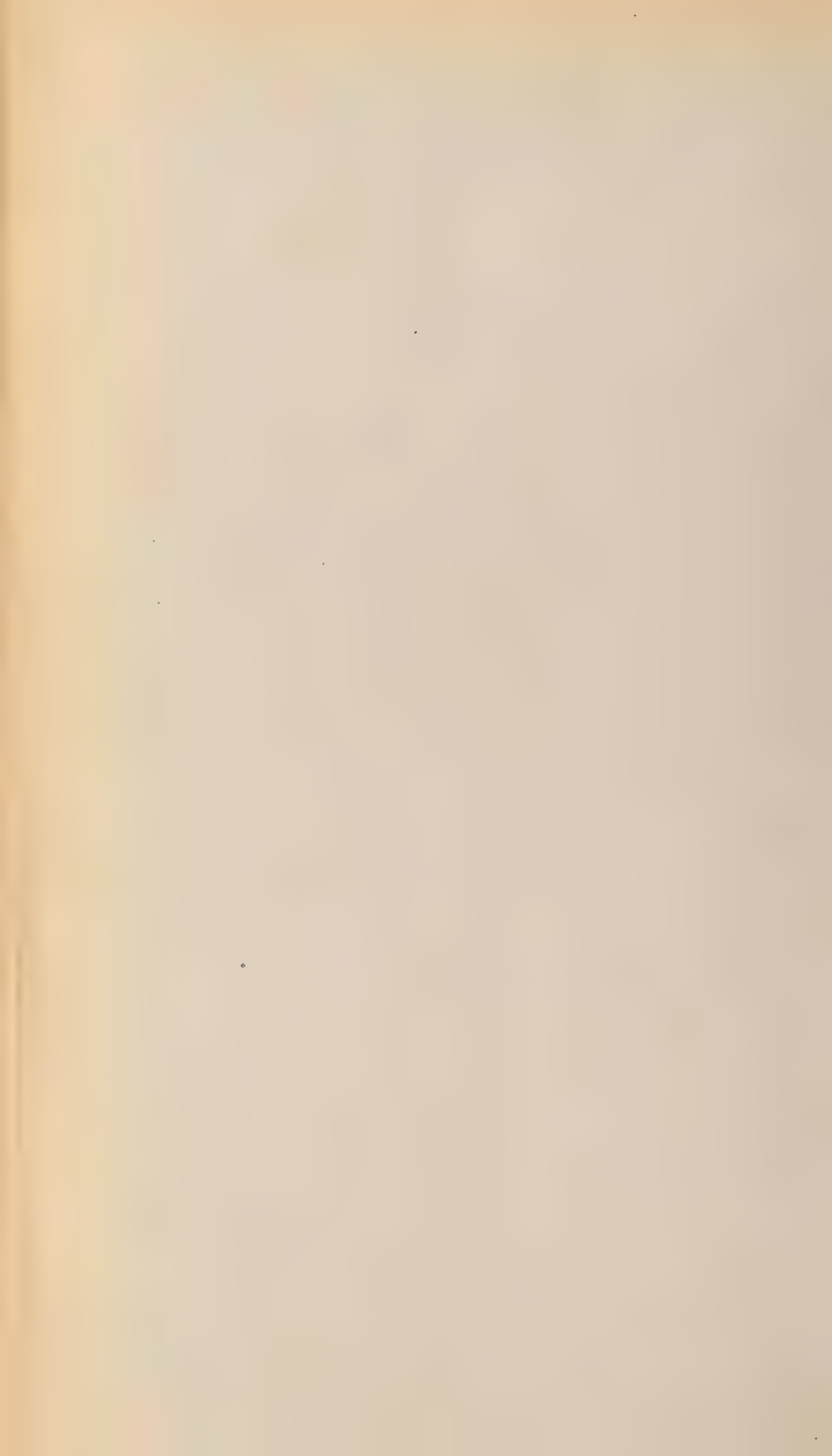
Versl. en Meded. Kon. Akad. van Wet., Afd. Nat., 2e Reeks,
Deel XVI, 1881.

(v. d. Berg, *Bernoulliaansche coëfficiënten*, enz.).

Pag. 88, de drie laatste regels te lezen als volgt:

Schrijft men nu neder dat het product van het tweede of ook van het derde lid van (2′) met het laatste lid van $4\sqrt{x}$ maal (3′) gelijk is aan het negatief genomen laatste lid van (1′), dan kan men daarbij, als r

Pag. 134,	reg. 5	v. o.	*staat:*	schrijven, terwijl;	
			lees:	schrijven; terwijl	
» 145,	» 2	v. b.	*staat:*	(16),	*lees:* (17).
» 172,	» 2	v. o.	*staat:*	$n-l-1$,	*lees:* $n-1$.
» »	» »	»	»	$n-l-2$,	» $n-2$.
» »	» 1	»	»	$n-l-3$,	» $n-3$.
» »	» »	»	»	$n-l-r$,	» $n-r$.



Annales de chimie et de physique. Paris 1881. 5e Série. Tome XXII. Avril. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XI. N⁰. 69. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VII. N⁰. 41. 8⁰.

The Zoological Record for 1879. London 1881. Vol. XVI. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1881. St. 18—21. Nachrichten. N⁰. 8. 8⁰.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Band. V. St. 4. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band CCXL. Heft 2—3. 8⁰.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome X. N⁰. 28. 8⁰.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1881. N⁰. 3. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JUNI 1881.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1880. N⁰. 11—12. 8⁰.

Archives du Musée Teyler. Haarlem 1881. Série 2. Partie 1. roy. 8⁰.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles publiées par la Société hollandaise des sciences. Harlem 1881. Tome XVI. Livr. 1—2. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1881. 4e. Reeks. Deel V. N°. 5. 8°.

Verslag van den toestand der Stads-Bibliotheek te Haarlem, over het jaar 1880. 8°.

Niederländisches Archiv für Zoologie. Haarlem-Leiden 1874—1881. Band II. Heft 2—3. Band III. Heft 1—3. Band IV. Heft 2—3. Band V. Heft 1—2. Supplementband I. 1ste Lief. 8°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het Koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1881. 4e Reeks. Deel V. St. 1. 8°.

J. A. Fruin. De Nederlandsche wetboeken. Utrecht-'s Gravenhage 1881. Afl. 16. 8°.

J. K. W. Quarles van Ufford. In zake Dr. Matthes. 8°. (Overgedrukt uit de Indische Gids).

David J. A. Samot. Nog eens de pensioenszaak. 8°. (Overgedrukt uit de Juni-Afl. van de Economist 1881).

Penningkundig Repertorium. Mededeelingen door Mr. J. Dirks. N°. XXV. 8°.

Verslag over het voorgevallene tijdens het hooge opperwater en den ijsgang op de Nederlandsche rivieren in den winter van 1879 op 1880. 's Gravenhage 1881. 8°.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1881. Deel XXVI. Afl. 1—2. 8°.

BELGIË.

Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1880. Tome XLIII. 1e Partie. 4°.

Inhoud:

A. BRIART et F. J. CORNET. Description des fossiles du calcaire grossier de Mons.
E. QUETELET. Recherches sur les mouvements de l'aiquille aimantée à Bruxelles.
E. CATALAN. Remarques sur la théorie des moindres carrés.
G. VAN DER MENSBRUGGHE. Études sur les variations d'énergie potentielle des surfaces liquides.
P. J. VAN BENEDEN. Mémoire sur les orques observés dans les mers d'Europe.

Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1879—1880. Tome XXXIX. Partie 2. Tome XLII—XLIII. 4°.

Inhoud, Tome XXXIX, Part. 2:

A. SCHOY. Histoire de l'influence italienne sur l'architecture des Pays-Bas.

Tome XLII:

J. P. NUEL. Recherches microscopiques sur l'anatomie du limaçon chez les mammifères.

C. Lagrange. De l'origine et de l'établissement des mouvements astronomiques.

C. le Paige. Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie.

M. Cotteau. Description des échinides du calcaire grossier de Mons.

M. Souillart. Mouvements relatifs de tous les astres du système solaire, chaque astre étant considéré individuellement.

O. van Ertborn. Observations de la planète Mars faites pendant l'opposition de 1877.

H. Hymans. La gravure dans l'école de Rubens.

Tome XLIII:

C. Lagrange. Recherches sur l'influence de la forme des masses dans le cas d'une loi quelconque d'attraction diminuant indéfiniment quand la distance augmente comme préliminaire de la théorie de la cristallisation.

Bertkau. Verzeichniss der von Prof. Ed. van Beneden auf seiner im Auftrage der belgischen Regierung unternommenen wissenschaftlichen Reise nach Brasilien und la Plata i. J. 1872—73 gesammelten Arachniden.

M. Cotteau. Description des échinides tertiaires de la Belgique.

A. de Ceuleneer. Essai sur la vie et le règne de Septime Sévère.

Tables des mémoires des membres, des mémoires couronnés et de ceux des savants étrangers de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1858, 1879. Années 1816—1857, 1858—1878. 8°.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1880—1881. Tome XXIX, XXX, XXXII. 8°.

Inhoud, Tome XXIX:

Ed. Mailly. Sur le dessein qu'on avait formé en 1760 de faire 'acquisition du naturaliste Michel Adanson et de son cabinet pour l'Université de Louvain.

ADAN. Attractions locales. Corrections des éléments de l'ellipsoïde osculateur.

— Comparaison entre les coordonnées réelles et les coordonnées théoriques d'un lieu de la terre. Déviation ellipsoïdale.

—— Mémoire sur l'ellipsoïde unique.

F. VAN RYSSELBERGHE. Note sur les oscillations du littoral belge.

A. RIVIER. Claude Chansonnette, jurisconsulte messin, et ses lettres inédites.

A. GOOVAERTS. Histoire et bibliographie de la typographie musicale dans les Pays-Bas.

Tome XXX:

SPÉE. Sur le déplacement des raies des spectres des étoiles.

M. J. KÜNTZIGER. Essai historique sur la propagande des encyclopédistes français en Belgique.

H. FRANCOTTE. Essai historique sur la propagande des encyclopédistes français dans la principauté de Liège.

KERVYN DE LETTENHOVE. Les autographes de M. DE STASSART.

CH. PAILLARD. Voyage dans les Pays-Bas et maladie d'Eléonore d'Autriche (ou de Portugal), femme de François 1er, d'après les documents inédits tirés des Archives du royaume de Belgique.

ED. MAILLY. Les origines du Conservatoire royal de musique de Bruxelles.

Tome XXXII:

V. BRANTS. Histoire des classes rurales aux Pays-Bas jusqu'à la fin du XVIIIe Siècle.

F. DE POTTER en J. BROECKAERT. Geschiedenis van den Belgischen Boerenstand.

Bulletin de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome I. N°. 3—4. 8°.

Collection de chroniques belges inédites, publiée par ordre du Gouvernement. CH. PIOT. Chroniques de Brabant et de Flandre. Bruxelles 1879. 4°.

Collection de chroniques belges inédites, publiée par ordre du Gouvernement. KERVIJN DE LETTENHOVE. Istore et chroniques de Flandres, d'après les textes de divers manuscrits. Bruxelles 1879—1880. 2 Tomes. 4°.

Collection de chroniques belges inédites, publiée par ordre du Gouvernement. H. Goffinet. Cartulaire de l'abbaye d'Orval, depuis l'origine de ce monastère jusqu'a l'année 1365 inclusivement, époque de la réunion du comté de Chiny au duché de Luxembourg. Bruxelles 1879. 4°.

Collection de chroniques belges inédites, publiée par ordre du Gouvernement. S. Bormans. Ly myreur des histors, chronique de Jean des Preis dit d'Outremeuse. Bruxelles 1880. Tome VI. 4°.

Collection de chroniques belges inédites, publiée par ordre du Gouvernement. E. Poullet. Correspondance du Cardinal de Granvelle, 1565—1586. Bruxelles 1880. Tome II. 4°. (Faisant suite aux papiers d'état du Cardinal de Granvelle, publiés dans la collection de documents inédits sur l'histoire de France).

Compte rendu des séances de la Commission royale d'histoire ou recueil de ses bulletins. Bruxelles 1878—1880. 4e Série. Tome VI. Bulletin 1—3. Tome VII. Bulletin 1—3. Tome VIII. Bulletin 1—3. 8°.

Biographie nationale publiée par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1878—1880. Tome VI. Partie 2. Tome VII. Partie 1. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N°. 5. 8°.

F. Plateau et V. Liénard. Observations sur l'anatomie de l'éléphant d'Afrique (Loxodon Africanus) adulte; Bruxelles 1881. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie Royale de Belgique).

A. Wasseige. Ablation d'une tumeur kystique d'une partie de l'utérus et de l'ovaire gauche. Bruxelles 1881. 8⁰. (Extrait du Bulletin de l'Académie Royale de médecine).

Texte explicatif du levé géologique de la planchette de Kermpt (Bolderberg) par M. le baron O. van Ertborn, avec la collaboration de M. P. Gogels. Bruxelles 1881. 8⁰.

Annales de l'Observatoire royal de Bruxelles. Bruxelles 1880—1881. 2e Série. Annales météorologiques. Tome I. Annales astronomiques. Tome III. 8⁰.

Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles. Bruxelles 1879—1880. 47e et 48e Année. 8⁰.

Annales de la Société malacologique de Belgique. Bruxelles 1877—1878. Tome XII—XIII. 8⁰.

Procès-Verbal des séances de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1880—1881. 8⁰.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. Anvers 1879. 3e Série. Tome V. 8⁰.

Académie d'archéologie de Belgique. F. van der Taelen. Notice sur Jeanne-Marie van der Genst mère de Marguerite d'Autriche, accompagnée des généalogies de familles belges qui en descendent et de la postérité souveraine et princière de l'archiduchesse Marguerite. Anvers 1879. 8⁰.

Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique. Anvers 1877—1880. 8⁰.

Revue Catholique. Louvain 1880. Nouvelle Série. Tome XXIII—XXIV. 8⁰.

Annuaire de l'Université Catholique de Louvain. 1881. 45e Année. 8°.

Bibliographie Académique. Lonvain 1880. 8°.

G. J. WAFFELAERT. De dubio solvendo in re morali. Lovanii 1880. (Dissertatio). 8°.

H. J. T. BROUWER. De fide divina. Lovanii 1880. (Dissertatio). 8°.

P. FREDERICQ. Marnix en zijne Nederlandsche Geschriften. Gent 1881. 8°. (Uitgave van het Willems-Fonds N°. 95).

FRANKRIJK.

Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881. Tome XCII. N°. 21—24. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N°. 21—24. 8°.

Journal de l'Ecole polytechnique. Paris 1880. Tome XXIX. Cahier 48. 4°.

Nouvelles archives du Muséum d'histoire naturelle. Paris 1880. 2e Série. Tome III. Fasc. 2. 4°.

Inhoud:

A. T. DE ROCHEBRUNE. Recherches d'ostéologie comparée sur une race de boeufs domestiques observée en Sénégambie.

P. P. DEHÉRAIN et E. BRÉAL. Recherches sur la maturation de quelques plantes herbacées.

CH. NAUDIN. Quelques remarques au sujet des plaqueminiers (Diospyros) cultivés à l'air libre dans les jardins de l'Europe.

S. MEUNIER et J. LAMBERT. Recherches stratigraphiques et paléontologiques sur les tables marins de Pierrefitte près Étampes (Seine-et-Oise).

A. T. de Rochebrune. Révision des Ophidiens fossiles au Muséum d'histoire naturelle.

E. Becquerel et H. Becquerel. Observations de température faites au Muséum d'histoire naturelle pendant les années météorologiques 1878—1879.

Muséum d'histoire naturelle. Rapports annuels de M. M. les professeurs et chefs de service 1879—1880. Paris 1880—1881. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1880. Tome XXVII. Comptes rendus N°. 6. 8°.

Publications de l'École des langues orientales vivantes. Paris 1881. Vol. XVI. roy. 8°.

Inhoud:

C. Imbault-Huart. Recueil de documents sur l'Asie Centrale.

Annales de l'extrême orient. Bulletin de la Société Académique Indo-Chinoise. Paris 1881. N°. 31—35. roy. 8°.

E. Gibert. L'inde française en 1880. Paris 1881. roy. 8°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1881. 4e. Année. N°. 5—6. 8°.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr. 170—173. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 245—248. 4°.

Annales du Musée Guimet. Revue de l'histoire des religions. Paris 1880—1881. Tome I—II, III. N°. 1. 8°.

Mémoires de la Société des sciences naturelles de Bordeaux. Paris-Bordeaux 1881. Tome IV. Cahier 2. 8⁰.

Inhoud:

P. Tannery. L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie.
Hautreux. Études météorologiques de la Gironde à la Plata.
A. Millardet. Pourridié et Phylloxera; étude comparative de ces deux maladies de la vigne.
Dannecy. Modification de l'appareil de March.
Denigès. Préparation de l'éther bromhydrique par l'action simultanée du zinc et de l'acide sulfurique sur l'alcool éthylique et le brome.
E. Royer. Recherches sur le passage du mercure à travers les liquides.
F. Ponsot. De la reconstitution et du greffage des vignes.
E. Debrun. Note sur un nouveau baromètre amplificateur.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. Paris-Cherbourg 1879. 3e Série. Tome II. 8⁰.

Inhoud:

A. de Caligny et L. E. Bertin. Sur la fondation de l'ancien port de Cherbourg 1686—1739 à 1743—1758.
Clavenad. Restauration des fondations du bâtiment des subsistances de la marine à Cherbourg.
———— Note sur les objets préhistoriques trouvés dans les fouilles récemment opérées à Cherbourg, et notamment dans les déblais du bassin des subsistances de la marine.
L. E. Bertin. Données théoriques et expérimentales sur les vagues et le roulis.
H. Jouan. Notes sur quelques grands Cétacés échoués sur les côtes d'Europe pendant les dix dernières années.
D. A. Godron. Quatrièmes mélanges de tératologie végétale.
Mottez. Détermination de la longitude par une occultation d'étoile.
L. Tillier. Note sur la variation chez les trigles des côtes de France.
A. A. Fauvel. Promenades d'un naturaliste dans l'archipel des Chusan et sur les côtes du Chêkiang (Chine).

Mémoires de la Société des antiquaires de Picardie. Amiens 1880. Tome IX. 4⁰.

Inhoud:

HÉNOCQUE. Histoire de l'abbaye et de la ville de Saint-Riguier. Tome I.

Carte archéologique et historique du diocèse d'Alger, comparé au temps ou florissait l'église d'Afrique. Rédigée par ordre de son excellence M. le comte P. DE CHASSELOUP LAUBAT etc. Paris 1865. Plano.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1880—1881. Vol. CLXXI. Part 1 and 3. Vol. CLXXII. Part 1. 4⁰.

Inhoud, Vol. CLXXI. Part 1:

H. M'LEOD and G. SYDENHAM CLARKE. On the determination of the rate of vibration of tuning-forks.
W. E. AYRTON and J. PERRY. The contact theory of voltaic action. N⁰. 3.
W. BEVAN LEWIS. Researches on the comparative structure of the cortex cerebri.
WARREN DE LA RUE and H. W. MÜLLER. Experimental researches on the electric discharge with the chloride of silver battery.
C. NIVEN. On the conduction of heat in ellipsoids of revolution.
EARL OF ROSSE. On some recent improvements made in the mountings of the telescopes at Birr Castle.
G. J. ROMANES. Concluding observations on the locomotor system of Medusae.
NOBLE. Researches on explosives. N⁰. 2. Fired gunpowder.
W. FARR. English reproduction table.
J. B. LAWES and J. H. GILBERT. Agricultural, botanical and chemical results of experiments on the mixed herbage of permanent meadow, conducted for more than twenty years in succession on the same land.

Vol. CLXXI. Part 3:

A. CAYLEY. A memoir on the single and double theta-functions.

J. W. Mallet. Revision of the atomic weight of aluminium.

Owen. Description of some remains of the gigantic land-lizard (Megalania prisca, Owen), from Australia.

——— On the ova of the Echidna hystrix.

T. R. Robinson. On the determination of the constants of the cup anemometer by experiments with a whirling machine. Part. 2.

W. Siemens. On the dynamo-electric current, and on certain means to improve ist steadiness.

Vol. CLXXII. Part 1:

W. Parker. On the structure and development of the skull in the Batrachia. Part 3.

Proceedings of the Royal Society of Londen. 1881. Vol. XXXI. N°. 209—210. Vol. XXXII. N°. 212. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLI. N°. 7. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 6. 8°.

Proceedings of the Royal Institution of Great-Britain. London 1880. Vol. IX. Part. 3. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1881. Series 2. Vol. I. Part. 3. 8°.

Transactions of the Zoological Society of London. London 1881. Vol. XI. Part. 5. 4°.

Inhoud:

Owen. Descriptions of some new and rare Cephalopoda. Part. 2.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society. London 1881. Part. I. 8°.

Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 1880. Vol. XXIX. Part. 2. 4°.

Inhoud:

CHRYSTAL. On MINDING's system of forces.

W. W. J. NICOL. On the action of sulphide of potassium upon chloroform.

J. D. HAMILTON DICKSON. A new method of investigating relations between functions of the roots of an equation and its coëfficients.

P. GEDDES. On the phenomena of variegation and cell-multiplication in a species of Enteromorpha.

A. MACFARLANE. On the disruptive discharge of electricity. Part. 4.

E. J. MILLS. Researches in thermometry.

J. Y. BUCHANAN. Preliminary note on the compressibility of glass.

J. G. MAC GREGOR and C. G. KNOTT. On the variation with temperature of the electrical resistance of wires of certain alloys.

CHRYSTAL. On the differential telephone.

P. SMYTH. Notice of the completion of the new rock thermometers at the Royal Observatory, Edinburgh, and what they are for.

TAIT. Note on a theorem in geometry of position.

F. E. SCHULZE. On the structure and arrangement of the soft parts in euplectella aspergillum.

TAIT. On MINDING's theorem.

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1879—1880. Vol. X. 8⁰.

Transactions and proceedings of the Botanical Society. Edinburgh 1881. Vol. XIV. Part. 1. 8⁰.

Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow. 1880. Vol. XII. N⁰. 1. 8⁰.

Journal of the Royal Geological Society of Ireland. Dublin 1880. Vol. XV. Part. 3. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1880. Band XII. Heft 2. gr. 4⁰.

Inhoud:

R. HOERNES und M. AUINGER. Die Gasteropoden der Meer-Ablagerungen der ersten und zweiten miocänen Mediteran-Stufe in der Österreichisch-Ungarische Monarchie (2e Lief).

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1880. Band XXX. N°. 4. 8°.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1880. 8°.

Das k. k. Quecksilberwerk zu Idria in Krain. Herausgegeben von der k. k. Bergdirection zu Idria. Wien 1881. gr. 4°.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1880. Jahrg. 41. 4°.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Presburg. 1881. Neue Folge. Heft 4. 8°.

J. Kriechbaumer. Sprache und Wissenschaft. Budapest 1881. 8°.

DUITSCHLAND.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1881. Band LXXXIV. Heft 2. 8°.

F. Bech. Verzeichniss der alten Handschriften und Drucke in der Domherren-Bibliothek zu Zeitz. Berlin 1881. roy. 8°.

J. A. C. Oudemans. Ueber die Compensation eines Secundenpendels für Temperatur und Luftdruck vermittelst eines Quecksilbercylinders und eines Krueger'schen Manometers. Kiel 1881. 4°.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1880. Jahrg. 15. Heft 4. 8°.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1881. Theil LXVI. Heft 3. 8°.

V. Carus. Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. Jahrg. 4. N°. 84—85. 8°.

J. D. van der Waals. Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Aus dem Holländischen übersetzt und mit Zusätzen versehen von Dr. F. Roth. Leizig 1881. 8°.

A Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1881. Band XXVII. N°. 5. 4°.

Verhandlungen der kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1879—1880. Band XLI. Abth. 1—2. 4°.

Inhoud:

J. Moser. Der Kreisprocess erzeugt durch den Reactionsstrom der electrolytischen Ueberführung und durch Verdampfung und Condensation.
L. Weinek. Die Photographie in der messenden Astronomie, insbesondere bei Venusvorübergängen.
C. Kupffer und B. Benecke. Photogramme zur Ontogenie der Vögel.
O. Hoppe. Beobachtungen der Wärme in der Blüthenscheide einer Colocasia odora (Arum cordifolium).
F. Küstner. Bestimmungen des Monddurchmessers aus neun Plejadenbedeckungen des Zeitraumes 1839—1876, mit gleichzeitiger Ermittlung der Oerter des Mondes.
R. Greef. Die Echiuren (Gephyrea armata).
H. Dewitz. Afrikanische Tagschmetterlinge.
G. E. Adolph. Ueber Insectenflügel.
——————— Ueber abnorme Zellenbildungen einer Hymenopterenflügel.
M. Willkomm. Zur Morphologie der samentragenden Schuppe des Abietineenzapfens.

F. W. Klatt. Die Compositae des Herbarium Schlagintweit aus Hochasien und südlichen indischen Gebieten.
F. E. Geinitz. Die Blattinen aus der unteren Dryas von Weissig bei Pillnitz.

Leopoldina. Amtliches Organ der kon. Leop.-Carol. deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1880. Heft 16. 4°.

ZWITSERLAND.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle. Genève 1880. Tome XXVII. 1e Partie. 8°.

Inhoud:

J. E. Duby. Choix de mousses exotiques nouvelles ou mal connues.
C. Cellérier. Nouveau mode de discussion de la propagation du mouvement dans un milieu élastique.
Monographie des Echinides contenus dans les couches nummulitiques de l'Égypte.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1880. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 3. Vol. V—VIII. 4°.

Inhoud, Vol. V:

Guidi. Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle travi omogenee e nelle travi reticolari appoggiate agli estremi e soggette ad un sopraccarico mobile.
Bellavitis. Sulla statica.
——— Sviluppi in serie delle funzioni implicite, e rami infiniti delle curve algebriche.
Battaglini. Sull' equazione differenziale ellittica.
Cossa. Sulla composizione di alcuni serpentini della Toscana.
De Zigno. Sopra un cranio di coccodrillo scoperto nel terreno eoceno del Veronese.
Cossa. Sulla eufotide dell' Isola d'Elba.

SCARABELLI. Sugli scavi eseguiti nella caverna detta Frasassi (provincia di Ancona).

DELLA VALLE. Sui coriceidi parassiti, e sull' anatomia del gen. Lichomolgus.

MELI. Sui dintorni di Civitavecchia.

TARAMELLI. Sul deposito di salgemma di Lungro nella Calabria Citeriore.

BARILARI. Sulle relazioni della commissione nominata dal governo Ungherese per gli studi sulla Tisza, sul Danubio e sulle difese alla citta di Szeghedino.

COSSA e ZECCHINI. Sul tungstato neutro di cerio.

BELLONCI. Ricerche comparative sulla struttura dei centri nervosi dei vertebrati.

BELTRAMI. Sull' attrazione di un anello circolare od ellittico.

CASORATI. Il calcolo delle differenze finite, interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi, a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilita complessa.

MENEGHINI. Nuovi fossili siluriani di Sardegna.

ANDRES. Intorno all' Edwardsia Claparedii (Halcampa Claparedii Panc).

MOSSO. Sulla circolazione del sangue nel cervello dell' uomo.

TOMMASI-CRUDELI. Sulla distribuzione delle acque nell sottosuolo romano, e sulla produzione naturale della malaria.

CAPELLINI. Gli strati a congerie o la formazione gessoso-solfifera nella provincia di Pisa e nei dintorni di Livorno.

Vol. VI:

G. SEGUENZA. Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio (Calabria).

Vol. VII:

TRINCHESE. I primi momenti dell' evoluzione nei Molluschi.

COMES. La luce e la traspirazione nelle piante.

CELORIA. Sopra alcuni eclissi di sole antichi e su quello di Agatocle in particolare.

EMERY. Fierasfer. Studi intorno alla sistematica, l'anatomia e la biologia delle specie mediterranee di questo genere.

CANTONI. Sulla teoria della pila voltiana.

MAGGI. Distribuzione dell' elettricità in equilibrio sopra due conduttori piani indefiniti, paralleli, assoggettati all' induzione di un punto situato nello spazio compreso fra essi.

Angelucci. Sullo sviluppo e struttura del tratto uveale anteriore dei vertebrati.

Lessona. Molluschi viventi del Piemonte.

Perroncito. Osservazioni elmintologiche relative alla malattia sviluppatasi endemica negli operai del Gottardo.

Vol. VIII :

Verri. I vulcani Cimini.

Pantanelli. I diaspri della Toscana e i loro fossili.

Bartoli. Apparecchio per la determinazione dell' equivalente meccanico del calore.

——— Le leggi delle polarità galvaniche.

Respighi. Catalogo delle declinazioni medie pel 1875, o di 1463 stelle comprese fra i paralleli 20° e 64° nord dedotto da osservazioni fatte nel R. Osservatorio del Campidoglio.

Parona. Il calcare liassico di Gozzano e i suoi fossili.

Favero. De aequationum differentialium partialium natura disquisitiones quaedam analyticae.

Incoronato. Sopra uno scheletro umano dell' età della pietra della provincia di Roma.

Betocchi. Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell' Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1879.

Ascoli. Sulle serie trigonometriche a due variabili.

Meli. Sulla natura geologica dei terreni incontrati nelle fondazioni tubulari del nuovo ponte di ferro costruito sul Tevere a Ripetta' e sull' Unio sinuatus Lamk. rinvenutovi.

Canavari. I brachiopodi degli strati a Terebratula Aspasia Mgh. nell' Appennino Centrale.

Cerruti. Sulle vibrazioni de' corpi elastici isotropi.

Respighi. Osservazioni del diametro orizzontale del sole fatte al R. Osservatorio del Campidoglio negli anni 1878 e 1879.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1880. Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Serie 3. Vol. IV—V. 4°.

Inhoud, Vol. IV :

L. A. Milani. Il ripostiglio della Venèra. Monete romane della seconda metà del terzo secolo.

R. Lanciani. Topografia di Roma antica. I comentarii di Frontino intorno le acque e gli aquedotti. Silloge epigrafica aquaria.

Vol. V:

Fiorelli. Notizie degli scavi di antichità. Settembre 1879 — Giugno 1880.
Pais. Il σαρδάνιος γέλως.
Lumbroso. Sulla fortuna della parola filosofo.
Comparetti. Relazione sui papiri ercolanesi.
Helbig. Sopra il trattamento della capellatura e della barba all' epoca omerica.
Tartara. Osservazioni di storia romana all' anno 537/217 sulle legioni, sugli imperii, e sull' istituzione delle provincie consolari.
Govi. Intorno alla data di un discorso inedito pronunciato da Federico Cesi fondatore dell' Accademia dei Lincei e da esso intitolato: Del natural desiderio di sapere et Institutione de Lincei per adempimento di esso.
Mariotti. Dante e la statistica delle lingue.
Mamiani. Del genio e in che propiamente consista.
Henry. Galilée, Torricelli, Cavalieri, Castelli. Documents nouveaux tirés des Bibliothèques de Paris.

Atti della R. Accademia dei Lincei (Transunti). Roma 1881. Serie 3. Vol. V. Fasc. 12—13. 4⁰.

D. Carutti. Commemorazioni al conte Gian Carlo Conestabile. 4⁰.

Memorie della Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna 1880. Serie 4. Tomo I. 4⁰.

Inhoud:

F. Rizzoli. Studi isto-fisio-anatomo-patologici e clinici sull' ano preternaturale accidentale.
E. Villari. Osservazione sulla variazione di temperature del corpo umano prodotta dal movimento.
——— Sulle leggi termiche e galvanometriche della scintilla delle scariche di induzioni.
A. Fais. Sulle principali proprietà delle traiettorie ortogonali delle generatrici delle superficie rigate.

A. Righi. Sulle variazioni di lunghezza che accompagnano la magnetizzazione.
———— Sulla dilatazione galvanica.
———— Sulla formazione dell' Albero di Marte.
L. Calori. Dell' abnorme separazione della porzione squamosa dalle altre dell' osso temporale dell' uomo adulto. Di alcuni particolari intorno alla varietà delle cellule mastoidee, e del forame di rivino.
F. Aschieri. Sulle forme collineari e reciproche nella ordinaria geometria.
F. Verardina. Di un nuovo uncino ostetrico e decollatore, premessa la storia generale di alquanti mezzi meccanici principali adoprati fin qui per recidere la testa al feto morto nell' utero materno.
G. Taruffi. Due rare alterazioni del fegato.
———— Anomalie dell' osso malare.
G. Gautero. Di una classe di meccanismi a tre membri.
G. Cocconi. Quarto contributo alla flora della provincia di Bologna.
A. Saporetti. Metodo teorico-pratico per iscoprire gli istanti del nascere a tramontare della luna.
F. Selmi. Ricerche del fosforo nelle urine in caso di avvelenamento, e prodotti che vi si riscontrano.
———— Esame dell' urina di un itterico grave in correlazione coll' esame di un' urina fosforata.
———— Sulla fallacia del reattivo di Van-Deen per determinare le macchie del sangue.
———— Nota sopra due arsine formatesi in uno stomaco di majale salato con anidride arseniosa.
A. Gotti. Ricerche sopra un lento processo artritico al tarso del cavallo.
A. Cavazzi. Determinazione del potere calorifero dei combustibili solidi idrogenati col processo Berthier.
F. Masi. Dei giunti derivati dal quadrilatero sferico.
G. Brugnoli. Vasta idatide del fegato, trattata colla puntura capillare aspirante praticata nel sesto spazio intercostale destro.
F. P. Ruffini. Di alcune singolarità nei fasci e nelle reti di linee piane algebriche.
G. P. Piana. Osservazioni comparative intorno alla struttura e della funzione dell' organo di Jacobson.
G. Bellonci. Sui lobi olfatorii del Nephrops Norwegicus.
A. Righi. Contribuzioni alla teoria della magnetizzazione dell' acciaio.

L. Foresto. Dell' ostrea cochlear (Poli) e di alcune sue varietà.
P. Boschi. Ricerche sopra una questione di partizione di numeri.
E. Beltrami. Sulla teoria dell' attrazione degli ellissoidi.
L. Calori. Di una bambina microcefalica e specialmente del suo cervello.
S. Canevazi. Sopra alcune formole della resistenza dei materiali.
A. Rozzi. L'azione dell' acido osmico sulle cellule vegetali.
——— Sul modo di terminare dei nervi nei muscoli dell' organo sonoro della cicala comune.
A. Cavazzi. Determinazione dell' ossigene attivo, nel biossido di bario commerciale.
G. Razzaboni. Sul moto dell' acqua per alvei a fondo orizzontale.
C. Giannetti e A. Corona. Sugli alcaloidi cadaverici o ptomaine del selmi.
L. Monti. Descrizioni anatomica di un mostro umano doppio del genere derodimo.
L. Bombicci. Nuovi studi sulla poligenesi nei minerali.
S. Trinchese. Ricerche anatomiche sulla rizzolia peregrina.
F. Selmi. Nuovo esame di urine fosforate; fosfine venefiche che se ne ritraggono.
——— Ricerche chimico-tossicologiche sopra il cervello di uno che si avvelenò.
——— e C. Stroppa. Ricerche chimico-tossicologiche di uno che si avvelenò con fosforo.
——— Riepilogo e considerazioni sulle quattro memorie precedenti.

Indici generali dei dieci tomi della terza serie delle Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna 1880. 4°.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. 1880. Serie 2. Tomo XXXII. 4°.

Inhoud:

E. D'Ovidio. Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie.
G. B. Laura. Nuove ricerche sull' origine reale dei nervi cerebrali (glosso-faringeo, acustico, facciale, abducente e trigemino).
A. Portis. Di alcuni fossili terziarii del Piemonte e della Liguria, appartenenti all' ordine dei chelonii.

G. Curioni. L'elasticità nella teoria dell' equilibrio e della stabilità delle volte.
E. Sang. Nouveau calcul des mouvements elliptiques.
A. Dorna. Intorno alle funzioni elittiche ed agli integrali ellittici di prima specie, e sulla loro applicazione al moto circolare di un punto vincolato, attratto o respinto con forza costante da un centro fisso.
G. Basso. Sugli effetti meccanici della elettrolisi.
M. Baretti. Il ghiacciaio del Miage, versante italiano del gruppo del Monte Bianco.
F. Gerbaldi. Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di 3a classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate proiettivamente.
C. Golgi. Sui nervi dei tendini dell' uomo e di altri vertebrati, e di un nuovo organo nervoso terminale muscolo-tendineo.
G. Curioni. Macchina per esperimentare le resistenze dei materiali da costruzione.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. 1881. Vol. XVI. disp. 4—5. 8⁰.

Bollettino dell' Osservatorio della Regia Universita di Torino. 1881. Anno XV. 4⁰. Oblong.

DENEMARKEN.

Mémoires de la Société royale des antiquaires du Nord. Copenhague 1878—79. 8⁰.

Inhoud;

C. Engelhardt. L'ancien âge de fer en Sélande et dans la partie orientale du Danemark.
E. Vedel. Nouvelles recherches sur l'âge de fer dans l'île de Bornholm.
J. J. A. Worsaae. La civilisation danoise à l'époque des Vikings.

Oversigt over det kong. danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger i aaret 1880. N⁰. 3. 1881. N⁰. 1. 8⁰.

Aarböger for nordisk oldkyndighed og historie. Kjöbenhavn 1879—1880. 8⁰.

RUSLAND.

H. Wild. Die Temperatur-Verhältnisse des Russischen Reiches. St. Petersburg 1881. 2te Hälfte. 4°. Mit einem Atlas. Plano.

AZIË.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ost-Asiens. Yokohama 1881. Index zu Band II. 8°.

NOORD-AMERIKA.

Index to papers on anthropology published by the Smithsonian Institution 1847 to 1878. Washington 1881. 8°.
(Reprinted from Smithsonian Report for 1879).

Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Cambridge 1881. Vol. VIII. 8°.

Photometric measurements of the variable stars β Persei and DM. 81°.25, made at the Harvard College Observatory. Cambridge 1881. 8°.
(Reprinted from the Proc. American Academy of arts and sciences).

F. E. Nipher. The magnetic survey of Missouri. 8°.
(Reprinted from the American journal of science).

Prospectus of the Catholic commercial academy of Montreal and of the scientific and industrial school. Montreal 1874. 8°.

L. A. Huguet-Latour. Histoire des paroisses du diocèse de Montréal. Montréal 1881. 8°.

The Canadian antiquarian and numismatic journal. Montreal 1878. Vol. VII. N°. 2. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo VI. N°. 56—67. fol.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1881. Tomo XI. Entr. 5. 8°.

AUSTRALIË.

Proceedings of the Linnean Society of N. S. W. Sydney 1880. Vol. IV. Part. 4. Vol. V. Part. 1—2. 8°.

AANGEKOCHT.

Journal des Savants. Paris Mai 1881. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1880. 2e Série. Tome IV. Décembre 8°.

Report of the British association for the advancement of science (1878—1879). London 1879—1880. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VII. N°. 42. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XI. N°. 70—71. 8°.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Band V. St. 5. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band CCXL. Heft 4—5. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1881. St. 22—24. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome X. N⁰. 29. 8⁰.

Bibliothèque Universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1881. 3e Période. Tome V. N⁰. 5. 8⁰.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. N⁰. 9—10. 1881. N⁰. 1. 8⁰.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1880. Vol. XLIX. Part. 1. N⁰. 4. Part. 2. N⁰. 3—4. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN JULI, AUGUSTUS EN SEPTEMBER 1881.

Bouwkundige Bijdragen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der bouwkunst. Amsterdam 1881. Deel XXVI. St. 3. 4⁰.

Afbeeldingen van oude bestaande gebouwen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der bouwkunst. Amsterdam 1881. Afl. 23. fol.

Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam 1881. Deel VIII. St. 1. 8°.

Koninklijk Oudheidkundig Genootschap. Jaarverslag in de 23ste algemeene vergadering, op Maandag 25 April 1881, uitgebracht door den Voorzitter. roy. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, handel en scheepvaart. Amsterdam 1881. N°. 1—2. 8°.

Algemeen jaarlijksch verslag van de Maatschappij voor den werkenden stand over het jaar 1880. Amsterdam 1881. 8°.

Jaarboek van het mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië, uitgegeven door het Ministerie van Koloniën. Amsterdam 1881. Jaarg. 10. Deel I. roy. 8°. Met Atlas.

Tijdschrift voor het zeewezen. Amsterdam 1880. Nieuwe Serie. N°. 3. 8°.

K. W. van Gorkom. Oost-Indische cultures, in betrekking tot handel en nijverheid. Amsterdam 1881. Deel II. roy. 8°.

C. Kerbert. Beitrag zur Kenntniss der Trematoden. 8°. (Overgedrukt uit het Archiv für mikrosk. Anatomie).

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des sciences. Harlem 1881. Tome XVI. Livr. 3. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1881. 4e Reeks. Deel V. N°. 6—8. 8°.

Flora Batava. Leyden 1881. Afl. 253—254. 4°.

H. SCHLEGEL. Muséum d'histoire naturelle des Pays-Bas. Leide 1881. Tome IX. 2. Table alphabétique. 8⁰.

Overzicht van de literatuur op de oester en haar cultuur betrekking hebbende. Leiden 1881. 8⁰.

Afscheidsrede bij het neerleggen van het hoogleeraarsambt aan de Universiteit te Leiden, uitgesproken op den 14den Juni 1881, door J. H. SCHOLTEN. Leiden 1881. 8⁰.

A. P. N. FRANCHIMONT. Leiddraad bij de studie van de koolstof en hare verbindingen. Leiden 1881. 2e druk. 8⁰.

JOHs. HILMAN. Ons Tooneel. Aanteekeningen en geschiedkundige overzichten. Naamrollen van plaatwerken en geschriften. Leiden 1881. 3de Gedeelte. (Beredeneerd Register). roy. 8⁰.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 1880—1881. 's Gravenhage 1881. Afl. 4. 1ste en 2de Ged. Afl. 5. 1ste Ged. Algemeen verslag. 4⁰.

C. BOCK. Reis in Oost- en Zuid-Borneo van Koetei naar Bandjermassin, ondernomen op last der Indische Regeering in 1879 en 1880. 's Gravenhage 1881. 1ste Gedeelte. Met Atlas. 4⁰.
(Uitgegeven door het Koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië.)

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische vereeniging. 's Gravenhage 1881. Deel XXIV. Afl. 3. 8⁰.

2de Vervolg van de beschrijving der schilderijen van het Rijks-Museum te Amsterdam, met historische aanteekeningen en facsimilés der naamteekens. 's Gravenhage 1881. 8⁰.

Verslagen omtrent 's Rijks oude Archieven. 1880. N°. 3. 's Gravenhage 1881. 8°.

Verslag over het Rijks Archief te 's Gravenhage. 1880. 8°.

Verslag van de aanwinsten der Koninklijke Bibliotheek gedurende het jaar 1880. 's Gravenhage 1881. 8°.

J. A. Fruin. De Nederlandsche Wetboeken enz. Utrecht en 's Gravenhage 1881. Afl. 17. 8°.

Route voor stoomschepen van Aden naar Straat Sunda en terug, uitgegeven door de Afdeeling Zeevaart van het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut. Utrecht 1881. gr. 4°.

F. C. Donders en Th. W. Engelmann. Onderzoekingen gedaan in het physiologisch laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Utrecht 1881. 3e Reeks. Deel VI. Afl. 1. 8°.

22ste Jaarlijksch Verslag betrekkelijk de verpleging en het onderwijs in het Nederlandsch Gasthuis voor ooglijders. Utrecht 1881. 8°.

Rijkslandbouwschool te Wageningen. Programma van het onderwijs voor het leerjaar 1881—1882 kl. 8°.

Verslag der Commissie ter verzekering eener goede bewaring van gedenkstukken van geschiedenis en kunst te Nijmegen, over de jaren 1879 en 1880. 8°.

Handelingen der Nederlandsche Vereeniging voor Psychiatrie. 's Bosch 1881. 2e Deel. N°. 8. 8°.

A. de Pinto. Handleiding tot het wetboek van strafvordering. Zwolle 1881. Afl. 1—5. 2e druk.. Herzien en verbeterd door A. A. de Pinto. 8°.

Register van Charters en bescheiden in het oude Archief van Kampen. 5de Deel, Supplement op de vier eerste deelen van 1300—1610, bewerkt door J. Nanninga Uitterdijk. Kampen 1881. roy. 8°.

Verslag van den toestand der provincie Friesland in 1880, aan de Staten van dat gewest gedaan door de Gedeputeerde Staten, in de zomervergadering van 1881. Leeuwarden 1881. 8°.

Systematische Catalogus der Provinciale Bibliotheek van Friesland. 5de Gedeelte (Godgeleerdheid, Handschriften, Kaarten van Friesland). Leeuwarden 1881. roy. 8°.

80ste Verslag van het Natuurkundig Genootschap te Groningen over het jaar 1880. 8°.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het veeartsenijkundig staatstoezigt in het jaar 1880. 's Gravenhage 1881. 4°.

Verslagen aan den Koning betrekkelijk de dienst der posterijen en telegrafen in Nederland in het jaar 1880. II Telegrafen. 's Gravenhage 1881. 4°.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Mei—Julij 1881. 's Gravenhage 1881. Nieuwe Serie. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten langs de Nederlandsche rivieren gedurende de maand December 1880. 's Gravenhage 1881. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van

kunsten en wetenschappen. Batavia 1881. Deel XXVI. Afl. 5—6. 8°.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1880—1881. Deel XVIII. N°. 4. Deel XIX. N°. 1. 8°.

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Batavia 1881. Deel XL. 8°.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1881. Deel XXVI. Afl. 3—4. 8°.

Geneeskundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1881. Deel XXI. Afl. 3—4. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome I. N°. 5—7. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N°. 6—7. 8°.

M. Gachard. Correspondance de Marguérite d'Autriche duchesse de Parme avec Philippe II. Bruxelles 1881. Tome III. 4°.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. Anvers 1861—1881. Tome XVIII. Livr. 1—4. Tome XIX. Livr. 3—4. Tome XXXVI. 8°.

Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique. Anvers 1880—1881. 2de Partie. N⁰. 6—11. 8⁰.

F. van der Taelen. Notice sur Jeanne Marie van der Genst mère de Marguérite d'Autriche. Anvers 1879. 8⁰.

——————— - Les Pays-Bas dans les temps anciens. La Belgique-L'Inquisition. Bruxelles 1866. 8⁰.

L. Devillers. Documents sur les conquètes de Don Juan et sur les partisans dans le Hainaut en 1578. Mons 1871. 8⁰.

——————— Description analytique de cartulaires et de chartriers accompagnée du texte de documents utiles à l'histoire du Hainaut et d'une notice sur le dépôt des archives de l'état. Mons 1872—1878. Tome VI, VIII. 8⁰.

——————— Monuments pour servir à l'histoire des provinces de Namur, de Hainaut et de Luxembourg. Bruxelles 1874. Tome III. 4⁰.

——————— Inventaire analytique des archives des commanderies belges de l'ordre de Saint-Jean de Jérusalem ou de Malte. Mons 1876. 4⁰.

——————— Particularités curieuses sur Jacqueline, duchesse de Bavière, comtesse de Hainaut, de Hollande, de Zélande et dame de Frise, et sur le comté de Hainaut. Mons 1879. 8⁰.

Annales du cercle archéologique de Mons. 1880. Tome XVI. Part 1—2. 8⁰.

L. Devillers. Le Hainaut après la mort de Marie de Bourgogne (1482—1483). Bruxelles 1880. 8⁰.

L. Devillers. Mémoire sur les cartulaires de l'abbaye de Saint-Denis- en Brocqueroie. 8°.

——————— Documents relatifs à l'expédition de Guillaume IV contre les Liègeois 1407—1409. 8°. (Extrait des Bulletins de la Commission royale d'histoire).

——————— Notice sur un cartulaire concernant les terres dites de débat (Hainaut et Flandre). 8°. (Extrait des Bulletins de la Commission royale d'histoire).

——————— Quelques chartes des comtes de Hainaut Bauduin IV, Bauduin V et Bauduin VI. 8°. (Extrait du Compte rendu de la Commission royale d'histoire).

——————— Sur les expéditions des comtes de Hainaut et de Hollande en Prusse. 8°. (Extrait des Bulletins de la Commission royale d'histoire).

——————— Sur la mort de Guillaume le Bon, comte de Hainaut, de Hollande, de Zélande, et seigneur de Frise. 8°. (Extrait des Bulletins de la Commission royale d'histoire).

——————— Jean de Baudrenghien, bailli de la Hamaide et le compromis des nobles. 8°. (Extrait des Bulletins de la Commission royale d'histoire).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881. Tome XCII. N°. 25—26. Tome XCIII. N°. 1—12. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N°. 25—37. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1881. Tome XXVIII. Comptes-rendus. N°. 2—3. Revue Bibliographigue A. 8°.

Annales de l'extrême Orient. Bulletin de la Société Académique Indo-Chinoise. Paris 1881. N°. 36. 8°.

V. DURUY. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés, jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr. 174—186. roy. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1881. Vol. VI. N°. 249—260. 4°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1881. 4°. Année. N°. 7—8. 8°.

Mission scientifique au Mexique et dans l'Amérique centrale, publié par ordre du Ministre de l'Instruction publique. Paris 1870—1880. gr. 4°.

a. Recherches botaniques publiées sous la direction de M. J. DECAISNE.
1e Partie. Cryptogamie, par M. EUG. FOURNIER. Livr. I.

b. Recherches Zoologiques publiées sous la direction de M. MILNE EDWARDS.
3e Partie. Études sur les reptiles et les batraciens par M. M. A. DUMÉRIL et BOCOURT. Livr. 1—6.
4e Partie. Études sur les poissons, par M. M. L. VAILLANT et BOCOURT. Livr. 1—2.
5e Partie. Études sur les xiphosures et les crustacés par M. A. MILNE EDWARDS. Livr. 1—6.
6e Partie. Études sur les insectes orthoptères et les myriapodes par M. H. DE SAUSSURE. Livr. 1—5.
7e Partie. Études sur les mollusques terrestres et fluviatiles par M. M. P. FISCHER et H. CROSSE. Livr. 1—8.

Recherches pour servir à l'histoire naturelle des mammifères, comprenant des considérations sur la classification de ces animaux par M. H. MILNE EDWARDS,

des observations sur l'hippopotame de Liberia et des études sur la faune de la Chine et du Tibet oriental par M. A. MILNE EDWARDS. Paris 1868—1874. 1 Vol. Texte et 1 Atlas. 4°.

Catalogue général des manuscrits des bibliothèques publiques des départements. Paris 1849—1876. Tome I—VI. 4°.

L. DELISLE. Inventaire général et méthodique des manuscrits français de la Bibliothèque nationale. Paris 1876—1878. 2 Tomes. 8°.

Inventaire alphabétique des livres inprimés sur vélin de la Bibliothèque nationale. Complément du Catalogue publié par VAN PRAET. Paris 1877. 8°.

P. LORAIN. Études de médecine clinique faites avec l'aide de la méthode graphique et des appareils enregistreurs. Paris 1877. 2 Tomes. (De la température du corps humain et de ses variations dans les diverses maladies). 8°.

AD. WASSEIGE. Essais pratiques du dernier modèle du forceps Tarnier. Paris 1881. 8°.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Paris-Lyon 1879—1880. Classe des sciences. Vol. XXIV. roy. 8°.

Inhoud:

ALLÉGRET. Mémoire sur le calendrier.
ANDRÉ. Pluies et neiges de l'année 1879.
——— Observation du passage de Mercure sur le soleil faite à Ogden (Utah) le 6 Mai 1878.
FORCRAND. Recherches sur la constitution des outremers.
GONNARD. Note sur les associations minérales du Capucin (Mont-Doré).

GONNARD. Note sur les associations minérales que renferment certains trachytes du ravin de Riveau-Grand, au Mont-Doré.

—— —— Note sur quelques faits minéralogiques observés dans les granits des bords de la Saône.

LOCARD. Note sur les pluies de boue dans la région lyonnaise.

LOIR. Note sur la double fonction chimique (alcool et aldéhyde) de divers acides monobasiques.

MARMY. Souvenirs de la Turquie d'Asie. — Études de moeurs orientales.

RÉROLLE. Étude sur les mammifères fossiles des dépôts pampéens de la Plata.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Paris-Lyon 1879—1880. Classe des lettres. Vol. XIX. roy. 8⁰.

Inhoud:

DUCARRE. Le travail industriel et le travail agricole en France.

PERRET DE LA MENUE. Coup d'oeil sur quelques villes du Midi de la France.

A. MOLLIÈRE. De la métaphysique du droit.

E. CHARVÉRIAT. Les origines du journalisme en Allemagne.

ALLMER. Note sur un fragment de colonne itinéraire.

DUCARRE. Note sur les enfants trouvés.

PERRET DE LA MENUE. Recherches historiques et archéologiques sur le bouclier.

L. REUCHSEL. Étude sur le rôle de la mélodie, du rhythme et de l'harmonie dans la musique chez tous les peuples de l'Europe, depuis le moyen âge jusqu'à l'époque actuelle.

Fragments de musique ancienne.

Annales de la Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon. Paris-Lyon 1880. 5e Série. Tome II. roy. 8⁰.

Inhoud:

A. MAGNIN. Recherches sur la géographie botanique du Lyonnais.

DELOCRE. Rapport de la sous-commission technique chargée d'étudier la question de l'amélioration du service des eaux.

F. FONTANNES. Première note sur les foraminifères des terrains tertiaires supérieurs du bassin du Rhône.

A. Falsan et E. Chantre. Études sur les anciens glaciers et sur les terrains erratiques de la partie moyenne du bassin du Rhône.
Rapport de la Commission des soies sur les travaux en 1879.
Lafon. Orages de l'année 1879 dans le département du Rhône.
Jays. De la visibilité des Alpes considérée comme pronostic du temps.
A. Locard. Études sur les variations malacologiques, d'après les faunes vivante et fossile de la partie centrale du bassin du Rhône.
C. Gourdon. Note sur l'analyse des savons.

Saint-Lager. Nouvelles remarques sur la nomenclature botanique. Paris 1881. roy. 8⁰.

Congrès provincial des orientalistes. Compte-rendu de la 3e Session 1878. Lyon 1880. 2 Tomes. 4⁰.

Annales du Musée Guimet. Revue de l'histoire des religions. Paris 1881. 2e Année. Tome III. N⁰. 2. 8⁰.

Mémoires de l'Académie des sciences, arts et belles-lettres de Dyon. Dyon—Paris 1881. 3e Série. Tome VI. 8⁰.

Mémoires de la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1881. Tome XVI. 2e Partie. 8⁰.

Bulletin historique de la Société des antiquaires de la Morinie. St. Omer 1881. Nouvelle Série. Livr. 117. 8⁰.

Mémoires de l'Académie de Stanislas. Nancy 1881. 4e Série. Tome XIII. 8⁰.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique de la Société d'agriculture, sciences et arts de l'arrondissement de Valenciennes. 1881. Tome XXXIV. N⁰. 4—6. 8⁰.

GROOT BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Society. London 1881. Vol. XXXII. N⁰. 213—214. 8⁰.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLI. N°. 8. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 7—9. 8°.

Journal of the Royal Asiatic Society of Great-Britain and Ireland. London 1881. New Series. Vol. XIII. Part 3. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1881. 2d Series. Vol. I. Part 4. 8°.

Journal of the Anthropological Institute of Great-Britain and Ireland. London 1878—1881. Vol. VIII. N°. 2—3. Vol. X. N°. 3. 8°.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London. 1881. Part 2. 8°.

Catalogue of oriental coins in the British Museum. London 1881. Vol. VI. (The coins of the Mongols by Stanley Lane-Poole). 8°.

G. W. Medley. The reciprocity craze. A tract for the Times. London 1881. 8°. (Edited by the Cobden Club).

Astronomical, magnetical and meteorological observations made at the Royal Observatory, Greenwich, in the year 1879. London 1881. 4°.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge 1881. Vol. XIII. Part 1. 4°.

Inhoud:

Cayley. Table of $\Delta^m 0^n \div \Pi(m)$ up to $m = n = 20$.
——— On the Schwarzian derivative and the polyhedral functions.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge 1880—1881. Vol. III. Part 7—8. Vol. IV. Part 1. 8⁰.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool. 1879—1880. Vol. XXXIII—XXXIV. 8⁰.

Proceedings of the Natural History Society of Glasgow. 1881. Vol. IV. Part 2. 8⁰.

Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin 1881. Vol. XXVII. N⁰. 4. (Polite literature and antiquities). Vol. XXVIII. N⁰. 1—5. (Science). 4⁰.

Inhoud, Vol. XXVII, N⁰. 4:

S. Ferguson. Fasciculus of prints from photographs of casts of Ogham inscriptions.

Vol. XXVIII:

1. F. A. Tarleton. On chemical equilibrium.
2. E. P. Wright. On a new genus and species of sponge with supposed heteromorphic zooids.
3. ————— On Blodgettia confervoïdes of Harvey, forming a new genus and species of Fungi.
4. ————— On a new genus and species of unicellular algae, living on the filaments of Rhizoclonium Casparyi.
5. R. W. Roberts. On the periods of the first class of hyper-elliptic integrals.

Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin 1880—1881. 2d Series. Vol. II. N⁰. 2. Vol. III. N⁰. 5—6. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Jahrbuch der k.k. Geologischen Reichsanstalt. Wien 1881. Band XXXI. N⁰. 1. 8⁰.

Mittheilungen der Anthropologischen Gesellschaft in Wien. 1881. Band X. N⁰. 10—12. 8⁰.

Verhandlungen des Naturforschenden Vereins in Brünn. 1880. Band XVIII. 8°.

Katalog der Bibliothek des Naturforschenden Vereins in Brünn. 1880. I Supplement-Heft. 8°.

Mittheilungen des Historischen Vereines für Steiermark. Graz 1881. Heft XXIX. 8°.

Mittheilungen des Vereines der Aerzte in Steiermark. Graz 1881. N°. 17. 8°.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbrück 1881, 3te Folge. Heft 25. 8°.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der kön. Ungar. Geologischen Anstalt. Budapest 1879—1881. Band III. Heft 4. Band IV. Heft 4. roy. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin Februar-Mai 1881. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1881. Heft 1. 4°. Oblong.

Preussische Statistik, herausgegeben vom kön. statistischen Bureau in Berlin. 1881. N°. LIX. (Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1880). 4°.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1881. Band LXXXIV. Heft 3. Band LXXXV. Heft 1. 8°.

C. G. GIEBEL. Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Berlin 1880. 3e Folge. Band V. 8⁰.

Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins von Hamburg-Altona. Hamburg 1881. Neue Folge. Band V. 8⁰.

Abhandlungen herausgegeben vom Naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. Band VII. Heft 1—2. Nebst Beilage. N⁰. 8. 8⁰.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. 1881. Neue Folge. Band V. Heft 1—2. roy. 8⁰.

Verhandlungen des Naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens. Bonn 1880—1881. 4te Folge. 7—8 Jahrg. 8⁰.

FR. WESTHOFF. Die Käfer Westfalens. Bonn 1881. Abth. 1. 8⁰.
Supplement zu den Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der preussischen Rheinlande und Westfalens. 4te Folge. Jahrg. 8.

Bad Oeynhausen (Rehme) in Westfalen. Dargestellt vom Bergrath FREYTAG, kön. Salinen und Bade-Verwaltungs Direktor. Minden 1880. 8⁰.

Neues Lausitzisches Magazin, herausgegeben von der Oberlausitzischen Gesellschaft der Wisschenschaften. Görlitz 1881. Band LVII. Heft 1. 8⁰.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1881. Jahrg. 16. Heft 1—2. 8⁰.

R. HOPPE. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1881. Theil LXVI. Heft 4. 8⁰.

V. CARUS. Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. Jahrg. 4. N⁰. 86—92. 8⁰.

H. SCHEFFLER. Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der abstrakten Wissenschaften. Leipzig 1881. Theil IV. (Die Theorie des Bewusstseins oder die philosophischen Gesetze). 8⁰.

PETERMANN'S Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1881. Band XXVII. N⁰. 6—7. Ergänzungsheft. N⁰. 65. 4⁰.

Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle im Jahre 1880. Halle 1880. 8⁰.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. München 1881. Heft 3. 8⁰.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1881. Heft 2. 8⁰.

H. VON SCHLAGINTWEIT-SAKÜNLÜNSKI. Die Regenverhältnisse in Indien, nebst dem Indischen Archipel und in Hochasien. Theil II. Reihe B. Die Beobachtungen in Ceylon, in Hinterindien und im Archipel. München 1881. 8⁰.
(Aus den Abhandlungen der k. b. Akademie der Wissenschaften).

Correspondenz-Blatt des Zoologisch-mineralogischen Vereines in Regensburg. 1880. Jahrg. 34. 8⁰.

Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Stuttgart 1881. Jahrg. 37. 8⁰.

Die Ehre, bei Christen und bei Juden. 2tes Circular an

Nichtangehörige der Berliner Akademie der Wissenschaften. Mit einem Anhange, der auch für Postbeambte interessant und curios zu lesen ist. 8°.

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société Vaudoise des sciences naturelles. Lausanne 1881. 2e Série. Vol. XVII. N°. 85. 8°.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Brieg den 13, 14 und 15 September 1880. Lausanne 1880. 63 Jahresversammlung. 8°.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1880. Bern 1881. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1881. Transunti. Serie 3. Vol. V. Fasc. 14. 4°.

Memorie della R. Accademia delle science di Torino. 1881. Serie 2. Tome XXXIII. 4°.

Inhoud:

T. Salvadobi. Ornitologia della Papuasia e delle Molucche.

L. Schiaparelli. Le stirpi Ibero-Liguri nell'Occidente e nell' Italia antica.

C. Nani. Gli statuti di Pietro II, conte di Savoia.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. 1881. Vol. XVI. Disp. 6. 8°.

P. Mantegazza. Archivio per l'antropologia e la etnologia. Firenze 1881. Vol. XI. Fasc. 1. 8°.

Atti della Societa Toscana di scienze naturali. Processi verbali di 8 Maggio 1881. 8°.

Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Napoli 1878—1879. Vol. VII—VIII. 4°.

Inhoud, Vol. VII:

P. Panceri. La luce e gli organi luminosi di alcuni anellidi.

A. Costa. Relazione di un viaggio per l'Egitto, la Palestina e le coste della Turchia asiatica per ricerche zoologiche.

V. Cesati. Battarraea Guicciardiniana — Nuovo specie di fungo italico.

G. Licopoli. Sul frutto dell' uva e sulle principali sostanze in esso contenute.

G. Battaglini. Sulla geometria projettiva.

G. A. Pasquale. Su di una nuova specie di Lonicera.

E. Fergola. Dimensioni della terra, e ricerca della posizione del suo asse di figura respetto a quello di rotazione.

V. Cesati. Felci e specie nei gruppi affini raccolte a Borneo dal signor Odoardo Beccari.

P. Panceri. Intorno alla sede del movimento luminoso nelle Campanularie.

——— Osservazioni intorno a nuove forme di vermi nematodi marini.

G. Nicolucci. La Grotta Cola presso Petrella di Cappadocia nella Provincia dell' Abruzzo Ulteriore II.

L. Palmieri. Sulle presenti condizioni della meteorologia elettrica.

G. Nicolucci. Ricerche preistoriche nei dintorni del lago di Lesina in Provincia di Capitanata.

A. de Gasparis. Sul termine di sesto ordine che entra nel valore del parametro delle orbite ellittiche.

——— Sopra una trasformazione di variabili.

F. Gasco. Intorno alla Balena presa in Taranto nel febbrajo 1877.

Vol. VIII:

N. Trudi. Intorno ad alcuni punti di analisi dipendenti dalla partizione dei numeri.

A. de Gasparis. Sopra una trasformazione di variabili.

V. Cesati. Intorno ai miceti raccolti dal Beccari nelle isole de Borneo e del Ceilan.

S. de Luca. Sulle variazioni di livello dell' acqua in un pozzo della solfatara di Pozzuoli.

G. Licopoli. Gli stomi e le glandole delle piante.

G. Battaglini. Sui connessi ternarii di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice.

G. Nicolucci. Strumenti in pietra delle Province Calabresi.

A. de Gasparis. Sviluppo in serie delle derivate parziali della funzione perturbatrice secondo le potenze del tempo.

G. A. Pasquale. Su di alcuni vasi propri della scagliola (Phalaris Canariensis).

A. Scacchi. Ricerche chimiche sulle incrostazioni gialle della lava vesuviana del 1631.

C. Jordan. Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.

Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Napoli 1876—1879. Anno XV—XVIII. 4°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Stockholm 1876—1879. Ny Följd. Bandet XIV. Häftet 2. Bandet XV—XVII. 4°.

Inhoud, Bandet XIV, 2:

G. Lindström. Contributions to the actinology of the Atlantic Ocean.

R. Rubenson. Månads- och årsmedia af temperaturen på statens meteorologiska stationer under åren 1859—1872.

H. Théel. Mémoire sur l'Elpidia. Nouveau genre d'Holothuries.

E. Edlund. Untersuchung über die Wärmeerscheinungen in der galvanischen Säule, und über die elektromotorischen Kräfte.

R. Rubenson. Om storleken af temperaturens dagliga variation i Sverige.

C. A. Westerlund. Sibiriens land- och sötvatten-molusker.

A. E. Törnebohm. Om Sveriges vigtigare diabas- och gabbro-arter.

P. Öberg. Om trias-försteningar från Spetsbergen.

A. Wykander. Observations magnétiques, faites pendant l'expédition arctique suédoise en 1872—1873.

Bandet XV:

J. E. Zetterstedt. Florula Bryologica montium Hunneberg et Halleberg.

A. Möller. Undersökning af planeten Pandoras rörelse.
O. Heer. Ueber fossile Pflanzen von Novaja Semlja.
——— Beiträge zur miocenen Flora von Sachalin.
R. Rubenson. Catalogue des aurores boréales observées en Suède depuis le XVIme siècle jusqu'à l'année 1877 y comprise.
J. G. Agardh. Florideernas morphologi.
G. Eisen. On the Oligohaeta collected during the Swedish expeditions to the arctic regions in the years 1870, 1875 and 1876.

Bandet XVI:

E. Edlund. Recherches sur l'induction unipolaire, l'electricité atmosphérique et l'aurore boréale.
W. Leche. Öfversigt öfver de af Svenska expeditionerna till Novaja Semlja och Jenisei 1875 och 1876 insamlade hafs-mollusker.
H. Théel. Les annélides polychètes des mers de la Nouvelle-Zemble.
J. Sahlberg. Bidrag till Nordvestra Sibiriens insektfauna, Hermiptera Heteroptera, insamlade under expeditionerna till Obi och Jenisei 1876 och 1877.
L. Koch. Arachniden aus Sibirien und Novaja Semlja, eingesammelt von der Schwedischen Expedition im Jahre 1875.
N. P. Hamberg. Undersökning af badgytjan vid Marstrand.
A. G. Nathorst. Bidrag till sveriges fossila flora. II Floran vid Höganäs och Helsingborg.

Bandet XVII:

H. Gyldén. Ueber die Bahn eines materiellen Punktes, der sich unter dem Einflusse einer Centralkraft von der Form: $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$ bewegt.
P. T. Cleve und A. Grunow. Beiträge zur Kenntnis der arctischen Diatomeen.
C. J. Neuman. Om sveriges Hydrachnider.
J. Sahlberg. Bidrag till nordvestra Sibiriens Insektfauna. Coleoptera, insamlade under expeditionerna till Obi och Jenisei 1876 och 1877.
S. Almquist. Monographia Arthoniarum Scandinaviae.

Icones Selectae Hymenomycetum nondum delineatorum, sub auspiciis Regiae Academiae scientiarum Holmiensis, editae ab Elia Fries. Upsaliae 1877. Vol. II, Fasc. 1—6. fol.

N. P. Angelin. Iconographia Crinoideorum in stratis Sueciae siluricis fossilium. Opus postumum edendum curavit Regiae Academia scientiarum Suecica. Holmiae 1878. fol.

Observations météorologiques suédoises, publiées par l'Académie Royale des sciences de Suède. Stockholm 1878—1881. 2e Série. Vol. III—V. gr. 4⁰.

Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda pa Stockholms Observatorium. Stockholm 1877. Bandet I. Häftet 3. 4⁰.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens förhandlingar. Stockholm 1877—1880. Arg. 34—37. 8⁰.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps Akademiens handlingar. Stockholm 1877—1880. Bandet IV—V. 8⁰.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps Akademiens efter år 1854 aflidna ledamöter. Stockholm 1878. Band II. Häfte 1. 8⁰.

Minnesteckning öfver Christopher Carlander, Carl von Linné, Pehr af Bjerkén, Carl Jacob Sundevall, Jonas Hallenberg. Stockholm 1877—1880. 8⁰.

S. A. Tullberg. Om Agnostus-Arterna i de Kambriska aflagringarve vid Andrarum. Stockholm 1880. 4⁰.

Beskrifning till kartbladen Gustafsberg, Helsingborg, Landskrona, Engelholm, Kullen och Höganäs, Norsholm, Nissafors. Stockholm 1880—1881. N⁰. 73—79. 8⁰.

A. G. Nathorst. Om spirangium och dess förekomst i Skånes kolförande bildningar. Stockholm 1879. 8⁰.
(Aftryck ur Öfvers af Kongl. Vet. Akad. förh.)

G. Linnarsson. Om Gotlands graptoliter. Stockholm 1879. 8⁰.
(Aftryck ur Öfvers af Kongl. Vet. Akad. förh).

A. G. Nathorst. Om de Svenska urbergens sekuläre förvittring. Stockholm 1880. 8⁰.

——————— Om de äldre sandstens- och skifferbildningarne vid Vettern. Stockholm 1880. 8⁰.

S. L. Törnquist. Några iakttagelser öfver Dalarnas graptolitskiffrar. Stockholm 1880. 8⁰.

S. A. Tullberg. Om lagerföljden i de Kambriska och Siluriska aflagringarne vid Röstanga. Stockholm 1880. 8⁰.

G. Linnarsson. Om försteningarne i de Svenska lagren med peltura och sphaerophthalmus. Stockholm 1880. 8⁰.

A. G. Nathorst. Om de växtförande lagren i Skånes kolförande bildningar och deras plats i lagerföldjen. Stockholm 1880. 8⁰.

J. Spanberg. Entomologisk tidskrift. Stockholm 1881. Häft 1—2. 8⁰.

N. P. Angelin. Geologisk öfversigts-karta öfver Skäne med åtföljande text, pa uppdrag af Malmöhus och Christianstads Läns Kongl. hushållnings Sällskap. Lund 1877. 8⁰.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. 188—1881. Vol XII. gr. 4⁰.

Den Norske Nordhavs-expedition 1876—1878. III Zoologi. Gephyrea ved D. C. Danielssen og J. Koren. Christiania 1881. gr. 4⁰.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1878—1880. Christiania 1879—1881 8⁰.

Archiv for mathematik og naturvidensbab. Kristiania 1878—1880. Bind III. Hefte 4. Bind IV. Hefte 1—4. Bind V. Hefte 1—3. 8⁰.

Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs skrifter. Throndhjem 1879, 1880. Aar 1878—1879. 8⁰.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1880. 7e Série. Tome XXVIII. N⁰. 1—2. 4⁰.

Inhoud:

1. A. Schiefner. Ueber das Bonpo-Sûtra: „das weisse nâga-hunderttausend."
2. B. Hasselberg. Ueber die Spectra der Cometen und ihre Beziehung zu denjenigen gewisser Kohlenverbindungen.

Compte-rendu de la Commission impériale archéologique pour les années 1878 et 1879. St. Pétersbourg 1881. 4⁰. Avec un Atlas. Plano.

Verslagen van het Keizerlijk Russisch Geographisch Genootschap. St. Petersburg 1881. Deel XVII. 8⁰. (In het Russisch).

Bulletin de la Société impériale des naturalistes. Moscou 1881. Année 1880. N⁰. 3—4. 8⁰.

Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Tifliser physikalischen Observatorium im Jahre 1880, herausgegeben von J. Mielberg. Tiflis 1881. 4⁰.

Finlands geologiska undersökning. Beskrifning till Kartbladen N⁰. 3 – 4. Helsingfors 1881. 8⁰.

Festrede zur Jahresfeier der Stiftung der Universität Dorpat am 12 December 1880 »Ueber den Werth und die Tragweite des klinischen Unterrichtes in der Psychiatrie" gehalten von H. Emminghaus. Dorpat 1881 4⁰.

G. Loeschcke. Archaeologische Miscellen. Dorpat 1881 4°.

A. Lagorio. Vergleichend-petrographische Studien über die massigen Gesteine der Krym. Dorpat 1880. 8°.

A. Enmann. Untersuchungen über die Quellen des Pompeius Trogus für die griechische und sicilische Geschichte. Dorpat 1880. 8°.

R. Hausmann. Studien zur Geschichte des Königs Stephan von Polen. I. Dorpat 1880. 8°.

Vorschriften für die Studirenden der Kais. Universität Dorpat. 1880. 8°.

F. Steinmann. Ueber den Zeitpunkt der Abnabelung Neugeborener. Dorpat 1881. 4°.

A. von Schrenck. Studien über Schwangerschaft, Geburt und Wochenbett bei der Estin nebst Untersuchungen über das Becken derselben. Dorpat 1880. 8°.

B. Lipnisski. Ueber die Scheinreductionen bei Hernien. Dorpat 1880. 8°.

J. Israelsohn. Ueber Radicaloperation der Hernien unter antiseptischer Behandlung. Dorpat 1880. 8°.

B. Wenckiewicz. Das Verhalten des Schimmelgenus Mucor zu Antisepticis und einigen verwandten Stoffen mit besonderer Berücksichtigung seines Verhaltens in zuckerhaltigen Flüssigkeiten. Dorpat 1880. 8°.

N. J. de la Croix. Das Verhalten der Bacterien des Fleischwassers gegen einige Antiseptica. Dorpat 1880. 8°.

Ch. von Schroeder. Studien über die Schreibweise Geisteskranker. Dorpat 1880. 8°.

A. Wernitz. Die Spina bifida in aetiologischer und klinischer Beziehung. Dorpat 1880. 8⁰.

N. Hermann. Experimentelle und casuistische Studien über Fracturen der Schädelbasis. Dorpat 1881. 8⁰.

G. Swirski. Untersuchungen über die Entwickelung des Schultergürtels und des Skelets der Brustflosse des Hechts. Dorpat 1880. 8⁰.

M. Schmidt. Beiträge zur allgemeinen Chirurgie der Schussverletzungen im Kriege. Dorpat 1880. 8⁰.

G. Rücker. Experimentelle und casuistische Beiträge zur Lehre von der Höhlenpression bei Schussverletzungen des Schädels. Dorpat 1881. 8⁰.

A. Donner. Ein Beitrag zur Casuistik der idiopathischen multiplen Hautsarkome. Dorpat 1880. 8⁰.

E. Ohms. Zur Casuistik, Diagnose und operativen Therapie der festen Uterustumoren. Dorpat 1881. 8⁰.

A. Zander. Chemisches über die Samen von Xanthium strumarium. Dorpat 1881. 8⁰.

Th. von Schroeder. Beitrag zur Kenntniss der Iritis syphilitica. St. Petersburg 1881. 8⁰.

A. Bunge. Untersuchungen zur Entwickelungsgeschichte des Beckengürtels der Amphibien, Reptilien und Vögel. Dorpat 1880. 8⁰.

L. Birk. Das Fibrinferment im lebenden Organismus. Dorpat 1880. 8⁰.

N. Lunin. Ueber die Bedeutung der anorganischen Salze für die Ernährung des Thieres. Dorpat 1880. 8⁰.

N. Bojanus. Experimentelle Beiträge zur Physiologie und Pathologie des Blutes der Säugethiere. Dorpat 1881. 8⁰.

H. Meijer. Ueber das Milchsäureferment und sein Verhalten gegen Antiseptica. Dorpat 1880. 8⁰.

F. Kessler. Versuche über die Wirkung des Pepsins auf einige animalische und vegetabilische Nahrungsmittel. Dorpat 1880. 8⁰.

J. Sachssendahl. Ueber gelöstes Haemoglobin im circulirenden Blute. Dorpat 1880. 8⁰.

R. Peters. Experimentelle Beiträge zur Pharmacodynamik des Monobromcamphers (Camphora monobromata). Dorpat 1880. 8⁰.

J. Faure. Pharmacologische Studien über schwefelsaures Methylstrychnin. Dorpat 1880. 8⁰.

R. Otto. Pharmacologische Studien über Amylnitrit, Aethylnitrit, Nitropentan, Nitromethan, Pikrinsäure, Ortho- und Paranitrophenol. Dorpat 1881. 8⁰.

C. Treumann. Beiträge zur Kenntnis der Aloe. Dorpat 1880. 8⁰.

A. W. v. Reidemeister. Ein Beitrag zur Kenntniss des Levulins, Triticins und Sinistrins. Dorpat 1880. 8⁰.

E. Treffner. Beiträge zur Chemie der Laubmoose. Dorpat 1881. 8⁰.

A. Lehmann. Vergleichende Untersuchungen einiger Catechu- und Gambir-Proben nebst kritischer Beleuchtung der Methoden zur Bestimmung ihres Handelswerthes. Dorpat 1880. 8⁰.

C. Hielbig. Kritische Beurtheilung der Methoden, welche zur Trennung und quantitativen Bestimmung der verschiedenen Chinaalkaloide benutzt werden. Dorpat 1880. 8°.

Th. Hrehorowicz. Das Verbrechen. Dorpat 1880. 8°.

B. v. Wolff. Die Einkommensteuerfrage in Russland. Dorpat 1881. 8°.

A. Enmann. Ueber die Quellen der Sicilischen Geschichte bei Pompeius Trogus. Dorpat 1880. 8°.

A Z I Ë.

Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Yokohama 1881. Heft 24. 4°.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1881. N°. 2—4. 6. 8°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1881. Vol. L. Part. 1. N°. 1—2. Part. 2. N°. 1—2. 8°.

A F R I K A.

The Cape Catalogue of stars, deduced from observations made at the Royal Observatory, Cape of Good Hope, 1834 to 1840, and reduced to the epoch 1840. Cape Town 1878. 8°.

N O O R D - A M E R I K A.

Smithsonian contributions to knowledge. Washington 1881. Vol. XXIII. 4°.

Inhoud:

H. J. CLARK. Lucernariae and their allies. A memoir on the Anatomy and Physiology of Halielystus Auricula and other Lucernarians, with a discussion of their relations to other Acalephae, to Beroids, and Polypi.

E. W. HILGARD. On the geology of Lower Louisiana and the salt deposit of Petite Anse Island.

J. G. BARNARD. On the internal structure of the earth considered as affecting the Phenomena of precession and nutation, being the third of the problems of rotary motion.

D. G. ELLIOT. A classification and synopsis of the Trochilidae.

H. C. WOOD. Fever; a study in morbid and normal physiology.

Smithsonian miscellaneous collections. Washington 1880—1881. Vol. XVIII—XXI. 8⁰.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution for the year 1879. Washington 1880. 8⁰.

A memorial of JOSEPH HENRY. Washington 1880. roy. 8⁰.

Annual report of the Comptroller of the currency to the third session of the forty-sixth Congres of the United States, 6 December 1880. Washington 1880. 8⁰.

Refunding of the national debt. Notes of an interview between the finance committee of the Senate and the Secretary of the Treasury, the Comptroller of the Currency. and the Treasurer of the U. S. with regard to the bill (H. R. 4592) to facilitate the refunding of the national debt. Washington 1881. 8⁰.

Anniversary memoirs of the Boston Society of natural history, published in celebration of the fiftieth anniversary of the Society's foundation 1830—1880. Boston 1880. 4⁰.

Inhoud:

N. S. SHALER. Propositions concerning the classification of Lavas considered with reference to the circumstances of their extrusion,

A. Hyatt. Genesis and evolution of the species of Planorbis at Steinheim.

S. H. Scudder. The Devonian Insects of New Brunswick, with a note on the geological relations of the fossil insects from the Devonian of New Brunswick.

W. G. Farlow. The Gymnosporangia (Cedar-apples) of the United States.

Th. Lyman. A new structural feature, hitherto unknown among Echinodermata, found in deep-sea Ophiurans.

W. K. Brooks. The development of the squid, Loligo Pealii Lesueur.

A. S. Packard Jr. The anatomy, histology and embryology of Limulus Polyphemus.

E. Burgess. Contributions to the anatomy of the milk-weed butterfly, Danais Archippus Fabr.

S. F. Clarke. The development of a double-headed vertebrate.

Ch. S. Minot. Studies on the tongue of reptiles and birds.

E. S. Morse. On the identity of the ascending process of the astragalus in birds with the intermedium.

L. Carr. The crania of New-England Indians.

W. James. The feeling of effort.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Boston 1881. New Series. Vol. VIII. Part 1. 8°.

The American Journal of otology. New-York 1881. Vol. III. N°. 3. 8°.

Transactions of the American Philosophical Society. Philadelpia 1881. New Series. Vol. XV. Part. 3. 4°.

Inhoud:

S. S. Haldeman. On the contents of a rock retreat in Southern Pennsylvania.

Proceedings of the American Philosophical Society. Philadelphia 1880. Vol. XIX. N°. 107—108. 8°.

Journal of the Academy of natural sciences of Philadelphia 1874—1881. 2d Series. Vol. VIII. Part. 4. 4°.

Inhoud:

W. M. Gabb. Description of Caribbean miocene fossils.

W. M. GABB. Description of new species of fossils from the pliocene clay beds between Limon and Moen, Costa Rica, together with notes on previously known species from there and elsewhere in the Caribbean Area.

A. GARRETT. The terrestrial Mollusca inhabiting the Cook's or Harvey Islands.

H. C. CHAPMAN. The placenta and generative apparatus of the elephant.

J. LEIDY. The parasites of the termites.

——— Remarks on Bathygnathus borealis.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1880. Part. 1—3. 8⁰.

Transactions of the American Medical Association. Philadelphia 1880. Vol. XXXI. 8⁰.

The American Journal of science. New Haven 1881. 3d Series. Vol. XXI. N⁰. 121—127. 8⁰.

Transactions of the Academy of science of St. Louis. 1880. Vol. IV. N⁰. 1. roy. 8⁰.

Inhoud:

N. HOLMES. The geological and geographical distribution of the human race.

A. CORUNA Y COLLUDO. Zoque; the language spoken at Santa Maria de Chimalapa, and at San Miquel and Tierra Blanca, in the State of Chiapas, Mexico.

C. M. SCOTT. On the improvement of the western rivers.

G. SEYFFARTH. Egyptian theology, according to a Paris mummy-coffin.

F. E. NIPHER. Report on magnetic determinations in Missouri, 1878 and 1879.

WADSWORTH and NIPHER. The tornado of April 14. 1879.

G. HAMBACH. Contribution to the Anatomy of the genus Pentremites, with description of new species.

G. ENGELMAN. Revision of the genus Pinus, and description of Pinus Elliottii.

——— The acorns and their germination.

Report of the board of managers of the Winchester Observatory of Yale College to the president and fellows for the Academic year 1880—1881, to which is appended the report of the astronomer in charge of the horological and thermometric bureaus. 8⁰.

Proceedings of the California Academy of sciences at a reception given to the captain and officers of the Jeannette search expedition. San Francisco 1881. 8⁰.

Pamphlet sur la colonisation dans la vallée d'Ottawa au nord de Montréal, et règlements et avantages de la Société de colonisation du diocèse de Montréal. Montréal 1880. 8⁰.

England and Ireland. A lecture by the Rev. A. J. Bray. Montreal 1880. 8⁰.

The Canadian antiquarian and numismatic journal. Montreal 1872—1876. Vol. I. N⁰. 1. Vol. II. N⁰. 2. Vol. IV. N⁰. 4.

Anales del Ministerio de Fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo IV. 8⁰.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Vol. VI. N⁰. 68—92, 98—110. fol.

Revista mensual climatologica. Mexico 1881. Tomo I. N⁰. 5—6. 4⁰.

ZUID-AMERIKA.

Archivos do Museu Nacional do Rio de Janeiro. 1878. Vol. III. 3⁰ et 4⁰ Trimestres. 4⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1881. Tomo XI. Entr. 6. Tomo XII. Entr. 1— 2. 8⁰.

AUSTRALIË.

Department of mines N. S. W. Geological sketch map of New South Wales, compiled from the original map of the late Rev. W. B. Clarke, by C. S. Wilkinson. Sydney 1880. Scale 1 : 1013760. 4 bladen plano.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1881. 31e Jaarg. N°. 1—8. 8°.

W. Pleyte. Nederlandsche oudheden van de vroegste tijden tot op Karel den Groote. Leiden 1881. Afl. 9. (Drenthe). fol.

Gedenkboek van het Koloniaal Militair Invalidenhuis Bronbeek, door den Kommandant J. C. J. Smits. Arnhem 1881. Afl. 1—5. 4°.

Bibliotheca Belgica. 1881. Livr. 13—16. kl. 8°.

Journal des savants. Paris. Juin—Août 1881. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1881. 2e Série. Tome V. Janvier—Avril. 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1881. 3e Série. Tome XXIII. Mai—Août. 8°.

Annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VIII. N°. 43. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XII. N°. 72—74. 8°.

Mittheilungen der k. k. Central-Commission zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale. Wien 1881. Neue Folge. Band VII. Heft 2—3. 4°.

Corpus inscriptionum latinarum, consilio et auctoritate Academia litterarum regiae borussicae. Berolini 1881. Vol. VIII. Pars 1—2. fol.

Inhoud:

G. WILLMANNS. Inscriptiones africae latinae.

Göttingische Gelehrte Anzeigen. St. 25—39. Nachrichten. N°. 9—13. 8°.

F. H. TROSCHEL. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1881. 47ster Jahrg. Heft 2. 8°.

Linnaea. Ein Journal für die Botanik in ihrem ganzen Umfange. Berlin 1881. Neue Folge. Band IX. Heft 3—4. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Neue Folge. Band XIII. Heft 2—4. Band XIV. Heft 1. Beiblätter. Band V. St. 6—8. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1880. 4te Folge. Band VIII. Heft 4. Band IX. Heft 1—2. 8°.

Allgemeine deutsche Biographie. Leipzig 1881. Band XIII. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band 240. Heft 6. Band 241. Heft 1—4. 8°.

Bibliothèque universelle et revue suisse. Lausanne 1881. 3 Période. Tome X. N°. 30. 8°.

Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1881. 3 Période. Tome V. N° 6—8. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND OCTOBER 1881.

Staatkundig en staathuishoudkundig Jaarboekje voor 1876, 1877, 1878, 1879 en 1881, uitgegeven door de Vereeniging voor de statistiek in Nederland. Amsterdam 1876—1881. 8°.

Het jaarcijfer 81, als getuige van de beteekenis des geloofs, beide voor een krachtig volksleven en voor de wetenschap. Rede bij de opening van het studiejaar, uitgesproken den 20 September 1881 door Dr. S. Hoekstra Bzn. Amsterdam 1881. 8°.

J. van Rees. Zur Kenntniss der Bewimperung der hypotrichen Infusorien, nach Beobachtungen an Styloplotes grandis n. sp. und Euplotes longipes Clap. Lachm. Amsterdam 1881. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1881. 4e Reeks. Deel V. Afl. 9. 8°.

Verslag van den staat der sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden, in het tijdvak van den eersten Juli 1880 tot de laatste dagen der maand Juni 1881. Amsterdam 1881. 8°.

R. Dozy. The history of the Almohades by Abdo-'l-wáhid al-Marrékoshi. Leyden 1881. 2d Edition. 8°.

Sammlungen des geologischen Reichs-Museums in Leiden. I. Beiträge zur Geologie Ost-Asiens und Australiens, herausgegeben von K. Martin und A. Wichmann. Leiden 1881. 1tes Heft. (Sedimente Timors) 8°.

Departement van Oorlog. Lijst van voorhanden kaarten en instrumenten. 's Gravenhage 1881. 8°.

Handelingen der Nederlandsche Juristen-Vereeniging. 's Gravenhage 1880—1881. 11de en 12de Jaarg. 8°.

Bijdragen voor vaderlandsche geschiedenis en oudheidkunde. 's Gravenhage 1881. 3de Reeks. Deel I. St. 1. Register op de tien deelen der Nieuwe Reeks. 8°.

Mededeelingen betreffende het Zeewezen. 's Gravenhage 1881. Deel XXVI. Afl. 6. 8°.

J. A. Fruin. De Nederlandsche wetboeken. Utrecht en 's Gravenhage 1881. Afl. 18. roy. 8°.

J. L. van Hasselt. Het heilig Evangelie, naar de beschrijving van Matthéus, vertaald in de Noefoorsche taal. Utrecht 1881. 8°.
(Uitgegeven door de Utrechtsche Zendingsvereeniging).

Catalogus van het Museum van het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1881. 8°.

J. Dirks. Penningkundig Repertorium. N°. XXVI. 8°.

Algemeen verslag gedaan te Groningen in de jaarlijksche vergadering van contribueerende leden, gehouden den 4 Juli 1881, wegens het Instituut voor Doofstommen, aldaar opgericht in den jare 1790. 8°.

Ch. M. Schols. Landmeten en waterpassen. Breda 1881. 2de druk. Tekst met Atlas. 8⁰.

A. A. W. Hubrecht. Proneomenia Sluiteri gen. et sp. n. with remarks upon the anatomy and histology of the Amphineura. 8⁰.
(Reprinted from the Niederl. Archiv für Zoologie. Supplem. Bd. II).

——————— The peripheral nervous system in Palaeo- and Schizonemertini, one of the layers of the body-wall. 8⁰.
(Reprinted from the quarterly journal of microscopical science).

Verslag aan den Koning over de openbare werken in het jaar 1880. 's Gravenhage 1881. 4⁰.

Koningrijk der Nederlanden. Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1880. 's Gravenhage 1881. 1ste Gedeelte. fol.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Augustus 1881. 's Gravenhage 1881. Nieuwe Serie. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1881. Deel XXVI. Afl. 5—6. 8⁰.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome II. N⁰. 8. 8⁰.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N⁰. 8. 8⁰.

J. Plateau. Quelques expériences sur les lames liquides minces. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie Royale de Belgique).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881. Tome XCIII. N⁰. 13—16. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N⁰. 38—42. 8⁰.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1881. 4e Année N⁰. 9. 8⁰.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les les plus reculés jusqu'a l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr 187—191. roy. 8⁰.

H. Doherty. Philosophie organique. L'homme et la nature. Paris 1881. 8⁰.

Journal d'hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N⁰. 261—266. 4⁰.

GROOT BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1881. Vol. CLXXII. Part. 2. 4⁰.

Inhoud:

U. Pritchard. The Cochlea of the Ornithorhynchus platypus compared with that of ordinary mammals and of birds.

W. C. Williamson. On the organization of the fossil plants of the coal-measures.
C. Niven. On the induction of electric currents in infinite plates and spherical shells.
J. Hopkinson. Electrostatic capacity of glass and of liquids.
W. Spottiswoode. On the forty-eight coordinates of a cubic curve in space.
W. Crookes. On the viscosity of gases at high exhaustions.
A. W. Reynold. On the electrical resistance of thin liquid films, with a revision of Newton's table of colours.
G. H. Darwin. On the tidal friction of a planet attended by several satellites, and on the evolution of the solar system.
J. T. Bottomley. On the thermal conductivity of water.
Owen. Description of some remains of the gigantic land-lizard (Megalania prisca, Owen) from Australia.

Proceedings of the Zoological Society for the year 1881. London 1881. Part 3. 8⁰.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1881. 2ᵈ Series. Vol. I. Part. 5. 8⁰.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N⁰. 10. 8⁰.

J. Chamberlain. The French treaty and reciprocity. London 1881. 8⁰.
(Edited by the Cobden Club).

J. K. Cross. Imports, exports, and the French treaty. London 1881. 8⁰.
(Edited by the Cobden Club).

The Zoology of the voyage of H. M. S. Challenger. Part X. Report on the Pycnogonida by Dr. P. P. C. Hoek. London 1881. 4⁰.

Sandfort Fleming. The adoption of a prime meridian to be common to all nations. The establishment of

standard meridians for the regulation of time. London 1881. 8°.

Sandford Fleming. L'adoption d'un maître méridien international. La fixation de méridiens servant d'unité pour la supputation du temps suivant le projet dont lecture fut faite au Congrès géographique international de Venise. Londres 1881. 8°.

DUITSCHLAND.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1881. Band LXXXV. Heft 2—3. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1880. Band XII. N°. 5—6. roy. 8°.

Inhoud:

5. C. Neumann. Über die peripolaren Coordinaten.
6. ———— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1880. Band VIII. N°. 2—3. roy. 8°.

Inhoud:

2. A. Springer. Die Psalter-Illustrationen im frühen Mittelalter mit besonderer Rücksicht auf den Utrechtpsalter.
3. M. Voigt. Ueber das Vadimonium.

Berichte über die Verhandlungen der kön. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1880 Mathem.-physische classe. N°. 1—2. Philologisch-historische Classe N°. 1—2. 8°.

Jahresbericht der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. 1881. 8°.

R. HOPPE. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1881. Theil LXVII. Heft 1. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. N°. 93—95. 8°.

PETERMANN's Mittheilungen aus JUSTUS PERTHES' geographischer Anstalt. Gotha 1881. Band XXVIII. N°. 8—9. 4°.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der Medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1881. Neue Folge. Band VIII. Heft 2. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1881. Band XIV. Abth. 1. 4°.

Inhoud:

E. VOIT. Ueber die Vergleichung von Bergkrystall-Gewichten.
H. VON SCHLAGINTWEIT-SAKÜNLÜNSKI. Die Regenverhältnisse in Indien, nebst dem Indischen Archipel, und in Hochasien.

Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1881. Band XVI. Abth. 1. 4°.

Inhoud:

K. HOFMANN. Altburgundische Uebersetzung der Predigten Gregors über Ezechiel, aus der Berner Handschrift.
G. F. UNGER. Der sogenannte Cornelius Nepos.

Abhandlungen der historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1880. Band XV. Abth. 1. 4°.

Inhoud:

F. Stieve. Die Verhandlungen über die Nachfolge Kaiser Rudolfs II, in den Jahren 1581—1602.

L. Rockinger. Ueber ältere Arbeiten zur baierischen und pfalzischen Geschichte im geheimen Haus- und Staatsarchive.

Die Wittelsbacher in Schweden. Festrede gehalten in der öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München zur Feier ihres 122sten Stiftungstages am 28 März 1881 von K. Th. Heigel. München 1881. 4°.

Gedächtnisrede auf Leonhard von Spengel gehalten in der öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München zur Feier ihres 122sten Stiftungstages am 28 März 1881 von W. von Christ. München 1881. 4°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1881. Heft 3. Band II. Heft 1. 8°.

ZWITSERLAND.

9ter und 10ter Jahresbericht der historisch antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. Chur 1879—1880. 8°.

ITALIË.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di scienze fisiche e naturali. Firenze 1881. roy. 8°.

Inhoud:

F. Parlatore. Tavole per una anatomia delle piante aquatiche.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di medicina e chirurgia. Firenze 1880. roy. 8°.

Inhoud:

E. GRASSI. Il primo anno della clinica ostetrica diretta dal Prof. Cav. VINCENZO BALOCCHI nella nuova maternità di Firenze.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di filosofia e filologia. Accademia orientale. Firenze 1880. roy. 8⁰.

Inhoud:

D. CASTELLI. Il commento di Sabbatai Donnolo sul libro creazione, pubblicato per la prima volta nel testo ebraico con note critiche e introduzione.

SPANJE.

Relaciones geograficas de Indias, publicalas el Ministerio de Fomento. Peru. Tomo I. Madrid 1881. 4⁰.

Secunda parte de la crónica del Perú, que trata del senorio de los Incas Yupanquis y de sus grandes hechos y gobernacion, escrita por P. DE CIEZA DE LEON. Sequida de la suma y narracion de los Incas que los Indios elamaron capaccuna por J. DE BETÁNZOS. Madrid 1880. 8⁰.

Discurso leido ante al congreso de Americanistas el dia 26 de Setiembre de 1881 en la cátedra del jardin botánico de Madrid para celebrar el centenario de su instalacion en el Prado por Don M. COLMEIRO. Madrid 1881. 8⁰.

Origen de los Americanos. מקוה ישראל esto es esperanza de Israel. reimpresion á plano y renglon del libro de Menasseh ben Israel téologo y filósofo hebreo sobre el origen de los Americanos. publicado en Amsterdam 5410 (1650). Con un preambula, etc. por. S. PEREZ JUNQUERA. Madrid 1881. 8⁰.

Los restos de Colon. (Publicado por el Ministerio de Fomento). Madrid 1879. 8⁰.

RUSLAN

Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1881. Tome XXVII. N⁰. 3. 4⁰.

Meteorologische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums im Jahre 1880. Tiflis 1881. 4⁰.

NOORD-AMERIKA.

Index-Catalogue of the Library of the Surgeon-General's Office U. S. Army. Washington 1881. Vol. II. (Berlioz-Cholas). 4⁰.

Francis E. Nipher. On certain problems in refraction. 8⁰. (Reprinted from the Transactions of the St. Louis Academy of Science).

Boletin del Ministerio de Fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tome VI. N⁰. 111—121. fol.

Revista mensual climatologica. Mexico 1881. Tomo I. N⁰. 7. 4⁰.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1881. Tome XII. Entr. 3. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1881. Nieuwe Serie. Jaarg. 14. N°. 9. 8°.

J. I. van Doorninck. Vermomde en naamlooze schrijvers opgespoord op het gebied der Nederlandsche en Vlaamsche letteren. Leiden 1881. Afl. 1. 8°.

Journal des savants. Paris, Septembre 1881. 4°.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1881. 2e Série. Tome V. Mai—Juin. 8°.

Annales de chimie et de physique. Paris 1881. 5e Série. Tome XXIV. Septembre—Octobre. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XII. N°. 75. 8°.

The annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VIII. N°. 46. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1881. St. 40. 8°.

A. W. Eichler. Jahrbuch des kön. botanischen Gartens und des botanischen Museums zu Berlin. 1881. Band I. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Neue Folge. Band XIV. Heft 2. Beiblätter. Band V. N°. 9. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band CCXLI. Heft 5—6. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome XI. N°. 31. 8°.

Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et morales. Genève 1881. 3e Période. Tome VI N°. 9. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND NOVEMBER 1881.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1881. N°. 3—4. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1881. 4e Reeks. Deel V. Afl. 10. 8°.

Tijdschrift der Nederlandsche Dierkundige Vereeniging. Leiden 1881. Deel V. Afl. 4. 8°.

Sammlungen des geologischen Reichs-Museums in Leiden. I. Beiträge zur Geologie Ost-Asiens und Australiens. 2tes Heft. Martin. Tertiär von Neu-Guinea. Jungtertiär von Sumatra. Tertiär von Ost-Java. Leiden 1881. 8°.

Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1881. Jaarg. 1880—1881. 5de Afl. 2de Gedeelte. Jaarg. 1881—1882. 1ste Afl. 1ste Ged. 4°.

Tijdschrift voor entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche Entomologische Vereeniging. 's Gravenhage. 1881. Deel XXIV. Afl. 4. 8°.

F. C. Donders en Th. Engelmann. Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Utrecht 1881. 3e Reeks. Deel VI. Afl. 2. 8°.

Registers van charters en bescheiden in het Oude Archief van Kampen. Kampen 1863—1875. Deel I—IV. 8°.

De vrije Fries. Mengelingen uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1881. 3e Reeks. Deel III. Afl. 1. 8°.

G. C. J. Vosmaer. Versuch einer spongiologischen Stenographie. 8°.
(Separatabdruck aus Tijdschr. der Ned. Dierkundige Vereeniging).

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand September 1881. 's Gravenhage 1881. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de Schelde enz., waargenomen in de maand Januarij 1881. 's Gravenhage 1881. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

K. F. Holle. De Batoe-toelis te Buitenzorg. 8°.
(Overgedrukt uit het Tijdschrift voor Ind. taal-, land- en volkenkunde).

Snippers van den regent van Galoeh, raden Adi pati Aria Koesoema di Ningrat, met vertaling en toelichting door K. F. Holle. 8°.
(Overgedrukt uit het Tijdschr. voor Ind. taal-, land- en volkenkunde).

BELGIË.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. Tome VI. Fasc. 6. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N°. 9. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881. Tome XCIII. N°. 17—20. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N°. 43—46. 8°.

Bulletin de la Société botanique de France. Paris 1881. Tome XXVIII. Comptes-rendus des séances N°. 4. Revue bibliographique B—C. 8°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1881. 4e Année. N°. 10. 8°.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'a l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr. 192—195. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 267—269. 4°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Society of London. 1881. Vol. XXXI. N°. 211. Vol. XXXII. N°. 215. 8°.

Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1881. Vol. X. N°. 4. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLI. N°. 9. Supp. Number. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol III. N°. 11 8°.

OOSTENRIJK.

II. Bericht des hydrotechnischen Comités über die Wasserabnahme in den Quellen, Flüssen und Strömen in den Culturstaaten. Wien 1881. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin Juni—August 1881. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1881. Heft 2—3. 4°. Oblong.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1881. Band LXXXVI. Heft 1. 8°.

58ster Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1881. 8°.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1881. Jahrg. 16. Heft 3. 8°.

R. Hoppe Grünert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1881. Theil LXVII. Heft 2. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. N°. 96—97. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geogra-

phischer Anstalt. Gotha 1881. Band XXVII. Heft 10. Ergänzungsheft. N⁰. 66. 4⁰.

V, VI und XXVIII. Bericht des Vereines für Naturkunde in Cassel. 1841, 1842. 1882. 4⁰. und 8⁰.

Zeitschrift des Vereins für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde. Jena 1881. Neue Folge. Band II. Heft 3. 8⁰.

Sitzungsberichte der mathem. physik. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1881. Heft 4. 8⁰.

Archiv des Historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg. Würzburg 1880. Band XXIV. Heft 2—3. Band XXV. Heft 2—3. 8⁰.

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société vaudoise des sciences naturelles. Lausanne 1881. 2e Série. Vol. XVII. N⁰. 86. 8⁰.

ITALIË.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Roma 1880. Serie 2. Vol. V—VII. 4⁰.

Inhoud, Vol. V—VII:

Q. Sella. Codex Astensis qui de malabayla communiter nuncupatur. Vol. II–IV.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1881. Serie 3. Memorie della classe di scienze morali, storiche e filogiche. Vol. VI. 4⁰.

Inhoud:

Fiorelli. Notizie degli scavi di antichità. Luglio — Dicembre 1880.
Comparetti. Iscrizioni greche di Olimpia e di Ithaka.

TARTARA. Tentativo di critica sui luoghi liviani contenenti le disposizioni relative alle provincie ed agli eserciti della Repubblica romana.

BONATELLI. Di un'erronea interpretazione d'alcuni fatti psichici per rispetto al pensamento delle idee.

GIAMBELLI. Gli scrittori della storia Augusta studiati principalmente nelle loro fonti.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1881. Serie 3. Transunti. Vol. VI. Fasc. 1. 4°.

P. MANTEGAZZA. Archivio per l'antropologia e la etnologia. Firenze 1881. Vol. XI. Fasc. 2. 8°.

L. CREMONA et E. BELTRAMI. Collectanea mathematica. Mediolani 1881. 8°.

NOORD-AMERIKA.

Bulletin of the U. S. geological and geographical survey of the territories. Washington 1881. Vol. VI. N°. 2. 8°.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo VI. N°. 122—130. fol.

AANGEKOCHT.

J. C. J. SMITS. Gedenkboek van het Koloniaal-Militair invalidenhuis Bronbeek. Arnhem 1881. Afl. 6. 4°.

E. MAINDRON. Les fondations de prix à l'Académie des Sciences. Les lauréats de l'Académie 1714—1880. Paris 1881. 4°.

Journal des savants. Paris Octobre 1881. 4⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1881. St. 41—43. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VIII. N⁰. 47. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XII. N⁰. 76. 8⁰.

Ephemeris epigraphica, corporis inscriptionum latinarum supplementum. Berolini 1881. Vol. IV. Fasc. 3—4. roy. 8⁰.

F. H. Troschel. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1877. Jahrg. 43. Heft 6. 8⁰.

G. Wiedemann. Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Neue Folge. Band XIV. Heft 3. Beiblätter. Band V. St. 5, 10. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band 242. Heft 1—3. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome XI. N⁰. 32—34. 8⁰.

Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1881. 3e Période. Tome VI. N⁰. 10. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND DECEMBER 1881.

Volks-Almanak voor het jaar 1882, door de Maatschappij: tot nut van 't Algemeen. Amsterdam. kl. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1881. N°. 5–6. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1881. 4e Reeks. Deel V. Afl. 11. 8°.

C. K. HOFFMANN. Niederländisches Archiv für Zoölogie. Leiden 1881. Supplementband I. 2te Lief. 8°.

Japansch-Nederlandsch Woordenboek van wijlen Prof. J. J. HOFFMANN. Op last van den Minister van Koloniën bewerkt en uitgegeven door Mr. L. Serrurier. Leiden 1881. Deel I—II. roy. 8°.

Japanese-English Dictionary by the late Prof. J J. HOFFMANN. Bij order of the Dutch government elaborated and edited by Dr. L. Serrurier. Leyden 1881. Vol. I—II. roy. 8°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van N.-Indië, uitgegeven door het Koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van N.-Indië. 's Gravenhage 1881. 4e Reeks. Deel V. St. 2. 8°.

Mededeelingen en berichten der Geldersche Maatschappij van landbouw over 1881. Zutphen 1881. II. 8°.

Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Aanwinsten van het Penningkabinet 1880—1881. 8°.

J. Dirks. Penningkundig Repertorium. XXVII. 8°.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen 1880—1881. Groningen 1881. 8°.

Handelingen van het Provinciaal Genootschap van kunsten en wetenschappen in Noord-Brabant over de jaren 1876—1881. 's Hertogenbosch 1876—1881. 8°.

Catalogus der Boekerij van het Provinciaal Genootschap van kunsten en wetenschappen. 's Hertogenbosch 1879. 1ste Ged. 8°.

Koningrijk der Nederlanden. Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1880. 's Gravenhage 1881. 2de Ged. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee, Wadden, enz. waargenomen in de maand Februarij 1881. 's Gravenhage 1881. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistrerende peilschalen, waargenomen in de maanden Januarij en Februarij 1881. 's Gravenhage 1881. fol.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome II. N°. 9—10. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N°. 10. 8°.

Texte explicatif des lévés géologiques des planchettes de Lille, de Casterlé, d'Hérenthals par M. le baron O. van Ertborn. Bruxelles 1881. 8°.

Notice explicative du levé géologique de la planchette de Renaix par M. le capitaine E. DELVAUX. Bruxelles 1881. 8°.

Jaarboek van het Willems-fonds voor 1882. Gent 1881. 8°.

J. THEIJSKENS. Over het misbruiken van het bovennatuurlijke. Gent 1881. 8°.
(Uitgave van het Willems-fonds N°. 96.)

Vlaamsche Bibliographie. Lijst van Nederlandsche boeken, tijdschriften, muziekwerken, kaarten, platen en tabellen, in België in 1880 verschenen. Gent 1881. 8°.

J. ROULEZ. Choix de vases peints du Musée d'antiquités de Leide. Gand 1855. fol.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881. Tome XCIII. N°. 21—24. 4°.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881. 2e Série. Tome X. N°. 47—50. 8°.

Revue internationale des sciences biologiques. Paris 1881. 4e Année. N°. 11. 8°.

V. DURUY. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'a l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr. 196—199. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 270—274. 4°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique. Valenciennes 1881. Tome XXXIV. N°. 7—9. 8°.

J. Guccia. Sur une classe de surfaces, représentables, point par point sur un plan. Paris 1880. 8°. (Assoc. franc. pour l'avancement des sciences, Congrès de Reims).

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1881. New Series. Vol. III. N°. 12. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLII. N°. 1. 8°.

Journal of the Royal Microscopical Society. London 1881. 2d Series. Vol. I. Part. 6. 8°.

Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1881. Vol. XI. N°. 1—2. 8°.

OOSTENRIJK.

Casopis pro pestovani mathematiky a fysiky, vydává Jednota Ceskyck Mathematiku. Praze 1880—1881. Rocnik X. Cislo 1—6. 8°.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin, September & October 1881. 8°.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1881. Heft 4—5. 4°. Oblong.

Schriften der Universität zu Kiel aus dem Jahre 1880—81. Kiel 1881. Band XXVII. 4°.

G. Meijer. Ueber einige künstliche und natürliche Alkaloïde. Kiel 8°.

J. Cosack. Derivate der Toluidine. Kiel. 8°.

J. Heinemann. Die krystallinischen Geschiebe Schleswig-Holsteins. Kiel 1879. 8°.

O. Grothe. Ueber Metajodorthonitro und- amido Benzoësäuren, sowie über isomere Nitrobenzylcyanide und Paranitrophenylessigsäure. Kiel 1880. 8°.

B. Rheder. Die subpleuralen Ecchymosen beim Erstickungstode. Kiel 1880. 8°.

E. Hecksteden. Beitrag zur Lehre vom Echinokokkus. Kiel 1881. 8°.

C. Schall. Einwirkung von Tetrachlorkohlenstoff auf die drei isomeren Kresole und Oxydation der daraus entstehenden Oxytoluylsäuren zu Oxyphtalsäuren. Kiel 1881. 8°.

H. Becker. Die Herniotomien der Kieler Klinik vom Jahre 1877 bis 1880 mit besonderer Berücksichtigung der Radicaloperation. Kiel 1880. 8°.

J. Peters. Ueber Natron salicylicum beim Diabetes mellitus. Kiel 1880. 8°.

J. Düvelius. Ueber Entzündungen der bursa trochanterica und deren Behandlung. Kiel 1880. 8°.

C. von Thaden. Ueber das senile Staphylom. Kiel 1880. 8°.

E. Goetz. Das Homatropin in der Augenheilkunde. Kiel. 8°.

R. Fritz. Ueber die Resektion des Ellenbogengelenks nebst Mittheilungen über die auf der chirurgischen Klinik zu Kiel in den Jahren 1868—80 vorgekommenen Fälle. Kiel 1880. 8⁰.

O. Benthin. Ueber Resection des Fussgelenks nebst Veröffentlichung einschlägiger Fälle aus der Kieler chirurgischen Klinik. Kiel 1880. 8⁰.

H. Petersen. Eine Magenresection zur Heilung einer Magenbauchwandsfistel. Kiel 1880. 8⁰.

P. Hennings. Zur Statistik und Aetiologie der amyloiden Entartung. Kiel. 8⁰.

W. Bötjer. Die Antisepsis in der Geburtshülfe. Kiel 1880. 8⁰.

H. Bertheau. Zur Lehre von der Inhalationstuberkulose. Kiel 1880. 8⁰.

W. Bultmann. Ein Beitrag zum Erfolge der Iridectomie bei Glaucoma simplex. Kiel. 8⁰.

C. Henrici. Ueber Trepanation bei Gehirnabscessen. Kiel 1880. 8⁰.

A. Bockendahl. Ueber die Bewegungen des m. tensor tympani nach Beobachtungen beim Hunde. Kiel 1880. 8⁰.

J. L. Burchard. Zur Lehre vom Erfüllungsorte. Kiel 1880. 8⁰.

J. H. Thiessen. Die Legende von Kisâgotamî. Kiel. 8⁰.

A. Lorck. Hermann von Salza. Sein Itinerar. Kiel 1880. 8⁰.

A. Puls. Untersuchung über die Lautlere der Lieder Muscatblüt's. Hirschberg 1881. 8⁰.

H. Hass. De Herodis Attici oratione ΠΕΡΙ ΠΟΛΙΤΕΙΑΣ. Lipsiae 1880. 8⁰.

G. Petersen. Quaestiones de historia gentium Atticarum. Kiliae 1880. 8⁰.

C. Bock. De metris Horatii lyricis. Kiel 1880. 8⁰.

M. Hansen. De tropis et figuris apud Tibullum. Kiliae 1881. 8⁰.

G. Luebbert. De amnestia anno CCCCIII a Chr. n. ab Atheniensibus decreta. Kiliae 1881. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. N⁰. 98—99. 8⁰.

ITALIË.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. 1881. Vol. XVI. Disp. 7. 8⁰.

Atti della Societa Toscana di scienze naturali. Pisa 1881. Vol. V. Fasc. I. 8⁰.

PORTUGAL.

Collecção de tradados e concertos de pazes que o estado da India Portugueza fez com os Reis e Senhores com quem teve relaçoes nas partes da Asia e Africa Oriental desde o principio da conquista até ao fim do seculo XVIII por J. F. J. Biker. Lisboa 1881. Tomo I. 8⁰.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague. 1881. 6me Série. Vol. I. N⁰. 3—4. Vol. II. N⁰. 1—2. 4⁰.

Inhoud, Vol. I:

3. J. Steenstrup. Sepiadarium ig Idiosepius to nye slaegter af Sepiernesfamilie, avec Résumé du Mémoire sur le Sepiadarium Kochii et l'Idiosepius pygmaeus.
4. A. Colding. Nogle undersögelser over stormen over Nord- og Mellem-Europa of 12te — 14de November 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Ostersoen.
(Résultats de quelques recherches sur la tempête et les inondations du 13 Novembre 1872 dans la mer Baltique).

Vol. II:

2. L. Lorenz. Om Metallernes ledningsevne for varme og elektricitet.
3. E. Warming. Familien Podostemaceae. (La famille des Podostémacées).

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i aaret 1881. Kjobenhavn 1881. N°. 2. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

G. Retzius. Das Gehörorgan der Wirbelthiere. (Morphologisch-histologische Studien). Stockholm 1881. Band I. Das Gehörorgan der Fische und Amphibien. fol.

RUSLAND.

Bericht über die Verhandlungen und Ergebnisse der 3tten internationalen Polar-Konferenz abgehalten in St. Petersburg in den Tagen vom 1 bis 6 August 1881. 4°.

Sitzungs-Berichte der Kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst nebst Veröffentlichungen des Kurländischen Provinzial-Museums, aus dem Jahre 1880. Mitau 1881. 8°.

NOORD-AMERIKA.

E. S. Holden and Ch. S. Hastings. A synopsis of the scientific writings of Sir William Herschel. Washington 1881. 8⁰.
(From the Smithsonian Report for 1880.)

W. Harkness. On the relative accuracy of different methods of determining the solar parallax. 8⁰.
(From the American Journal of science. Vol. XXII.)

The American Journal of Otology. New-York 1881. Vol. III. N⁰. 4. 8⁰.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo VI. N⁰. 131—137. fol.

Revista mensual climatologica. Mexico 1881. Tome I. N⁰. 8. 8⁰.

ZUID-AMERIKA.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1881. Tomo XII. Entr. 4—5. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1881. Nieuwe Serie. 14e Jaarg. Afl. 10. 8⁰.

A. J. Servaas van Rooyen. Verboden boeken, geschriften, couranten, enz. in de 18de eeuw. Haarlem 1881. 1e Afl. 8⁰.

Journal des Savants. Paris Novembre 1881. 4⁰.

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Paris 1881. 2e Série. Tome V. Juillet. 8⁰.

Annales de chimie et de physique. Paris 1881. 5e Série. Tome XXIV. Novembre. 8⁰.

Annals and magazine of natural history. London 1881. 5th Series. Vol. VIII. N⁰. 48. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science. London 1881. 5th Series. Vol. XII. N⁰. 77. 8⁰.

Mittheilungen der k. k. Central-Commission zur Erforschung- und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale. Wien 1881. Neue Folge. Band XVII. 4te Heft. 4⁰.

Göttingische gelehrte Anzeiger. St. 45—48. Nachrichten N⁰. 14. 8⁰.

F. H. Troschel. Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1881. Jahrg. 47. Heft 3—4. 8⁰.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1881. Band V. St. 11. 8⁰.

Der Zoologische Garten. Frankfurt a/M 1881. Jahrg. XXII. N⁰. 1—6. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Augsburg 1881. Band 242. Heft 4—5. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1881. 3e Période. Tome XII. N⁰. 35. 8⁰.

Bibliothèque Universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève 1881. 3e Période. Tome VI. N°. 11. 8°.

T. SALVADORI. Ornitologia della Papuasia e delle Molucche. Torino 1881. Parte 2°. 4°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JANUARI 1882.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Amsterdam 1882. Deel VIII. St. 2. 8°.

Volledige dichtwerken van Constantijn Huijgens met aanteekeningen van P. LEENDERTZ WZN; uitgegeven door de Hollandsche Maatschappij van fraaije kunsten en wetenschappen, en onder toezicht van Dr. N. BEETS. Amsterdam, Rotterdam. z. j. Afl. 1. 8°.

De Volksvlijt. tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1881. N°. 7—10. 8°.

Jaarboek van het mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië. Amsterdam 1881. Jaarg. 10. Deel II. 8°.

H. C. ROGGE. Geschiedenis der Stedelijke Boekerij van Amsterdam. Amsterdam 1882. 4°.

Tentoonstelling van voorwerpen betreffende het Athenaeum Illustre en de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam. Amsterdam 1882. 8°.

J. F. VAN SOMEREN. Essai d'une Bibliographie de l'histoire spéciale de la peinture et de la gravure en Hollande et en Belgique (1500—1875). Amsterdam, Zutphen 1882. 8°.

Natuurkundige Verhandelingen der Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen. Haarlem 1881. 3de Verz. Deel IV. 2de St. 4°.

Inhoud:

F. K. GINZEL. Neue Untersuchungen ueber die Bahn des Olbers'-schen Cometen und seine Wiederkehr.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société hollandaise des sciences. Harlem 1881. Tome XVI. Livr. 3—5. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van nijverheid. Haarlem 1881. 4e Reeks. Deel V. Afl. 12. 8°.

Flora Batava. Leiden 1882. Afl. 255—256. 4°.

Handelingen en mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1881. Leiden 1881. 8°.

Levensberichten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde. Leiden 1881. 8°.

Publications de la Commission géodésique Néerlandaise. I. Détermination à Utrecht, de l'Azimuth d'Amersfoort par J. A. C. OUDEMANS. La Haye 1881. 4°.

Sepp's Nederlandsche insecten. 's Gravenhage 1882. Deel IV. N°. 19—20. 4°.

Tijdschrift voor entomologie uitgegeven door de Nederlandsche Entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1882. Deel XXV. Afl. 1. 8°.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het Geneeskundig Staatstoezigt in het jaar 1880. 's Gravenhage 1881. 4°.

Verslag omtrent 's Rijks verzamelingen van geschiedenis en kunst. 1880. 's Gravenhage 1881. 8°.

Rapport over de kunst in België aan de Nederlandsche Regering uitgebragt door Jhr. Mr. W. M. VAN WEEDE. 's Gravenhage 1881. 8°.

Jaarboek der Rijks Universiteit te Utrecht. 1880—1881. Utrecht 1882. 8°.

W. B. S. BOELES. Frieslands Hoogeschool en het Rijks Athenaeum te Franeker, uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1881. Deel II. 2de Helft. 1ste Ged. 8°.

De St. Janskerk te 's Hertogenbosch, uitgegeven door het Provinciaal Genootschap van kunsten en wetenschappen in Noord-Brabant te 's Hertogenbosch. fol.

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand November 1881. 's Gravenhage 1881. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1881. Deel XLII. St. 1. 4°.

Inhoud:

J. J. M. DE GROOT. Jaarlijksche feesten en gebruiken van de Emoy-Chineezen.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1881. Deel XXVII. Afl. 1—3. 8°.

Notulen van de Algemeene- en Bestuurs-vergaderingen

van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia 1881. Deel XIX. N°. 2. 8°.

Geneeskundig tijdschrift voor Nederl. Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1881. Nieuwe Serie. Deel X. Afl. 5. 8°.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederl.-Indië, uitgegeven door de Nederl. Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1881. Deel XXVI. Afl. 7—8. 8°.

Annales du Jardin botanique de Buitenzorg. Batavia—Leiden 1876—1881. Vol. I. Vol. II. Partie 1. roy. 8°.

R. D. M. Verbeek. Topographische en geologische beschrijving van Zuid-Sumatra, bevattende de residentiën Bengkoelen, Palembang en de Lampongsche districten. 8°.
(Overgedrukt uit het Jaarboek van het mijnwezen in Nederl. Oost-Indië. 1881).

P. A. Bergsma. Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1881. 2de Jaarg. 1880. 8°.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. 1881. Vol. V. Part 1—5. fol.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des sciences de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome II. N°. 11. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1881. 3e Série. Tome XV. N°. 11—12. 8°.

J. PLATEAU. Une application des images accidentelles. (2e Note). 8⁰.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome II).

F. PLATEAU. Préparation rapide des grandes pièces myologiques. 8⁰.
(Association française pour l'avancement des sciences, congrès de Reims).

Textes explicatives des levés géologiques des planchettes de St. Nicolas et de Tamise, par M. le baron O. VAN ERTBORN avec la collaboration de M. P. GOGELS. Bruxelles 1880. 8⁰.

F. DE POTTER en J. BROECKAERT. Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1881. 7e Reeks. St. Nicolas. Deel I. (Dl. XXIX). 8⁰.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1881—1882. Tome XCIII. N⁰. 25—26. Tome XCIV. N⁰. 1—3. 4⁰.

Nouvelles Archives du Muséum d'histoire naturelle. Paris 1881. 2e Série. Tome IV. Fasc. 1. 4⁰.

Inhoud:

J. VESQUE. De l'anatomie des tissus appliquée à la classification des plantes.

V. BERTIN. Révision des Donacidées du Muséum d'histoire naturelle.

H. E. SAUVAGE. Recherches sur la faune ichthyologique de l'Asie, et description d'espèces nouvelles de l'Indo-Chine.

Bulletin de l'Académie de médecine. Paris 1881—1882. 2e Série. Tome X. N⁰. 51—52. Tome XI. N⁰. 1—3. 8⁰.

V. Duruy. Histoire des Romains depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'invasion des barbares. Paris 1881. Livr. 199—204. roy. 8°.

Journal d'hygiène. Paris 1881. 7e Année. Vol. VI. N°. 275. 8e Année. Vol. VII. N°. 276-278. 4°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the Royal Society. London 1881. Vol. XXXIII. N°. 216. 8°.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. London 1881. Vol. XLII. N°. 2. 8°.

Proceedings of the Royal Geographical Society. London 1882. New Series. Vol. IV. N°. 1. 8°.

G. W. Medley. England under free trade. London 1881. 8°.
(Edited by the Cobden Club).

OOSTENRIJK.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1881. Philosophisch-historische Classe. Band XXXI. 4°.

Inhoud:

Miklosich. Ueber die Mundarten und die Wanderungen der Zigeuner Europa's, XI—XII.
Pfizmaier. Die älteren Reisen nach dem Osten Japans.
Büdinger. Cicero und der Patriciat, eine staatsrechtliche Untersuchung.
Werner. Kant in Italiën.
Pfizmaier. Die japanischen Werke aus den Sammlungen der Häuser.

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1880—1881. Philosophisch-historische

Classe. Band XCVII. Heft 1—3. Band XCVIII. Heft 1—2. 8⁰.

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1881. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 1e Abth. Band LXXXII. Heft 3—5. Band LXXXIII. Heft 1—4. 2te Abth. Band LXXXII. Heft 3—5. Band LXXXIII. Heft 1—4. 3te Abth. Band LXXXII. Heft 3-5 Band LXXXIII. Heft 1—2. 8⁰.

Almanach der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1881. Jahrg. 31. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Monatsbericht der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. November 1881. 8⁰.

R. Virchow. Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1881. Band LXXXVI. Heft 2—3. 8⁰.

R. Lepsius. Nubische Grammatik mit einer Einleitung über die Völker und Sprachen Afrika's. Berlin 1880. 8⁰.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft herausgegeben von der Medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Jena. 1881. Band XV. Heft 3. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1881. Jahrg. 4. N⁰. 100—102. 8⁰.

R. Hoppe Grünert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1881. Theil LXVII. Heft 3. 8⁰.

H. Scheffler. Das Wesen der Elektrizität des Galvanismus und Magnetismus. 2tes Supplement zum 2ten Theile der Naturgesetze. Leipzig 1882. 8⁰.

PETERMANN's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1881. Band XXVII. N°. 11—12. 4°.

20ster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1881. 8°.

Verhandlungen des Naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. 1881. Neue Folge. Band III. Heft 1. 8°.

26ster Bericht des Naturhistorischen Vereins in Augsburg. 1881. 8°.

Jahres-Bericht des Vereins für Naturwissenschaft zu Braunschweig für das Geschäftsjahr 1880—1881. Altenburg 1881. 8°.

GAUSS. Eine Umriss seines Lebens und Werkens von F. A. T. WINNECKE. Herausgegeben durch den Verein für Naturwissenschaft zu Braunschweig. Braunschweig 1877. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften. München 1881. Heft 2. 8°.

ZWITSERLAND.

Neue Denkschriften der Allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten naturwissenschaften. Basel 1881. Band XXVIII. Abth. 1. 4°.

Inhoud :

O. HEER. Beiträge zur fossilen Flora von Sumatra.

C. KRAMER. Ueber die geschlechtslose Vermehrung des Farn-Prothalliums namentlich durch Gemmen resp. Conidien.

KOLLMANN. Die statistischen Erhebungen über die Farbe der Augen, der Haare und der Haut in der Schulen der Schweiz.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1881. Bern 1881. N°. 1. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1882. Transunti. Serie 3. Vol. VI. Fasc. 2—3. 4°.

Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel. Leipzig 1881. Band III. Heft 1—2. 8°.

Atti della Societa Toscana di scienze naturali. Processi Verbali di 13 Novembre 1881. 8°.

Preces sancti nersetis clajensis armeniorum patriarchae triginta tribus linguis editae. Venetiis 1862. 8°.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1880—1881. 7e Série. Tome XXVIII. N°. 3—7. 4°.

Inhoud:

3. O. Chwolson. Allgemeine Theorie der magnetischen Dämpfer.
4. J. Borodin. Untersuchungen über die Pflanzenathmung.
5. S. Nikitin. Die Jura-Ablagerungen zwischen Rybinsk, Mologa und Myschkin und der oberen Wolga.
6. O. Backlund. Zur Theorie des Encke'schen Cometen.
7. E. Zacharia von Lingenthal. Die Handbücher des geistlichen Rechts aus den Zeiten des untergehenden byzantischen Reiches und der Türkischen Herrschaft.

Bulletin de la Société impériale des naturalistes de Moscou. 1881. N°. 1. 8°.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. 1879—1880. Helsingfors 1880. 8°.

Bidrag till kännedom of finlands natur och folk, utgifna af Finska Vetenskaps Societeten. Helsingfors 1880. Häftet 33—34. 8⁰.

Middelanden af Societas pro fauna et flora fennica. Helsingfors 1881. Häftet 6—8. 8⁰.

A Z I Ë.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1881. N⁰. 7—8. 8⁰.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1881. Vol L. Part 1. N⁰. 3—4. Part 2. N⁰. 3. 4⁰.

N O O R D - A M E R I K A.

A. Hall. Observations of double stars made at the U. S. Naval Observatory. Washington 1881. 4⁰.

36th Annual Report of the Director of the Astronomical Observatory of Havard College. Cambridge 1882. 8⁰.

Anales del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo V. 8⁰.

Boletin del Ministerio de fomento de la republica Mexicana. Mexico 1881. Tomo VI. N⁰. 138—152. fol.

Z U I D - A M E R I K A.

Bulletin astronomique et méteorologique de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. 1881. N⁰. 1—2. 4⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1881. Tomo XII. Entr. 6. 8⁰.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Zeventiende Deel. — Eerste Stuk.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1881.

INHOUD

VAN

DEEL XVII. — STUK 1.

---

bladz.



...UKT BIJ .E ROEVER - KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Zeventiende Deel. — Derde Stuk.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1882.



INHOUD

VAN

DEEL XVII. — STUK 3.



GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

INHOUD

VAN

DEEL XVII. — STUK 2.

bladz.



GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Zeventiende Deel. — Tweede Stuk.

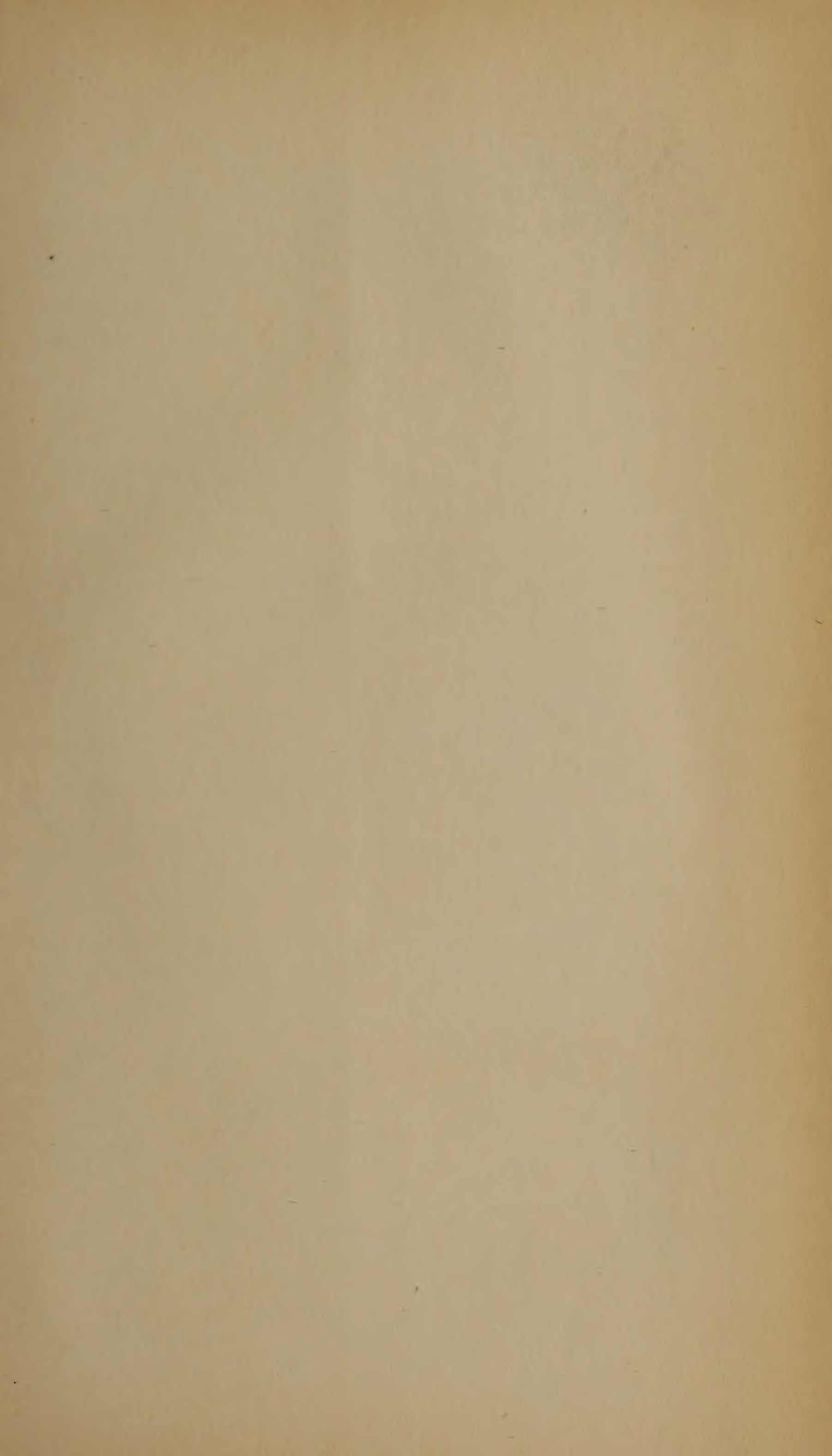


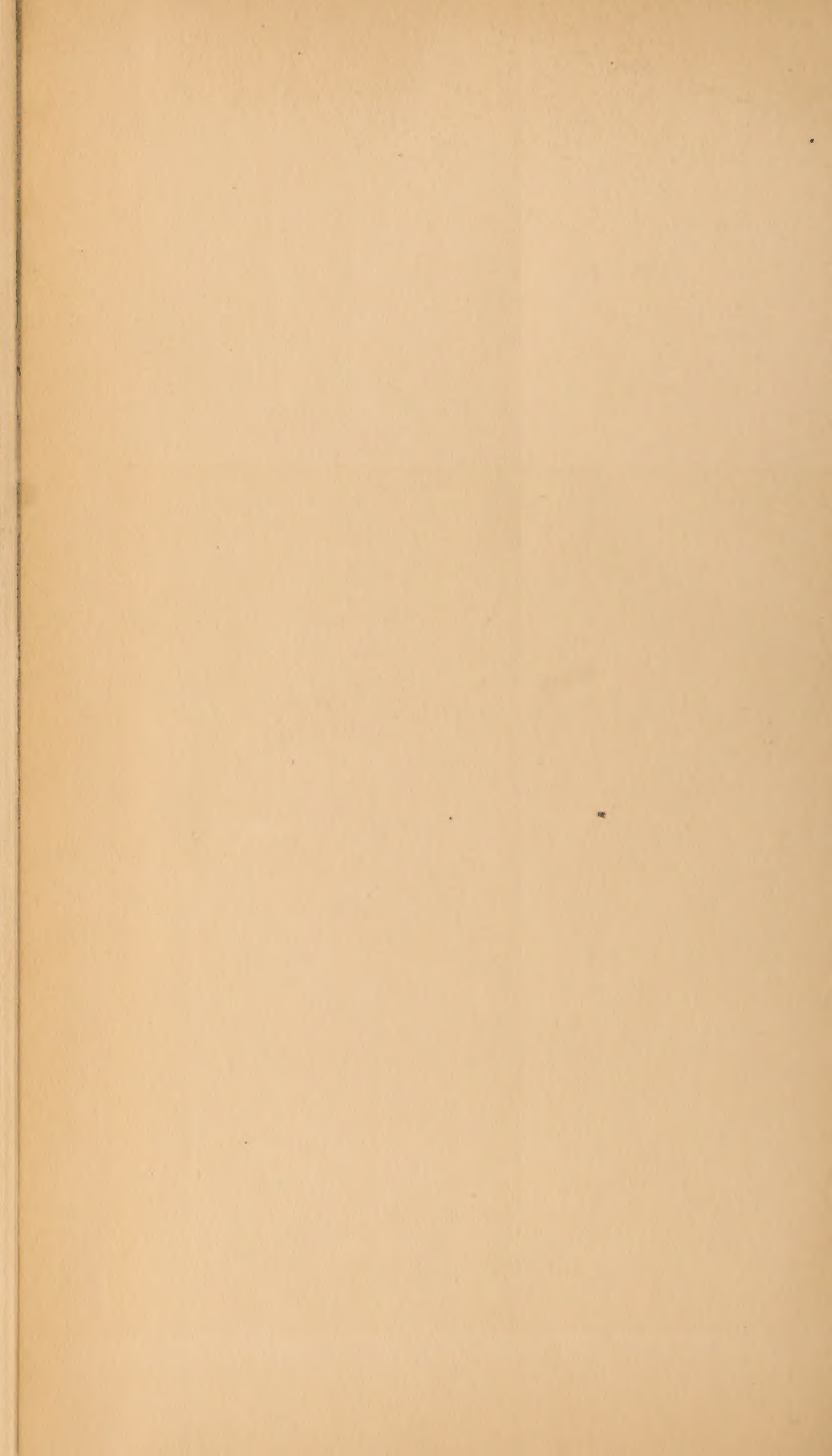
AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1882.

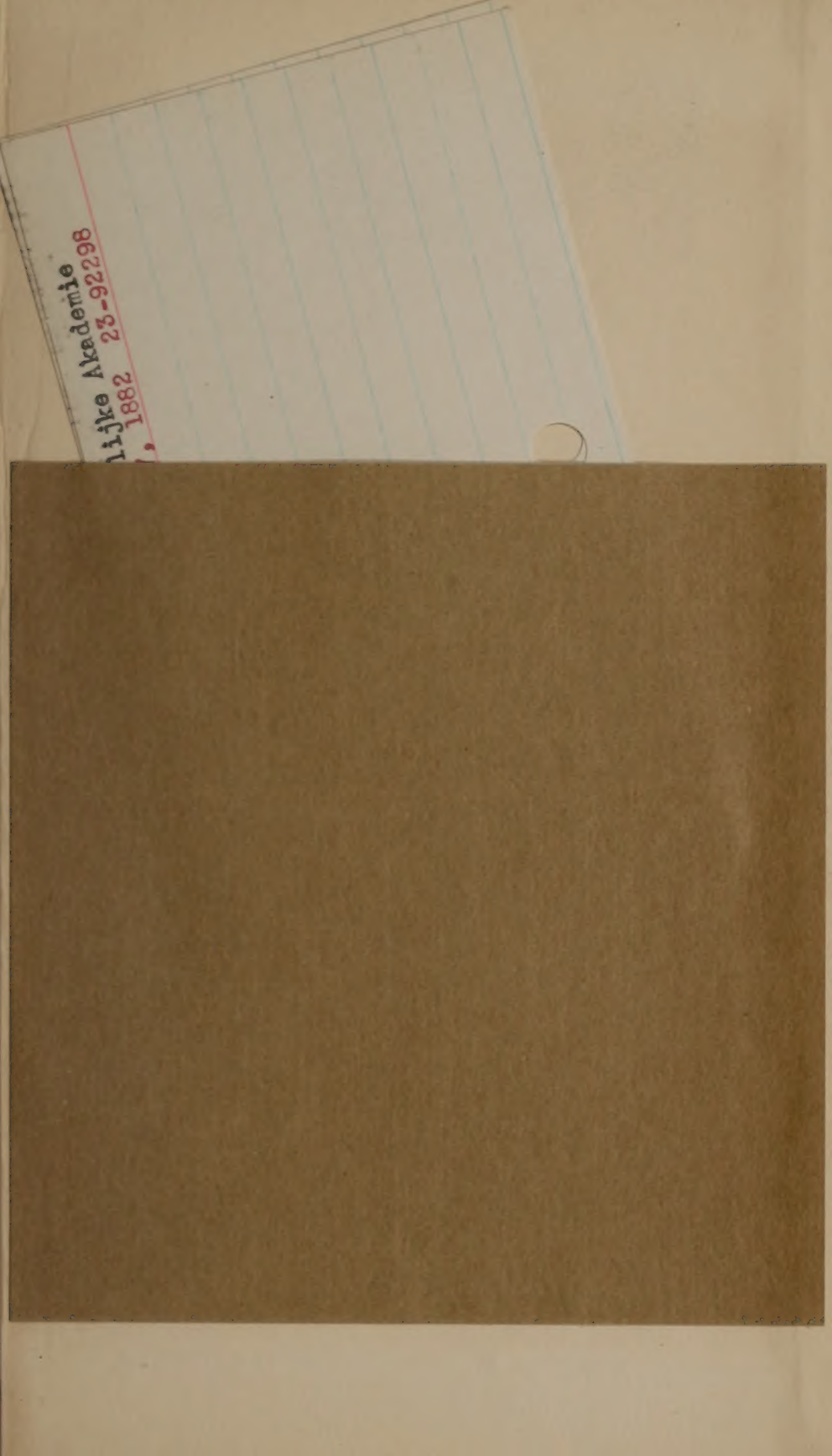


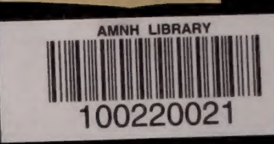









lijke Akademie
1882 23-922298


AMNH LIBRARY
100220021